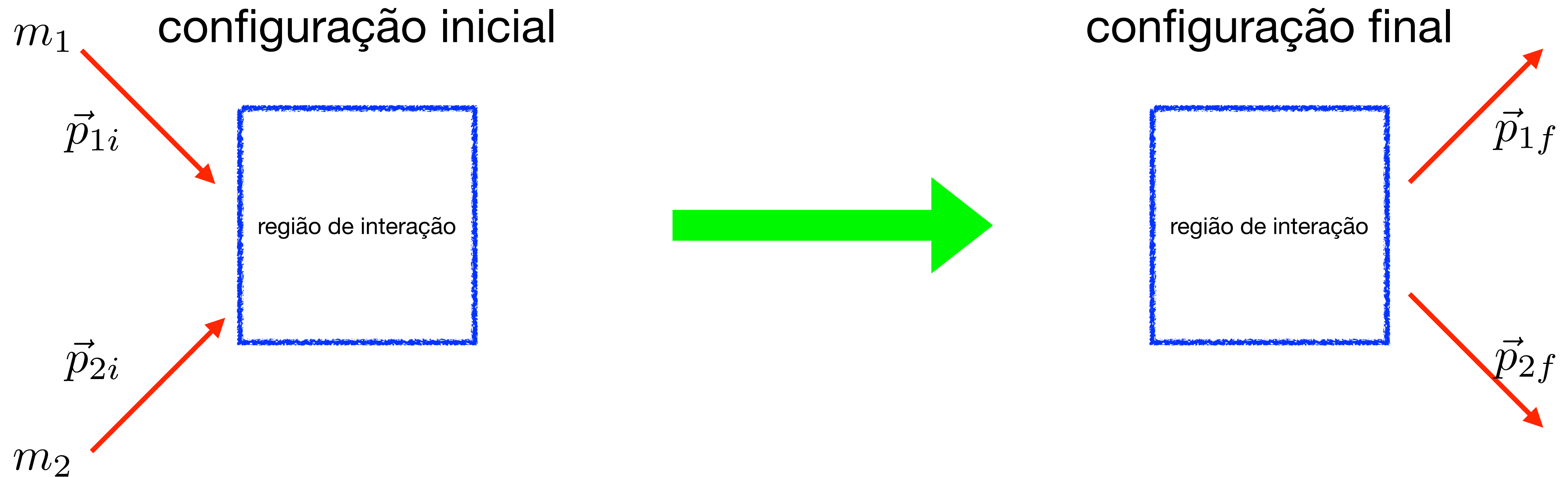


# Dinâmica de muitos corpos

## quarta aula

1. Colisões unidimensionais inelásticas
2. Colisões bidimensionais elásticas
3. Colisões bidimensionais inelásticas

# 0. Recordação



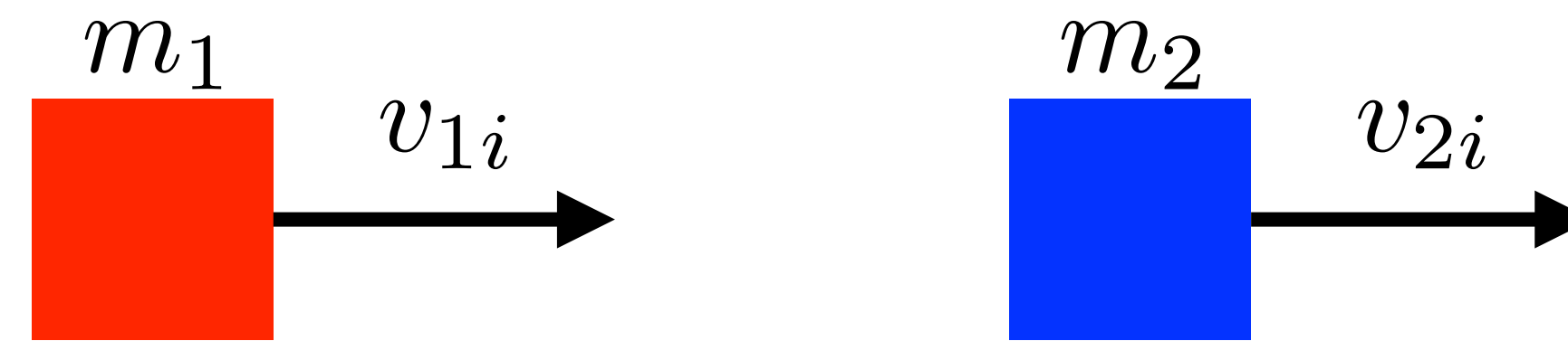
- Em um sistema, cuja força externa total é nula, o momento linear total é conservado!

$$\frac{d}{dt} (M\vec{v}_{CM}) = \frac{d}{dt} (\vec{P}_{CM}) = \frac{d}{dt} \left( \sum_j \vec{p}_j \right) = 0$$

- Tipos de colisão:
  1. A colisão é dita elástica se conserva energia cinética
  2. A colisão é inelástica se não conserva energia cinética

# Colisões unidimensionais elásticas

a situação inicial é



$$v_{1i} > v_{2i}$$

enquanto a final é



$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

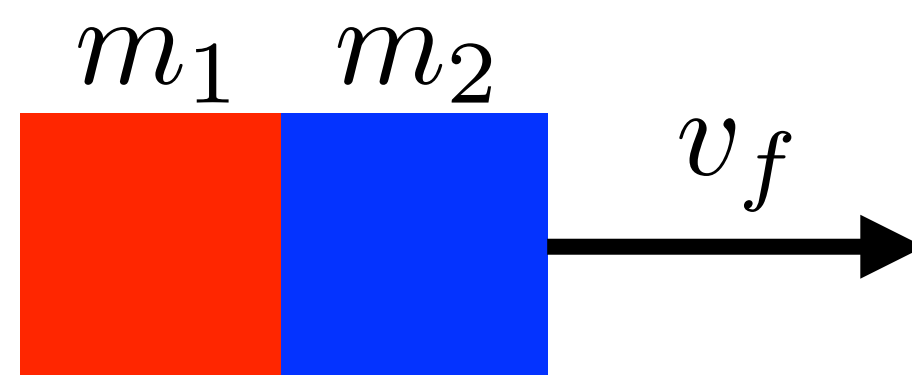
$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

# 1. Colisões unidimensionais inelásticas :

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = P_{CM}$$



- Numa colisão **totalmente inelástica** os corpos movem-se juntos após o impacto



$$v_{1f} = v_{2f} = v_f$$

note que  $P_{CM} = m_1 v_f + m_2 v_f = (m_1 + m_2) v_{CM} \implies v_f = v_{CM} = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}$

- No referencial do CM:  $v'_{1f} = v'_{2f} = 0$

- Vimos que  $T_S = \frac{1}{2} \sum_j m_j \vec{v}_j^2 = \cancel{T_{CM}} + \frac{1}{2} M \vec{v}_{CM}^2$  logo a energia cinética final é mínima

## Exemplo: pêndulo balístico

- Após a colisão

$$v_f = \frac{m}{m + M} v$$

- Conservação de energia:

$$\frac{1}{2}(m + M)v_f^2 = (m + M)gh \implies v_f = \sqrt{2gh}$$

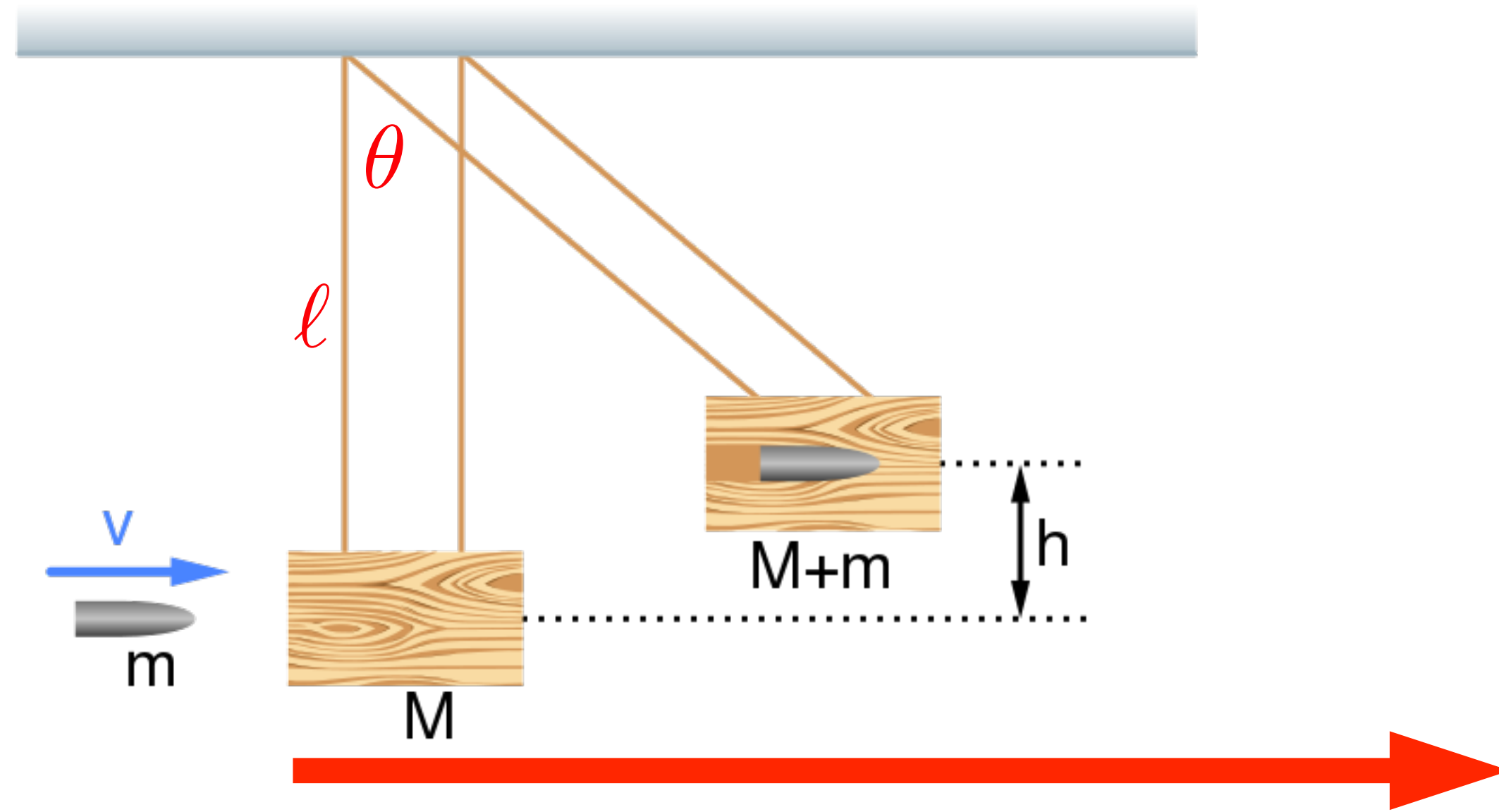
- Podemos determinar a velocidade de bala medindo a altura que o bloco sobe

$$v = \frac{m + M}{m} \sqrt{2gh}$$

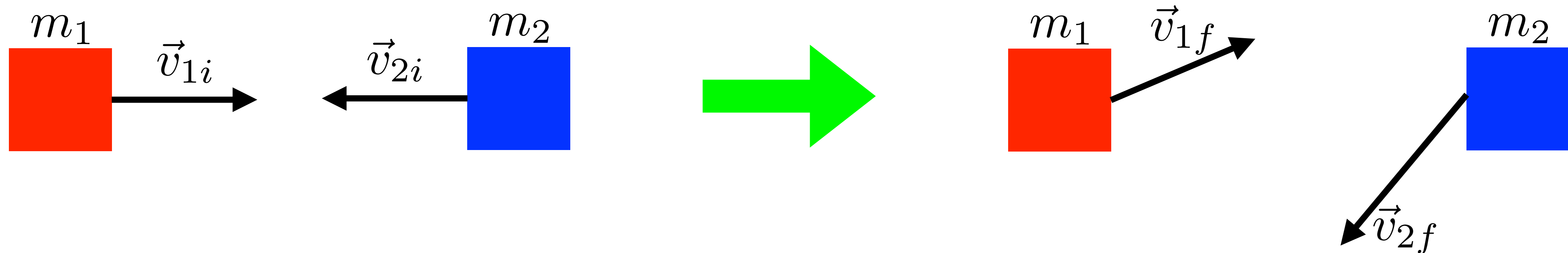
- Para  $m = 10 \text{ g}$  ,  $M = 10 \text{ kg}$  ,  $v = 200 \text{ m/s}$   $\implies h \simeq 2 \text{ mm}$

- Como medir a velocidade com precisão?

<https://www.youtube.com/watch?v=tO6ZL1P6qnl>



## 2. Colisões bidimensionais elásticas



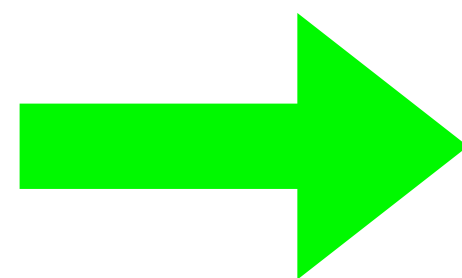
- Sabemos que

$$\begin{aligned}\vec{P}_{CM} &= m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f} \\ &= \vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}\end{aligned}$$

- Propriedade geral: a colisão ocorre num plano:

No referencial do CM:

$$\begin{aligned}\vec{p}_{1i} &= -\vec{p}_{2i} \\ \vec{p}_{1f} &= -\vec{p}_{2f}\end{aligned}$$



$\vec{p}_{1i}$  e  $\vec{p}_{1f}$  definem um plano no qual também está a partícula 2

[vide livro do Nussenzveig que mostra no referencial de repouso do corpo 2]

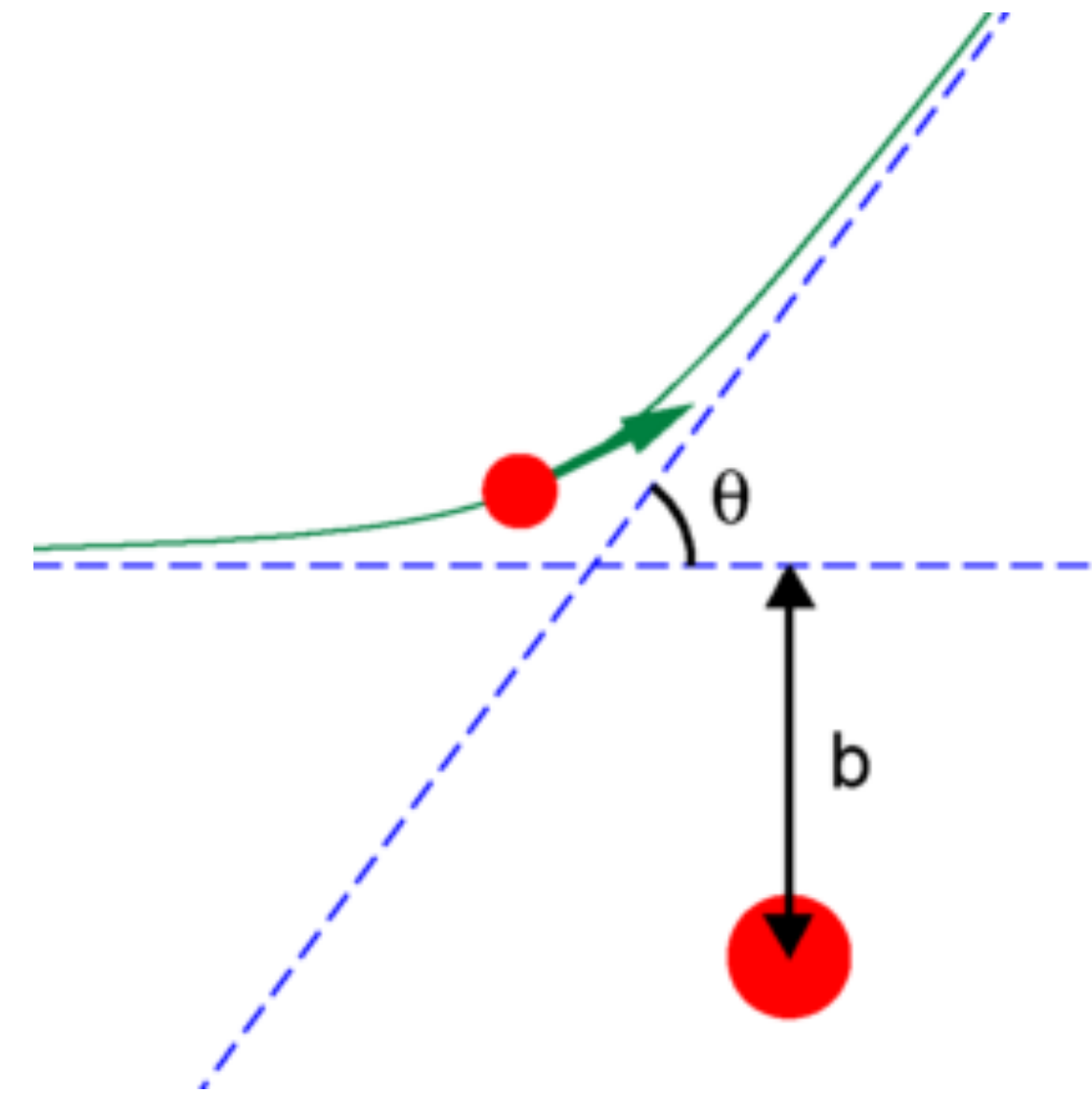
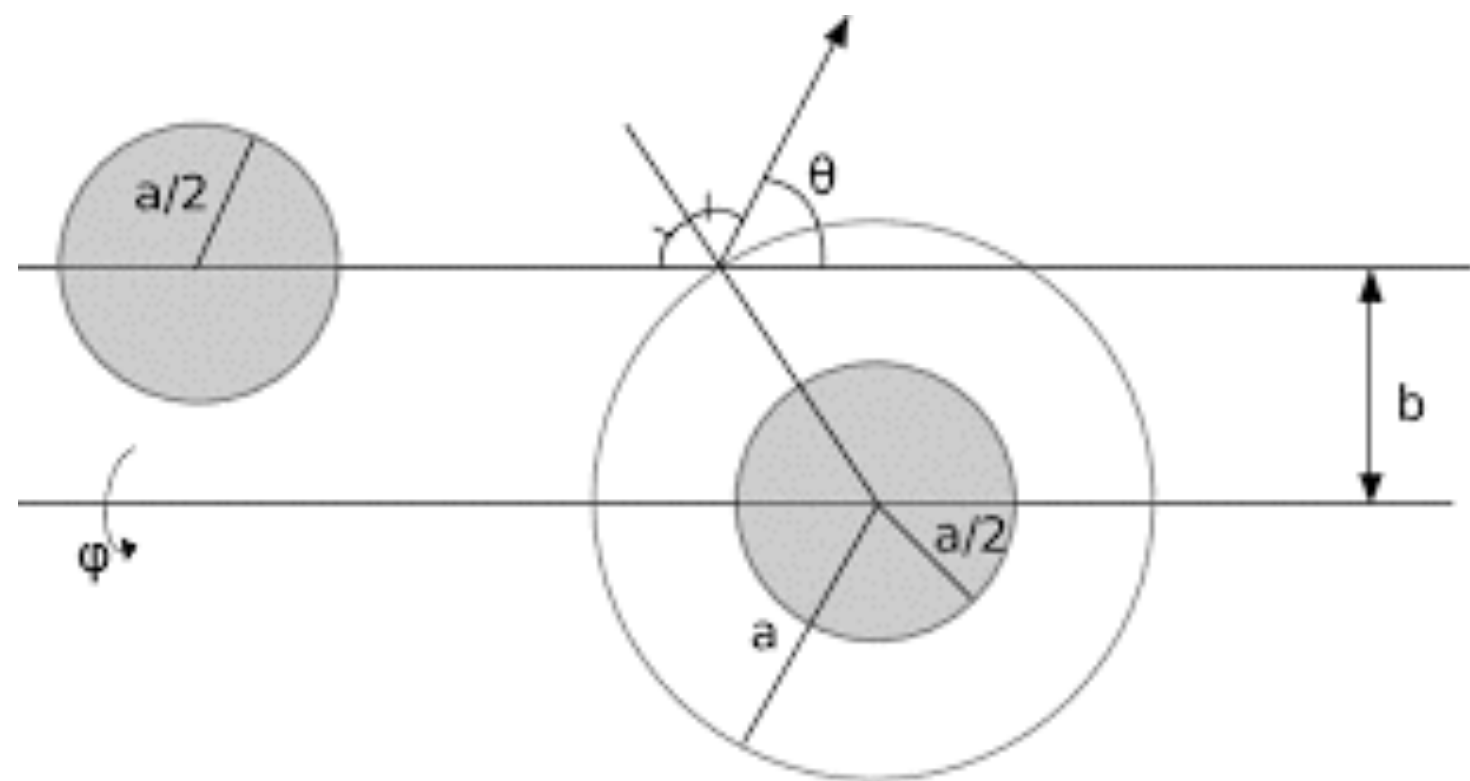
- Subproduto: como no caso unidimensional

$$\vec{v}_{1i} = -\frac{m_2}{m_1}\vec{v}_{2i}$$

$$\vec{v}_{1f} = -\frac{m_2}{m_1}\vec{v}_{2f}$$

- Por conveniência tomamos este plano como sendo Oxy
- Número de incógnitas: 4 = 2 componentes de  $\vec{v}_{1f}$  e 2 componentes de  $\vec{v}_{2f}$
- Conservação de momento fornece 2 equações
- Conservação de energia cinética fornece 1 equação adicional
- Logo, precisamos de informação adicional!
- Por exemplo o parâmetro de impacto e forças

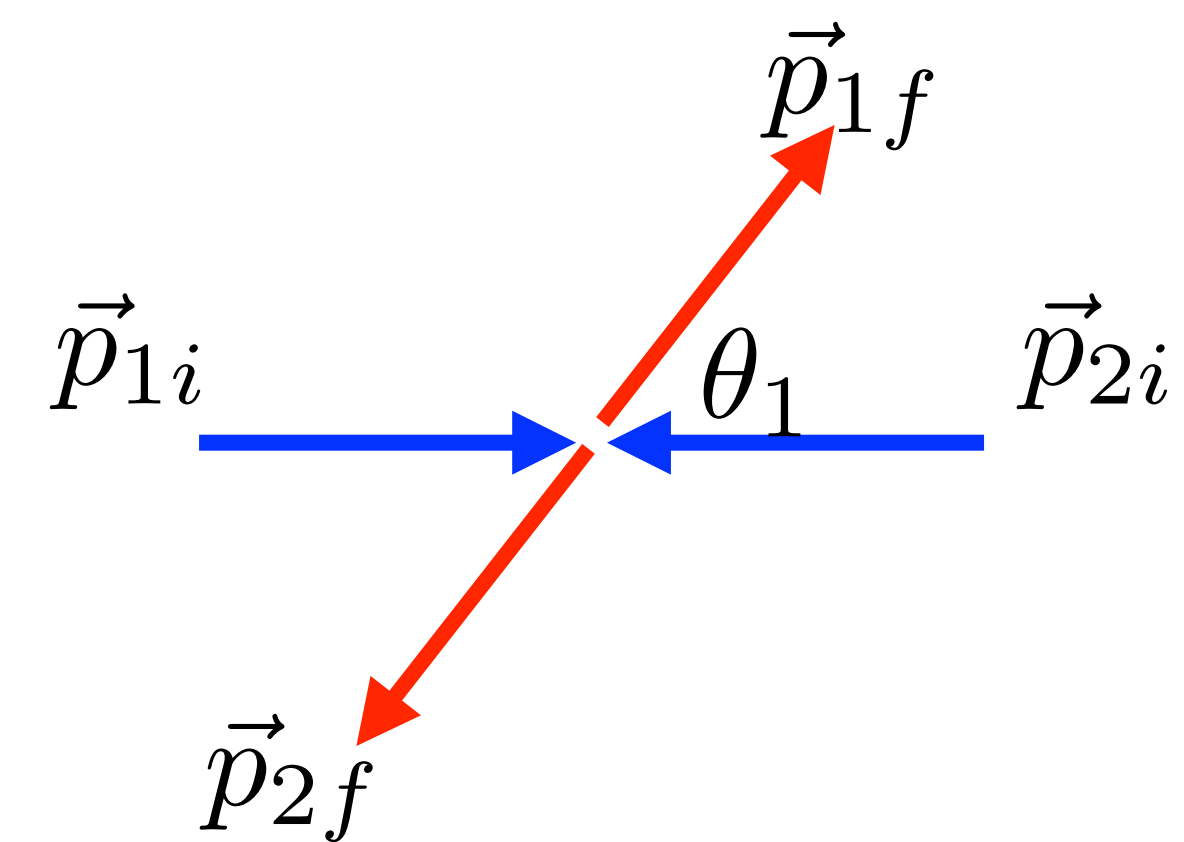
- Logo, precisamos de informação adicional!
- Por exemplo o parâmetro de impacto  $b$  e forças



- Informação que podemos obter para colisão elástica no CM:

$$\vec{p}_{1i} = -\vec{p}_{2i} = \vec{p}_i$$

$$\vec{p}_{1f} = -\vec{p}_{2f} = \vec{p}_f$$



conservação de energia cinética:  $\frac{\vec{p}_{1i}^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_{2i}^2}{2m_2} = \frac{\vec{p}_{1f}^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_{2f}^2}{2m_2} \implies \left( \frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2} \right) \vec{p}_i^2 = \left( \frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2} \right) \vec{p}_f^2$

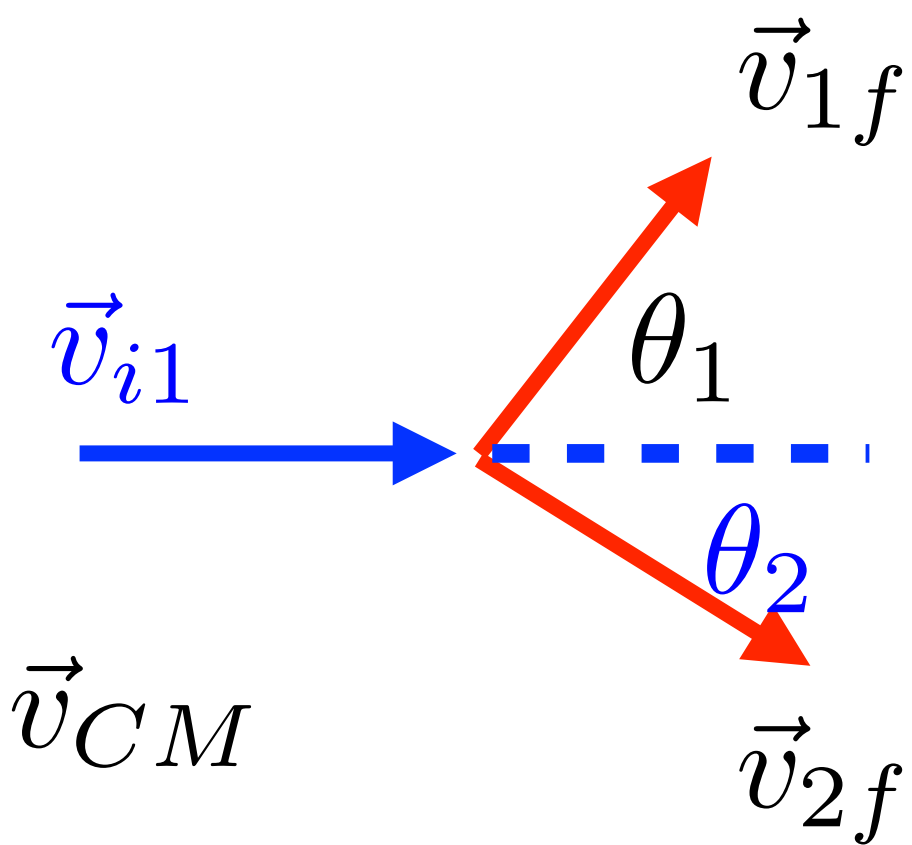
logo,  $|\vec{p}_i| = |\vec{p}_f|$



• Caso 1: massas iguais  $m_1 = m_2 = m$

• No referencial do CM: já resolvido  $|\vec{p}_i| = |\vec{p}_f| = mv$

• No referencial de repouso do segundo corpo:



$$\vec{v}_{CM} = \frac{\vec{v}_{1i}}{2}$$

$$|\vec{v}_{CM}| = v$$

$$\vec{v}_{1f} = \vec{v}'_{1f} + \vec{v}_{CM}$$

$$\vec{v}_{2f} = \vec{v}'_{2f} + \vec{v}_{CM}$$

• o ângulo entre as partículas finais é de 90 graus!

$$\begin{aligned}\vec{v}_{1f} \cdot \vec{v}_{2f} &= (\vec{v}'_{1f} + \vec{v}_{CM}) \cdot (\vec{v}'_{2f} + \vec{v}_{CM}) \\ &= \vec{v}'_{1f} \cdot \vec{v}'_{2f} + \vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_{CM} + \vec{v}_{CM} \cdot (\vec{v}'_{1f} + \vec{v}'_{2f}) \\ &= -v^2 + v^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

- Trabalhando direto o referencial de repouso do corpo 2

$$\vec{p}_{1i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}$$

$$\frac{\vec{p}_{1i}^2}{2m} = \frac{\vec{p}_{1f}^2}{2m} + \frac{\vec{p}_{2f}^2}{2m}$$

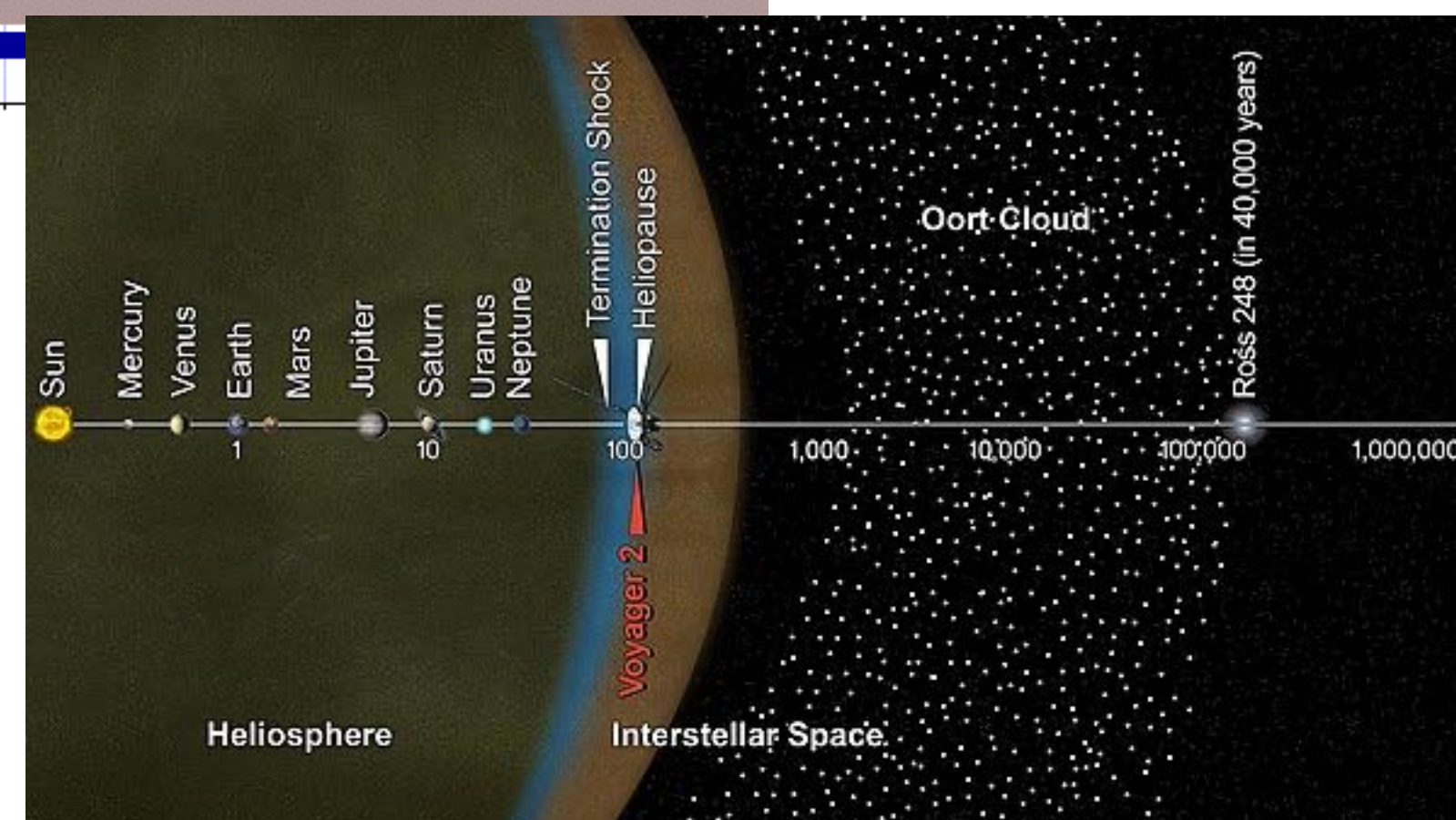
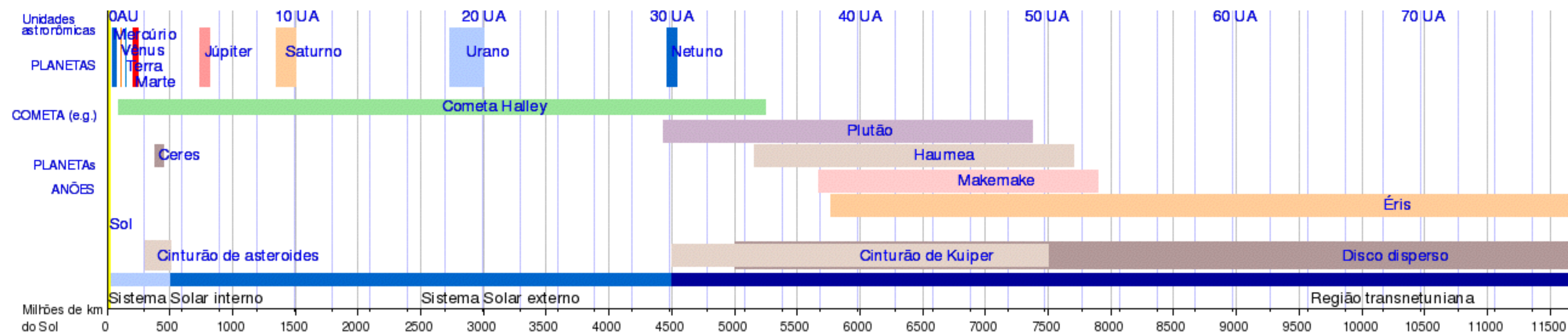
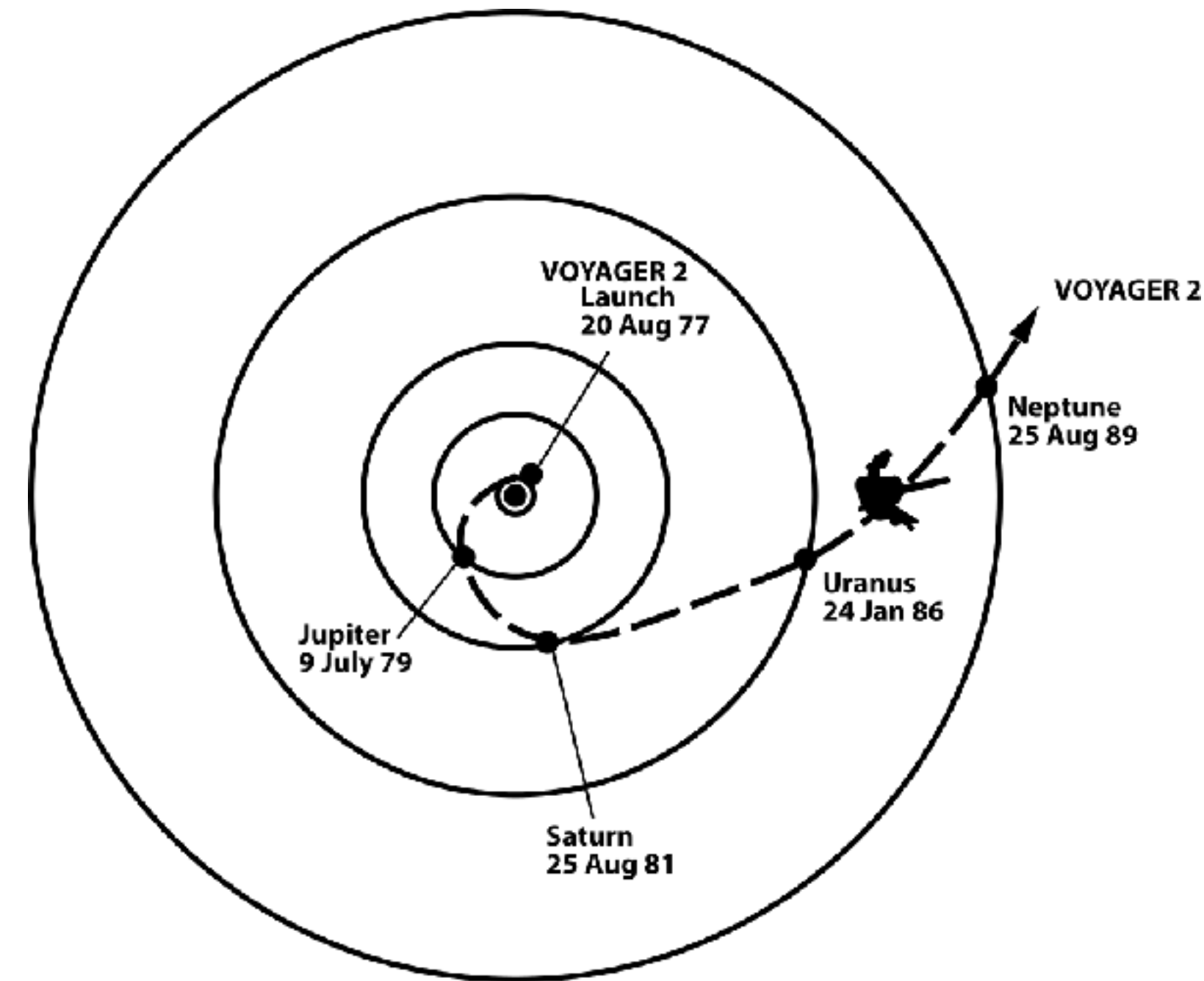
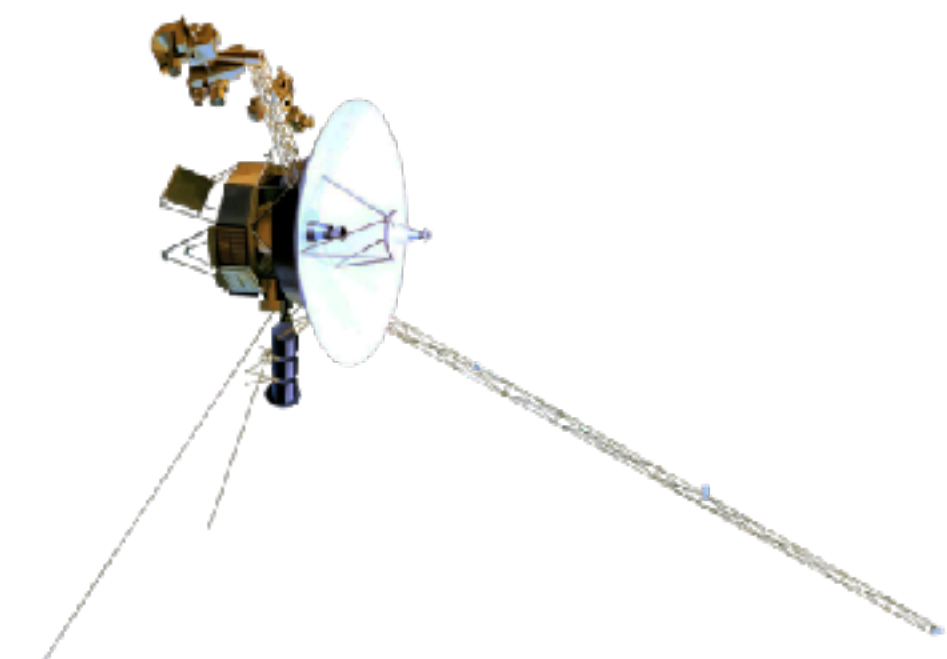
mas

$$\begin{aligned}\vec{p}_{1i}^2 &= (\vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f})^2 \\ &= \vec{p}_{1f}^2 + \vec{p}_{2f}^2 + 2\vec{p}_{1f} \cdot \vec{p}_{2f}\end{aligned}$$

logo

$$\vec{p}_{1f} \cdot \vec{p}_{2f} = 0$$

# Motivação: Voyager 2



- Caso 2  $m_2 \gg m_1$
- No referencial de repouso do corpo 2

$$\vec{p}_{1i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} \implies \vec{v}_{2f} = \frac{m_1}{m_2} (\vec{v}_{1i} - \vec{v}_{1f})$$

- a velocidade do corpo 2 é pequena.
- usando a conservação de energia cinética:

$$\begin{aligned} T_i = T_f &\implies \frac{m_1}{2} \vec{v}_{1i}^2 = \frac{m_1}{2} \vec{v}_{1f}^2 + \frac{m_2}{2} \vec{v}_{2f}^2 \\ &\implies \frac{m_1}{2} \vec{v}_{1i}^2 = \frac{m_1}{2} \vec{v}_{1f}^2 + \frac{m_1^2}{m_2} (\vec{v}_{1i} - \vec{v}_{1f})^2 \end{aligned}$$

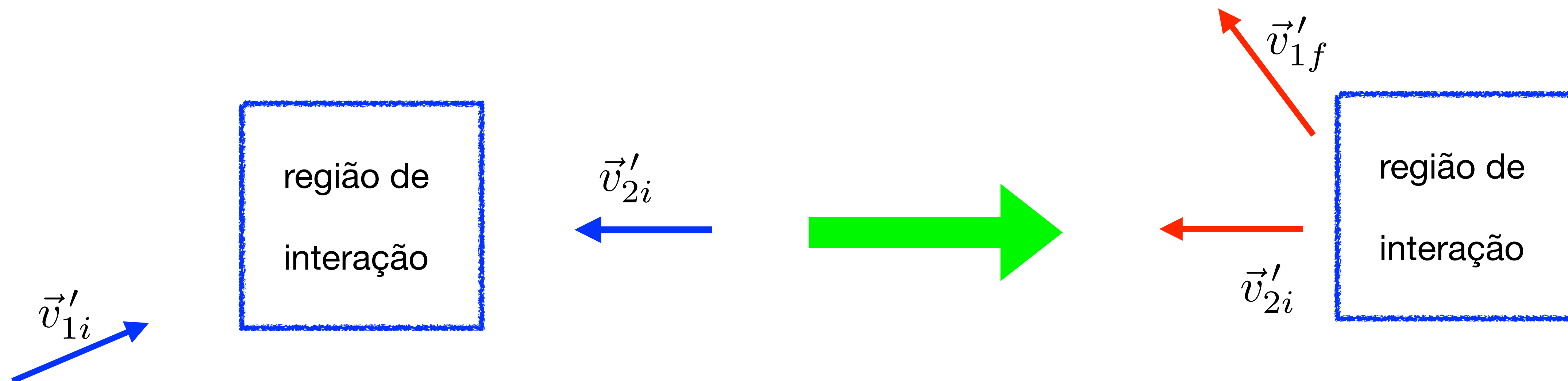
- logo é uma excelente aproximação que

$$|\vec{v}_{1i}| \simeq |\vec{v}_{1f}|$$

[white board:  
reflexão numa  
parede]

- Como fica num referencial em que o segundo corpo está em movimento?

- No referencial em que a velocidade inicial de 2 é



$$\vec{v}'_{1i} = \vec{v}_{1i} + \vec{v}'_{2i}$$

$$\vec{v}'_{1f} = \vec{v}_{1f} + \vec{v}'_{2i}$$



$$|\vec{v}'_{1i}|^2 = |\vec{v}_{1i}|^2 + |\vec{v}'_{2i}|^2 + 2\vec{v}_{1i} \cdot \vec{v}'_{2i}$$

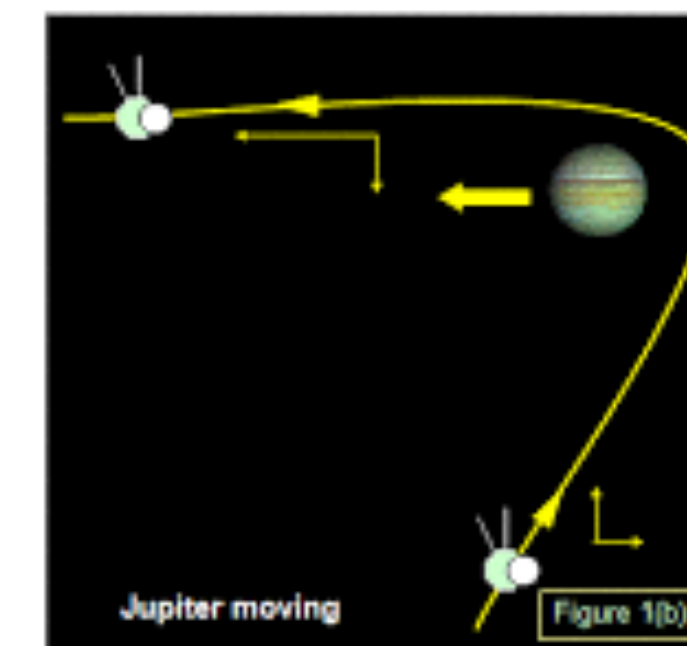
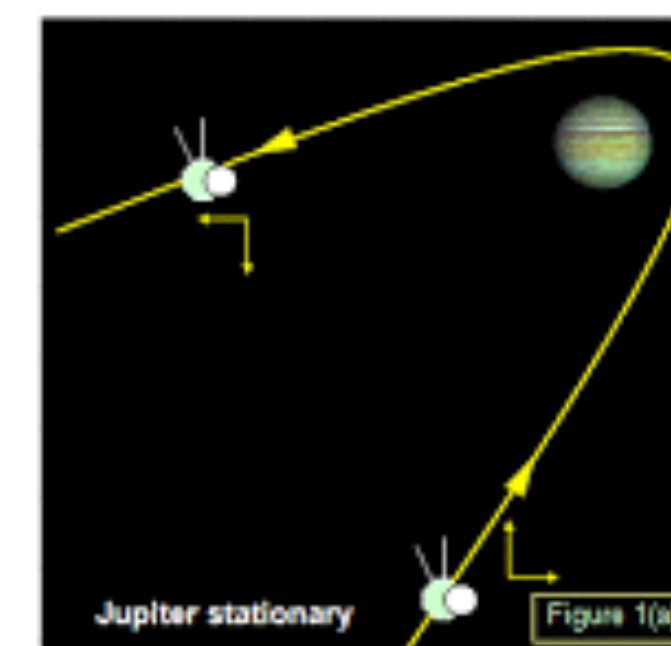
$$|\vec{v}'_{1f}|^2 = |\vec{v}_{1f}|^2 + |\vec{v}'_{2i}|^2 + 2\vec{v}_{1f} \cdot \vec{v}'_{2i}$$

se

$$\vec{v}_{1i} \cdot \vec{v}'_{2i} < 0$$

$$\vec{v}_{1f} \cdot \vec{v}'_{2i} > 0$$

há ganho de velocidade pelo corpo 1

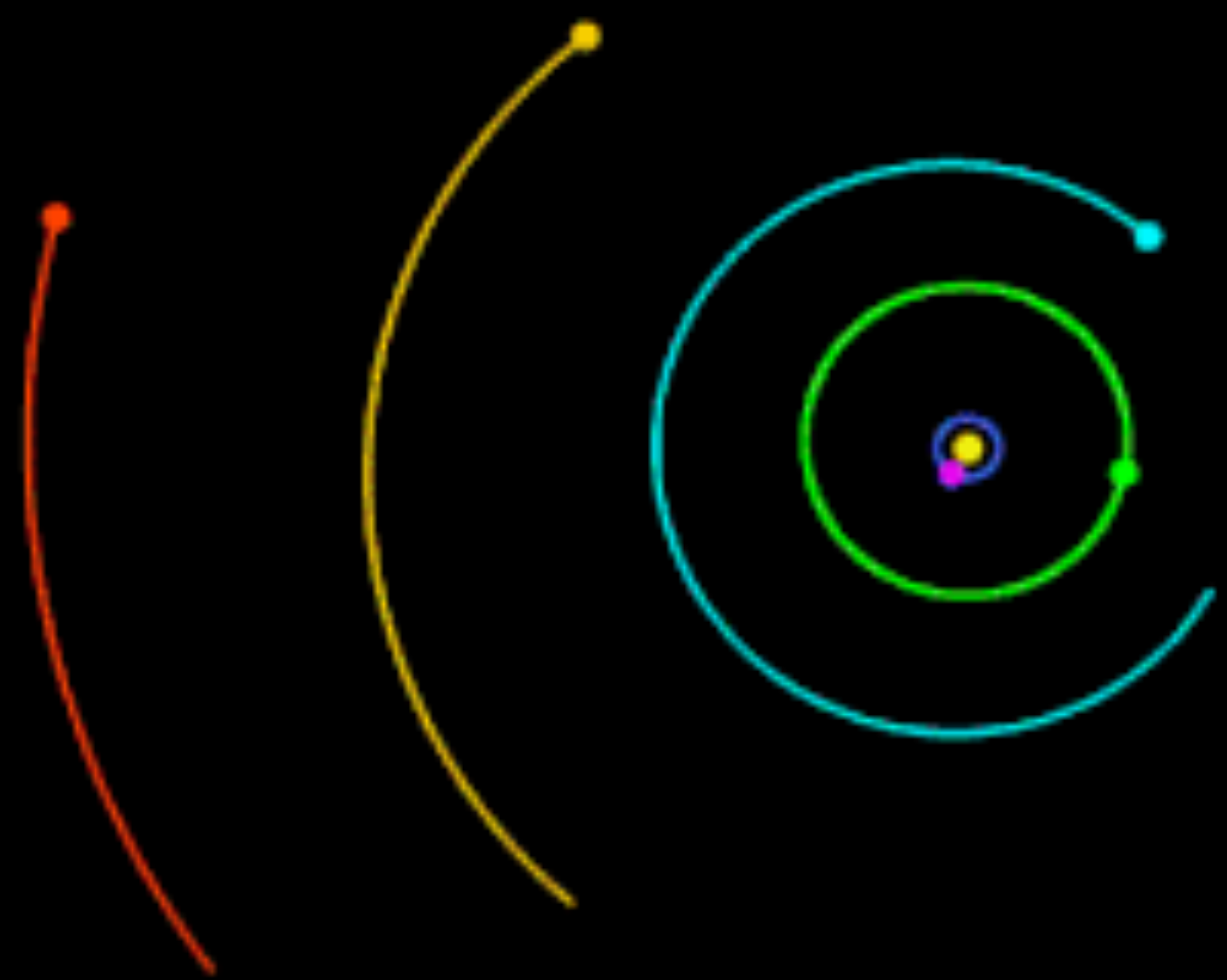


1977-08-20

Voyager 2

0.0km/s

4,487,373,409km

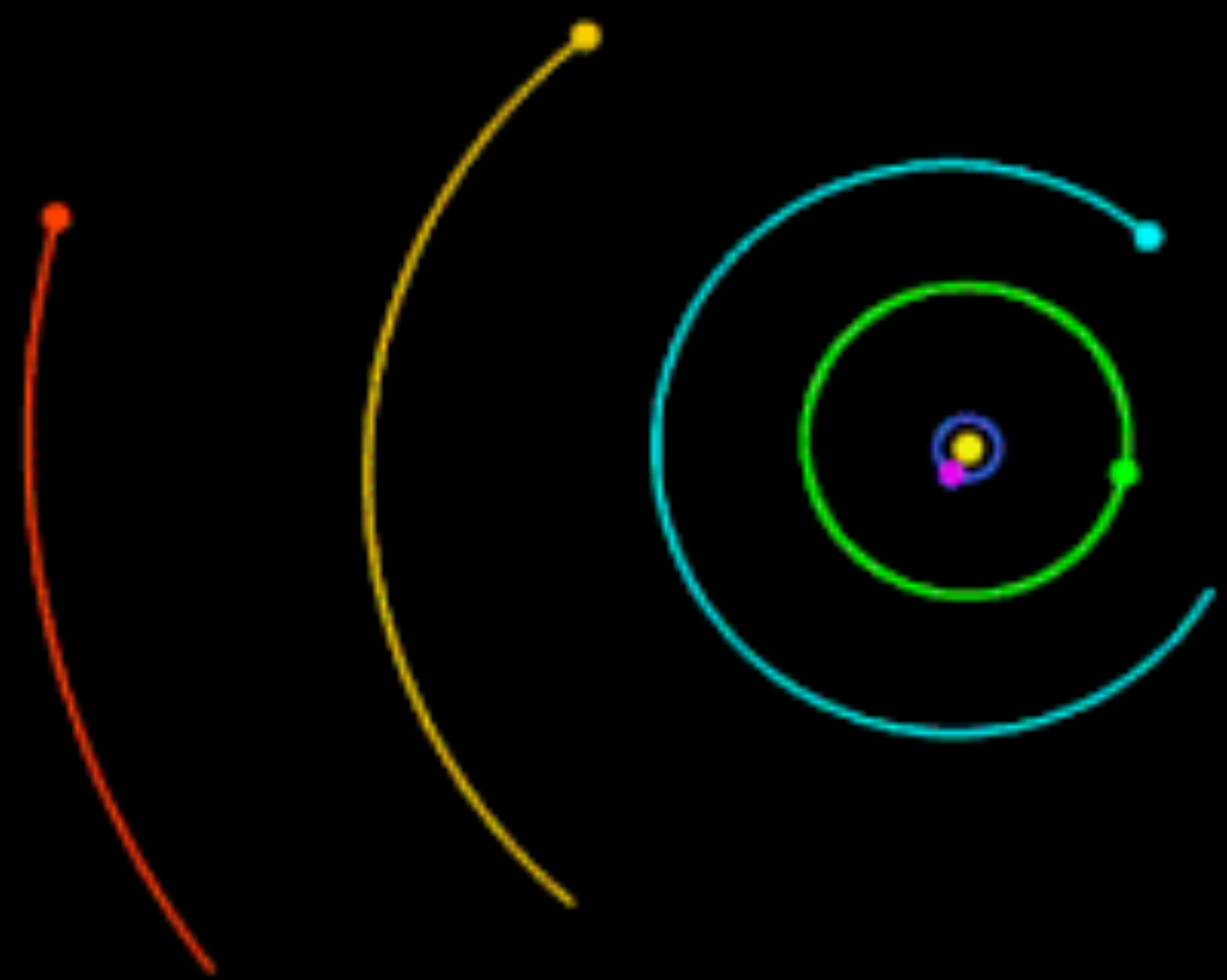


1977-08-20

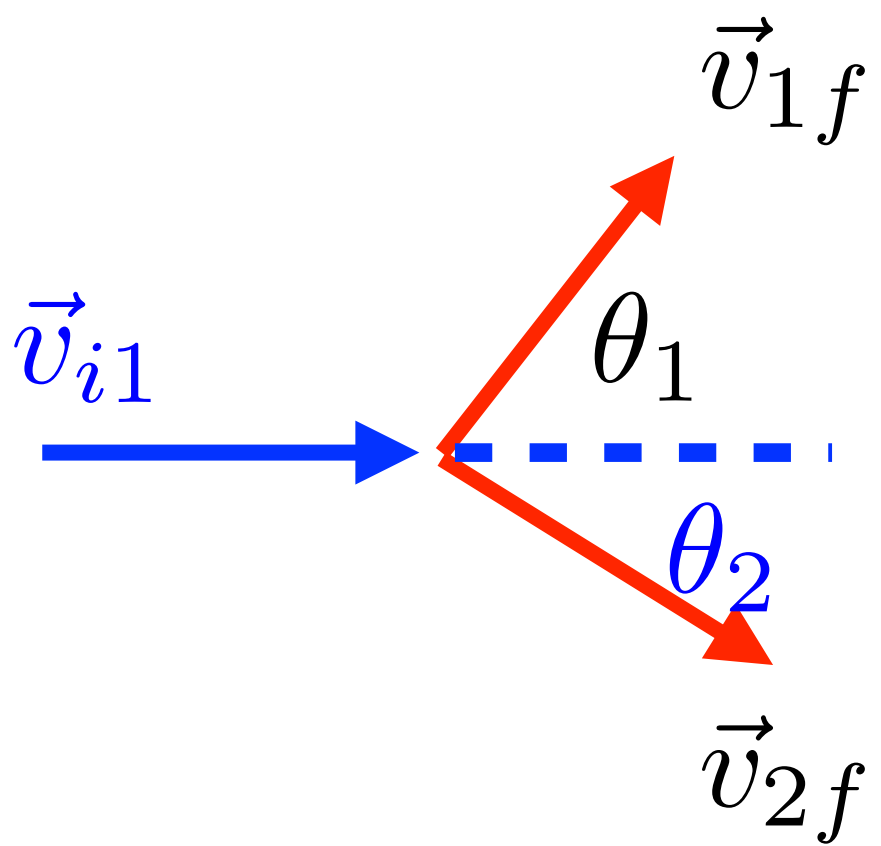
Voyager 2

0.0km/s

4,487,373,409km



- Caso geral com segundo corpo em repouso



$$\vec{p}_{1i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}$$

$$\frac{\vec{p}_{1i}^2}{2m_1} = \frac{\vec{p}_{1f}^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_{2f}^2}{2m_2} \implies$$

$$\vec{p}_{2f}^2 = \frac{m_2}{m_1} (\vec{p}_{1i}^2 - \vec{p}_{1f}^2)$$

$$= (\vec{p}_{1i} - \vec{p}_{1f})^2$$

$$= \vec{p}_{1i}^2 + \vec{p}_{1f}^2 - 2|\vec{p}_{1i}| |\vec{p}_{1f}| \cos \theta_1$$

escrevendo  $\lambda = m_2/m_1$  e  $p_{1X} = |\vec{p}_{1X}| \implies (1 + \lambda)p_{1f}^2 - 2p_{1i} \cos \theta_1 p_{1f} + (1 - \lambda)p_{1i}^2 = 0$

a condição para existir solução é  $4p_{1i}^2 \cos^2 \theta_1 - 4p_{1i}^2(1 - \lambda^2) \geq 0 \implies \sin^2 \theta_1 \geq \lambda^2$

I. Para  $m_2 > m_1 \implies \lambda > 1 \longrightarrow 0 \leq \theta_1 \leq \pi$

sempre há solução

II. Para  $m_2 < m_1 \implies \lambda < 1 \longrightarrow \sin \theta_1^{max} = \lambda$

há limites para o ângulo!

**Vejamos o caso do espalhamento Rutherford**



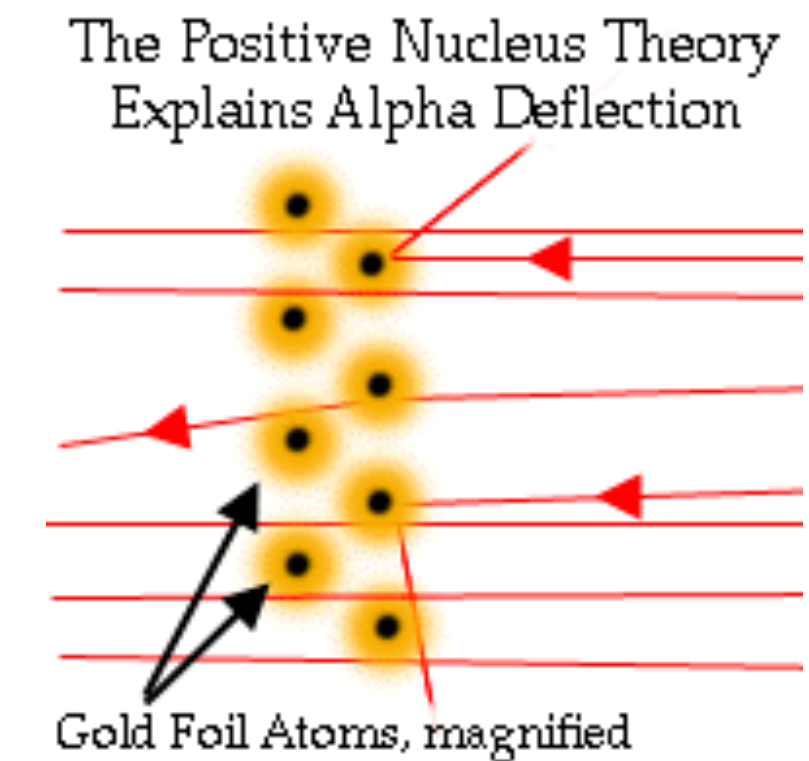
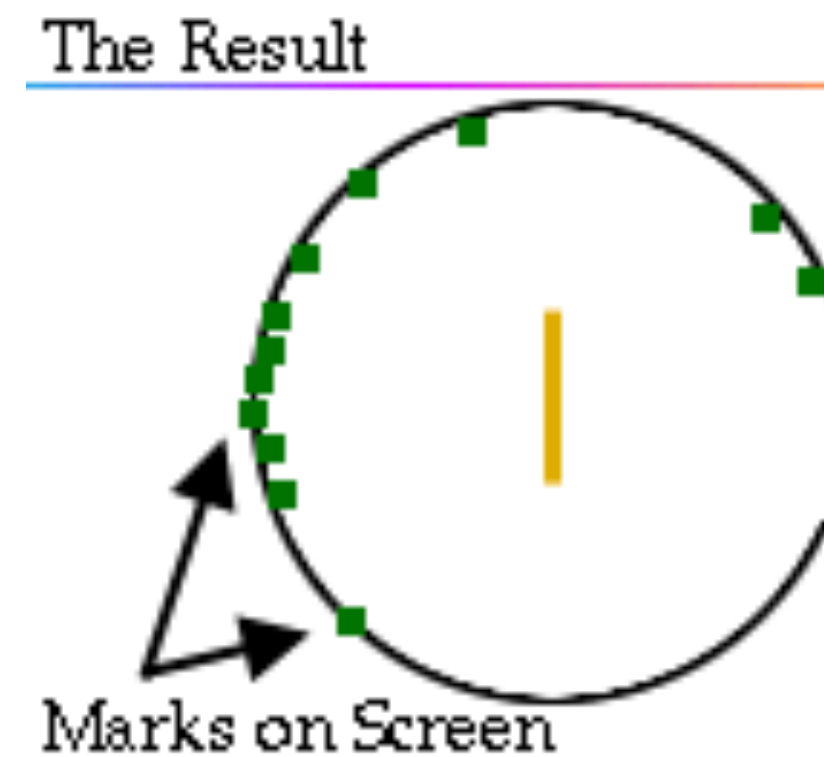
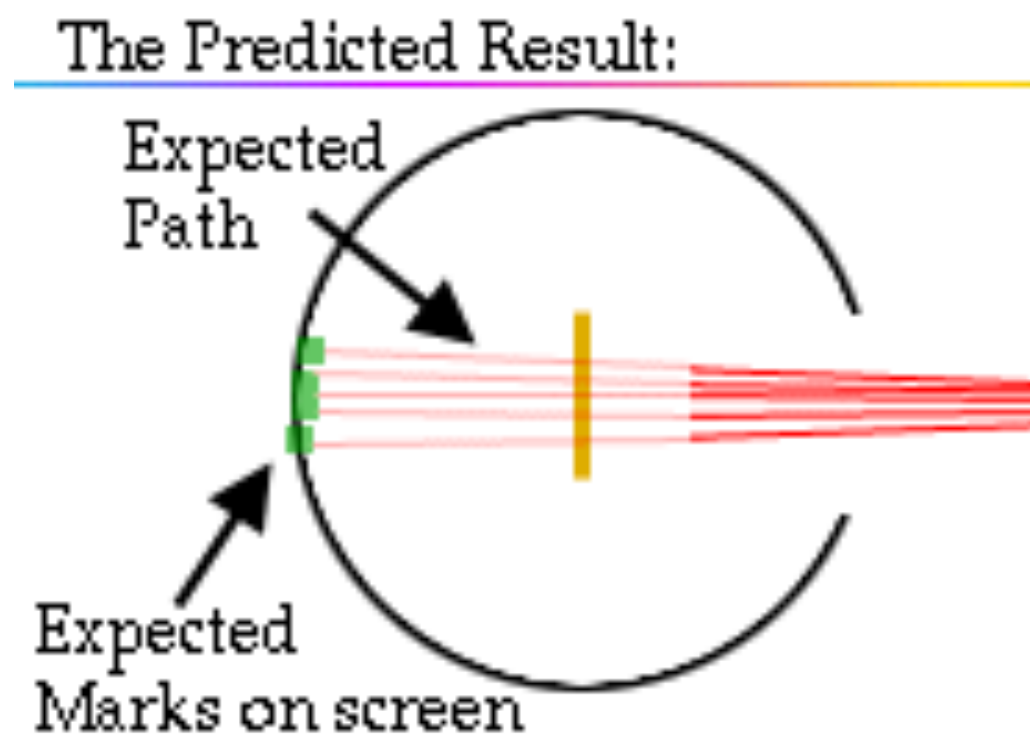
## Vejamos o caso do espalhamento Rutherford

I. Para  $m_2 > m_1 \implies \lambda > 1 \longrightarrow 0 \leq \theta_1 \leq \pi$

sempre há solução

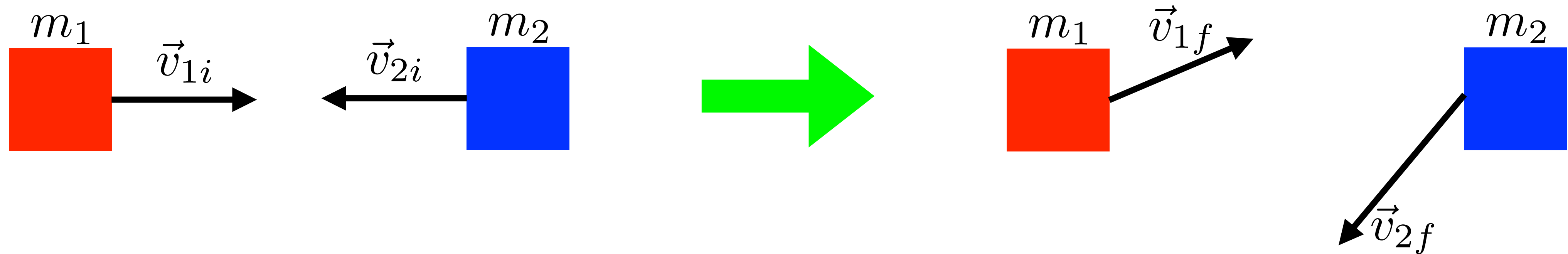
II. Para  $m_2 < m_1 \implies \lambda < 1 \longrightarrow \sin \theta_1^{max} = \lambda$

há limites para o ângulo!



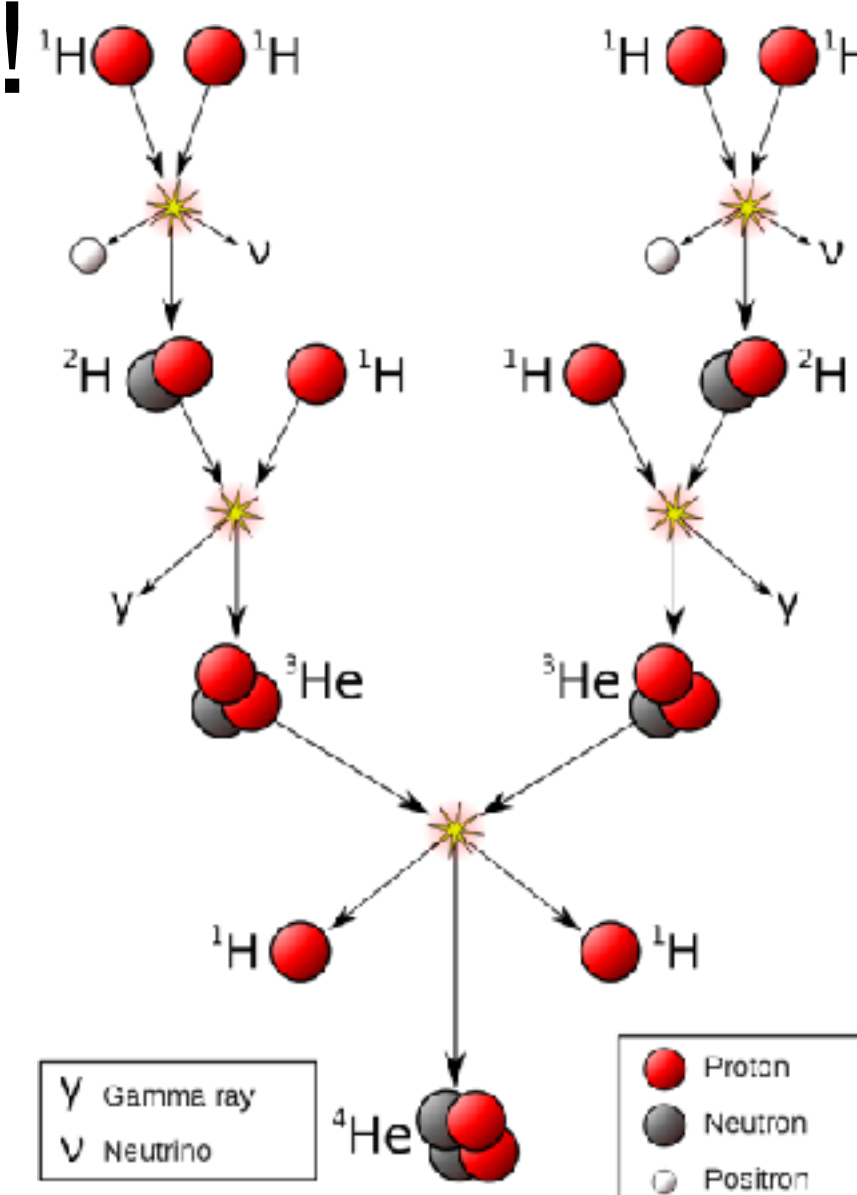
Núcleo de ouro reflete, elétrons não

### 3. Colisões inelásticas



- Caso extremo de um único corpo no estado final: nada novo! É unidimensional no CM!
- Inelasticidade pode ser devida:
  1. Perda de energia cinética (eg, para calor)
  2. Partículas diferentes no estado final!

Exemplo: 1-colisão de dois carros



• Vimos que  $T_S = \frac{1}{2} \sum_j m_j \vec{v}_j^2 = T_{CM} + \frac{1}{2} M \vec{v}_{CM}^2$

logo se M é constante diferenças de energia cinética independem do referencial

$$T_{f,S} - T_{i,S} = T_{f,CM} + \frac{1}{2} M \vec{v}_{CM}^2 - T_{i,CM} - \frac{1}{2} M \vec{v}_{CM}^2 = T_{f,CM} - T_{i,CM}$$

OK no limite não relativístico

• Definimos  $Q \equiv T_{f,S} - T_{i,S}$

$Q < 0 \implies$  aumento da energia interna (endoergica)

$Q > 0 \implies$  diminuição da energia interna (exoergica)

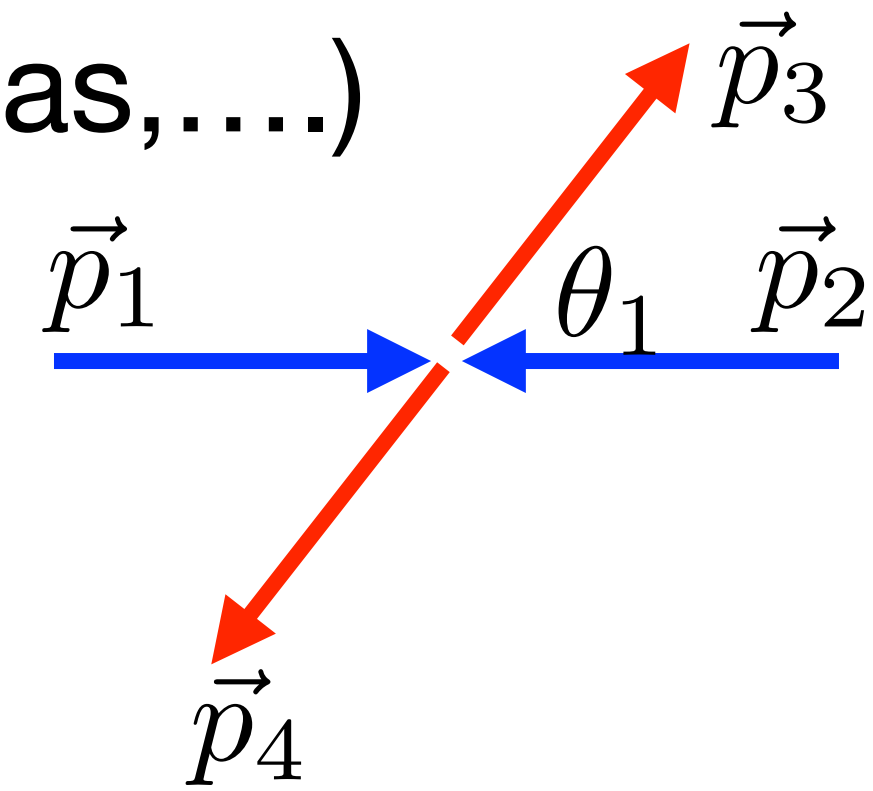
- No caso “geral”  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$  temos que

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4$$

$$\frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} + Q = \frac{\vec{p}_3^2}{2m_3} + \frac{\vec{p}_4^2}{2m_4}$$

- Novamente temos 3 equações e 4 incógnitas
- Além disso não conhecemos Q!

- Precisamos de 2 informações adicionais (eg medidas, conhecer as forças,...)



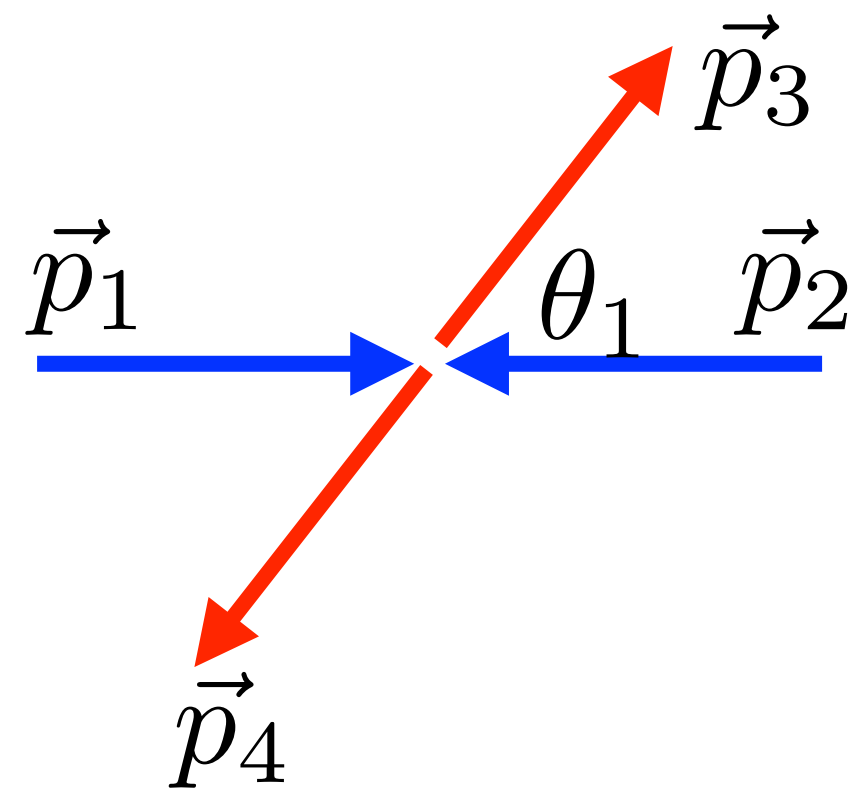
- No referencial do CM

$$|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = p_i$$

$$|\vec{p}_3| = |\vec{p}_4| = p_f$$

$$\frac{p_i^2}{2m_1} + \frac{p_i^2}{2m_2} + Q = \frac{p_f^2}{2m_3} + \frac{p_f^2}{2m_4} \implies \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) p_i^2 + Q = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4} \right) p_f^2$$

- Exemplo 1: processo de um tiro (cápsula + bala no estado final) com  $Q$  conhecido



$$p_i = 0$$

$$Q = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4} \right) p_f^2$$

definindo

$$\frac{1}{\mu_f} = \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4}$$

temos

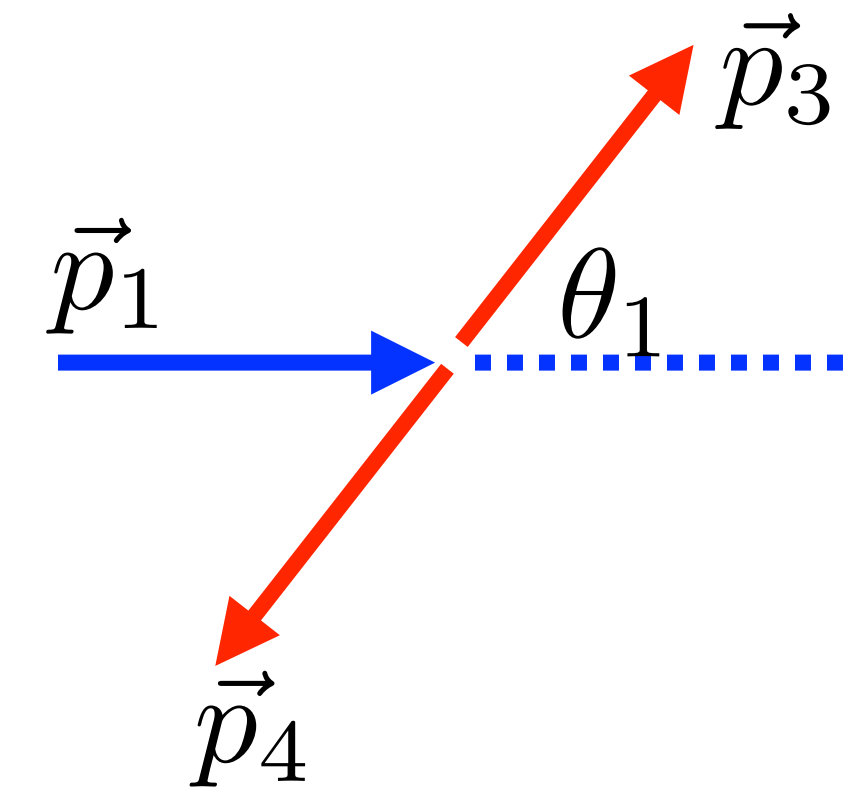
$$p_f = \sqrt{2\mu_f Q}$$

• Exemplo 2  ${}^2H + {}^2H \rightarrow p + {}^3H$

• Referencial de repouso do corpo 2

• Podemos obter Q sabendo a energia cinética do próton final e seu ângulo

$$\vec{p}_4 = \vec{p}_1 - \vec{p}_3 \implies p_4^2 = (\vec{p}_1 - \vec{p}_3)^2 = p_1^2 + p_3^2 + 2p_1p_3 \cos \theta_1$$



logo

$$\begin{aligned} T_4 &= \frac{m_1}{m_4} T_1 + \frac{m_3}{m_4} T_3 - 2 \frac{\sqrt{m_1 m_3 T_1 T_3}}{m_4} \cos \theta_1 \\ &= T_1 - T_3 + Q \end{aligned}$$

após álgebra temos que

$$Q = \left(1 + \frac{m_3}{m_4}\right) T_3 - \left(1 - \frac{m_1}{m_4} T_1\right) - 2 \frac{\sqrt{m_1 m_3 T_1 T_3}}{m_4} \cos \theta_1$$

# Referências

- 1. Moisés volume 1 capítulo 9**
- 2. Alonso e Finn volume 1 capítulo 9**