Dinâmica de muitos corpos

terceira aula

1. Energia de um sistema de partículas
2. Colisões
3. Colisões unidimensionais

Oscar Éboli **22 de abril de 2020**

0. Recordação

- Centro de massa de um sistema

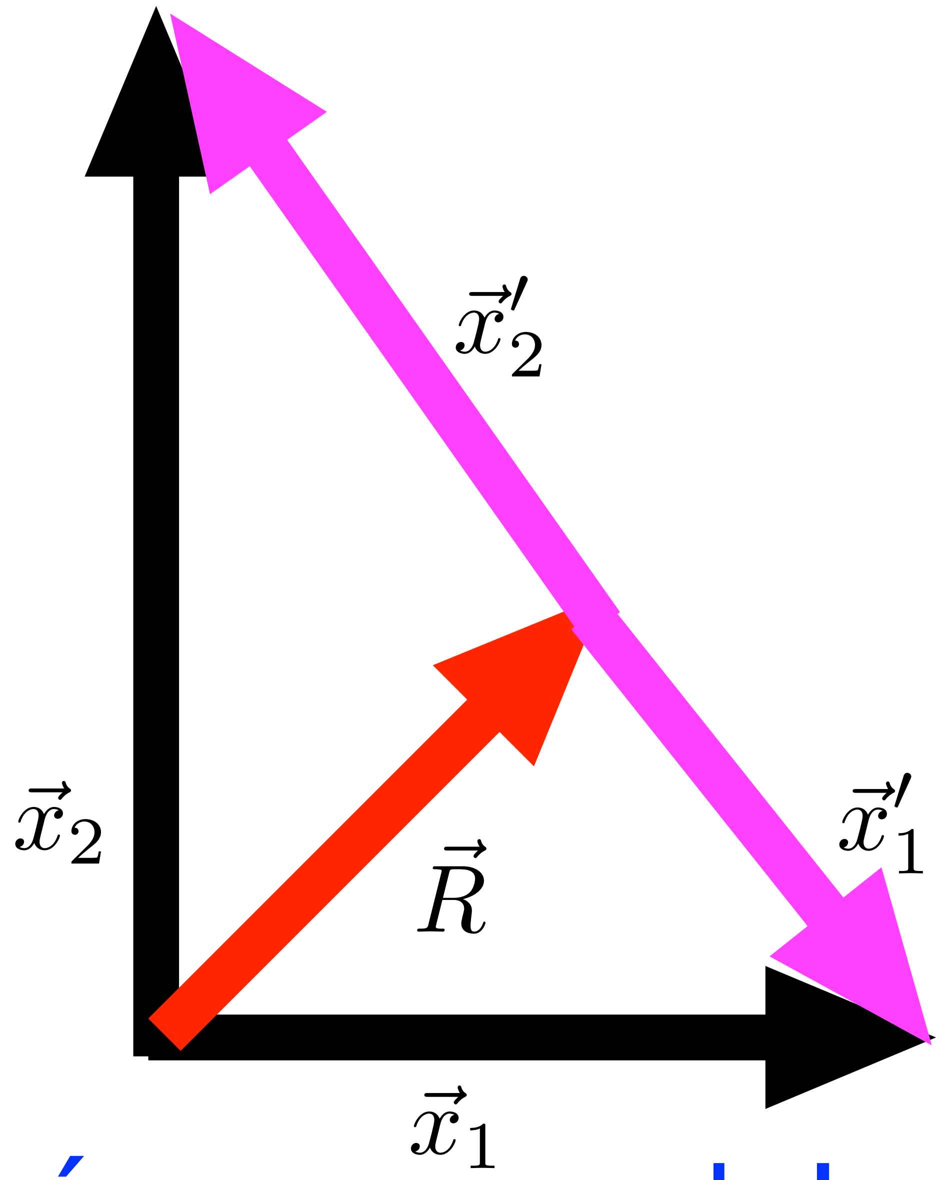
posição de cada partícula

$$\vec{R} \equiv \frac{\sum_k m_k \vec{x}_k}{M} \qquad M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \sum_k \vec{F}_k^{ext} = \vec{F}_{total}^{ext}$$

massa total

- Coordenada relativas

$$\vec{x}'_j = \vec{x}_j - \vec{R}$$



- Em um sistema, cuja força externa total é nula, o momento linear total é conservado!

$$\frac{d}{dt}\left(M\vec{v}_{CM}\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{P}_{CM}\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_j \vec{p}_j\right) = 0$$

- Na ausência de forças externas todos os pontos são equivalentes
- Existe uma simetria: experimentos podem ser transladados e dão o mesmo resultado
- Teorema geral (Noether): simetrias (contínuas) implicam em leis de conservação.

    1. Translação espacial está associada à conservação de momento linear
    2. Translação temporal está associada à conservação de energia
    3. Rotação está associada à conservação de momento angular

1. Energia de um sistema de partículas

- Vimos que a energia cinética (T) de um sistema é

$$T_S = \frac{1}{2}\sum_j m_j \vec{v}_j^2 = T_{CM} + \frac{1}{2}M\vec{v}_{CM}^2$$

- Consideremos um sistema cujas interações são através de forças conservativas cujas energias potenciais são

$$U_{ext}(\vec{x}_j) \implies \vec{F}_j^{ext}(\vec{x}_j) = -\nabla_{\vec{x}_j} U_{ext}(\vec{x}_j)$$

$$U_{int}(\vec{x}_j, \vec{x}_k) \implies \vec{F}_{jk}(\vec{x}_j, \vec{x}_k) = -\nabla_{\vec{x}_j} U_{int}(\vec{x}_j, \vec{x}_k)$$

- A energia potencial total do sistema chamamos de $E_{pot}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N)$

- Por exemplo para montar um sistema a energia necessária é

$$
\begin{aligned}
N = 1 \quad &\Longrightarrow \quad E_{pot}(\vec{x}_1) = U_{ext}(\vec{x}_1) \\
N = 2 \quad &\Longrightarrow \quad E_{pot}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = U_{ext}(\vec{x}_1) + U_{ext}(\vec{x}_2) + U_{int}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \\
N = 3 \quad &\Longrightarrow \quad E_{pot}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) = U_{ext}(\vec{x}_1) + U_{ext}(\vec{x}_2) + U_{ext}(\vec{x}_3) + U_{int}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) + +U_{int}(\vec{x}_1, \vec{x}_3) + U_{int}(\vec{x}_2, \vec{x}_3)
\end{aligned}
$$

- Desafio: mostre que no caso geral a expressão pode ser escrita como

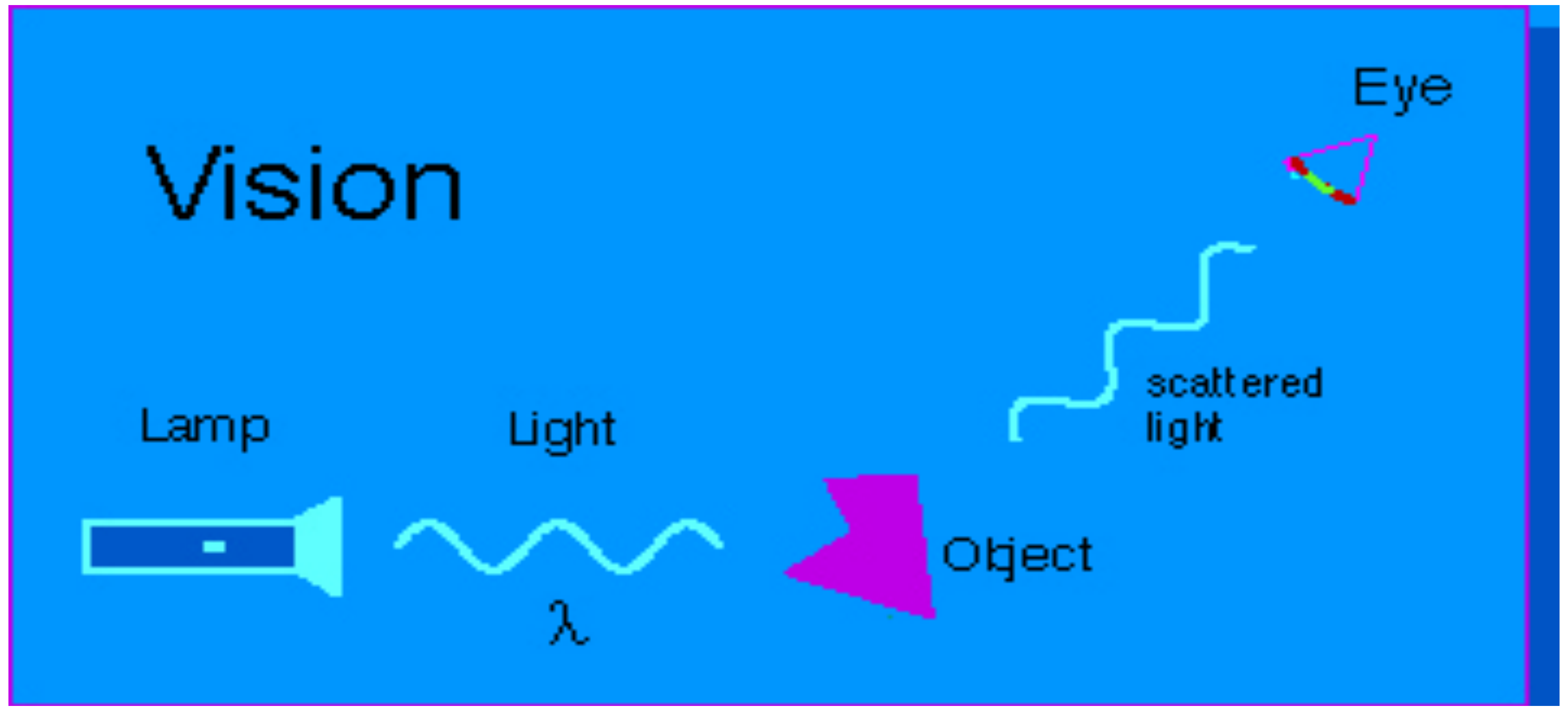
$$E_{pot}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_3) = \sum_{j=1}^{N} U_{ext}(\vec{x}_j) + \sum_{j=1}^{N} \sum_{j>k} U_{int}(\vec{x}_j, \vec{x}_k)$$

- A energia total do sistema é $E_{total} = T_S + E_{pot}$

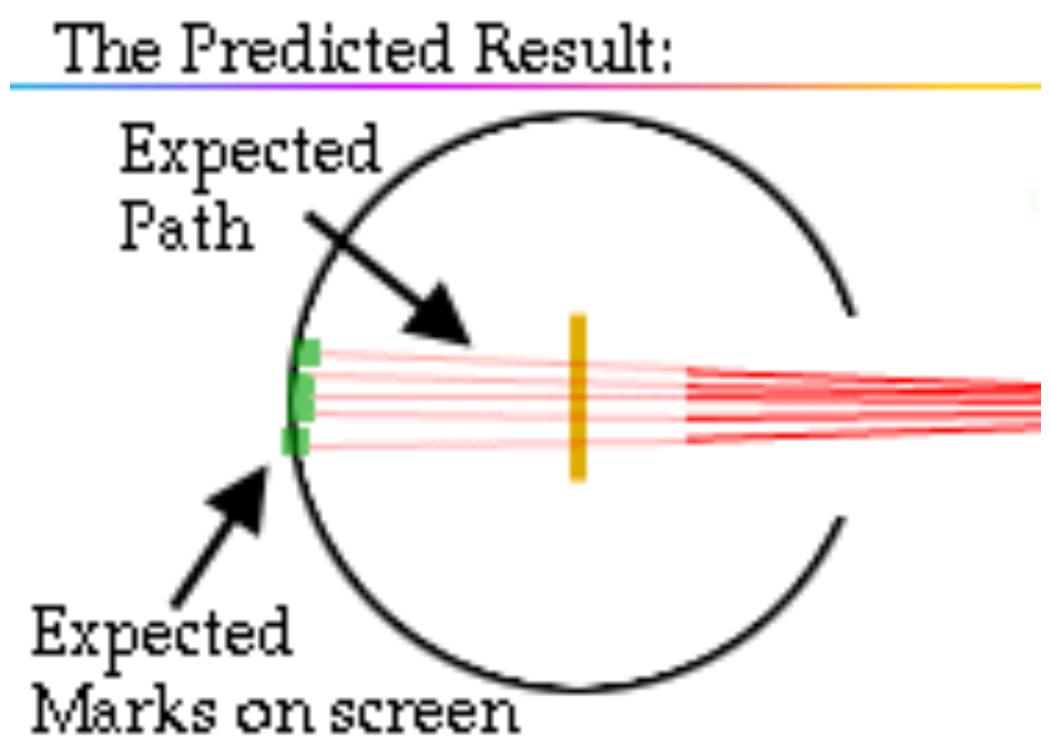
2. Colisões

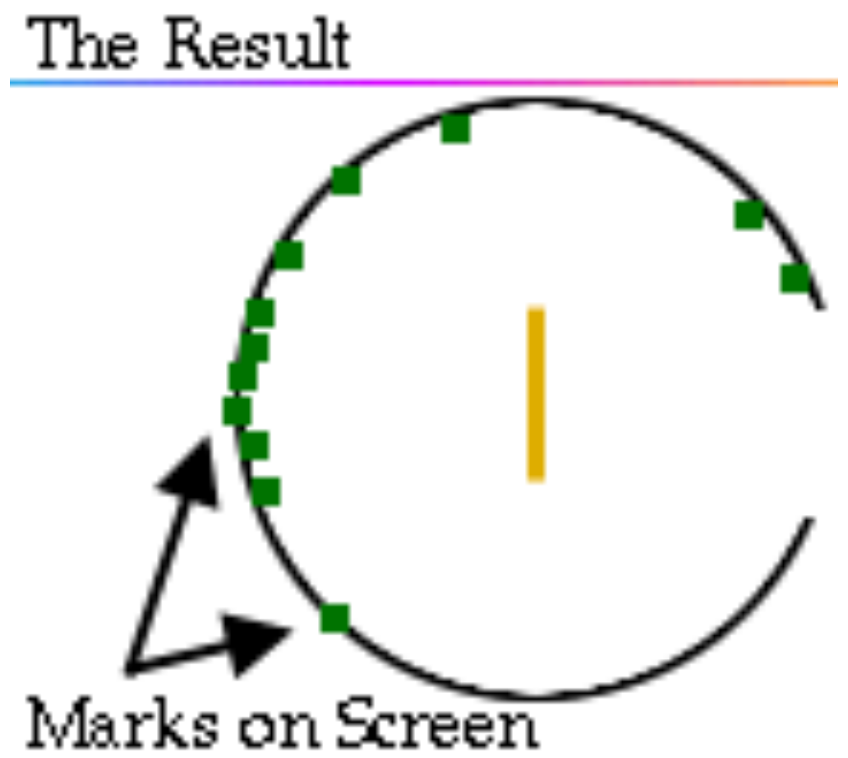
- Colisões são processos muito comuns:

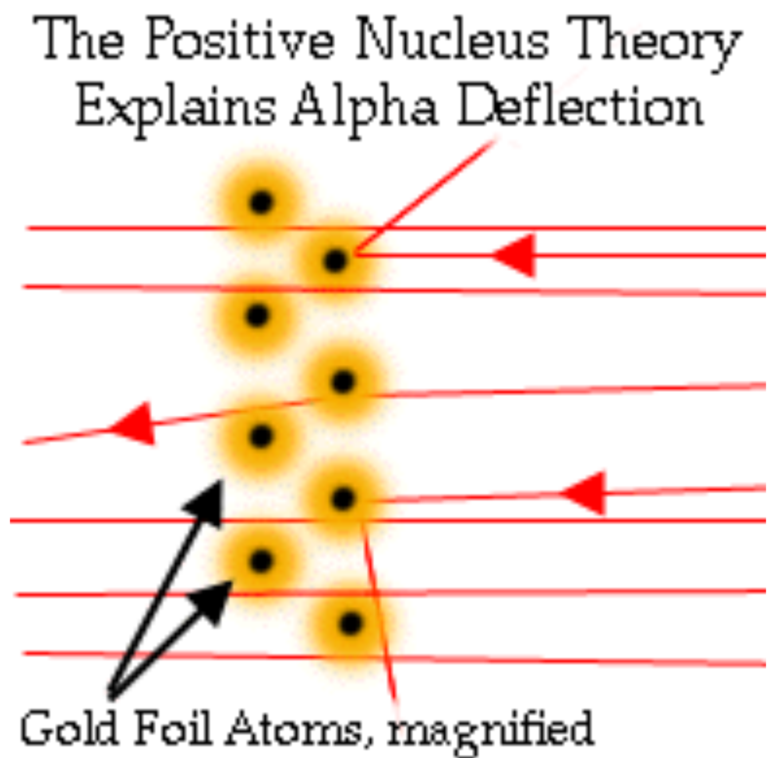
    1. Vemos objetos usando a luz espalhada



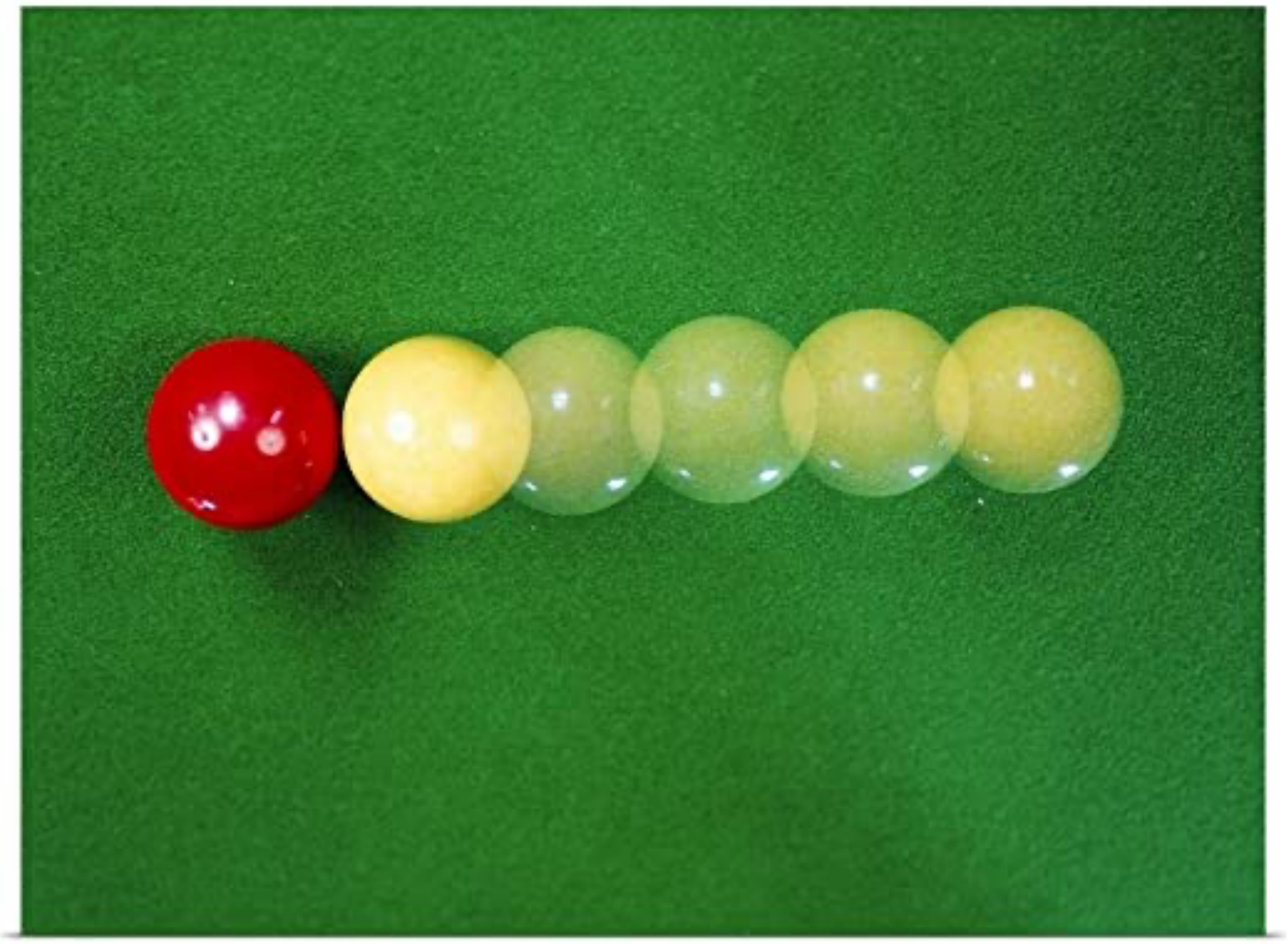
    2. O estudo da estrutura da matéria, eg a descoberta do núcleo atômico

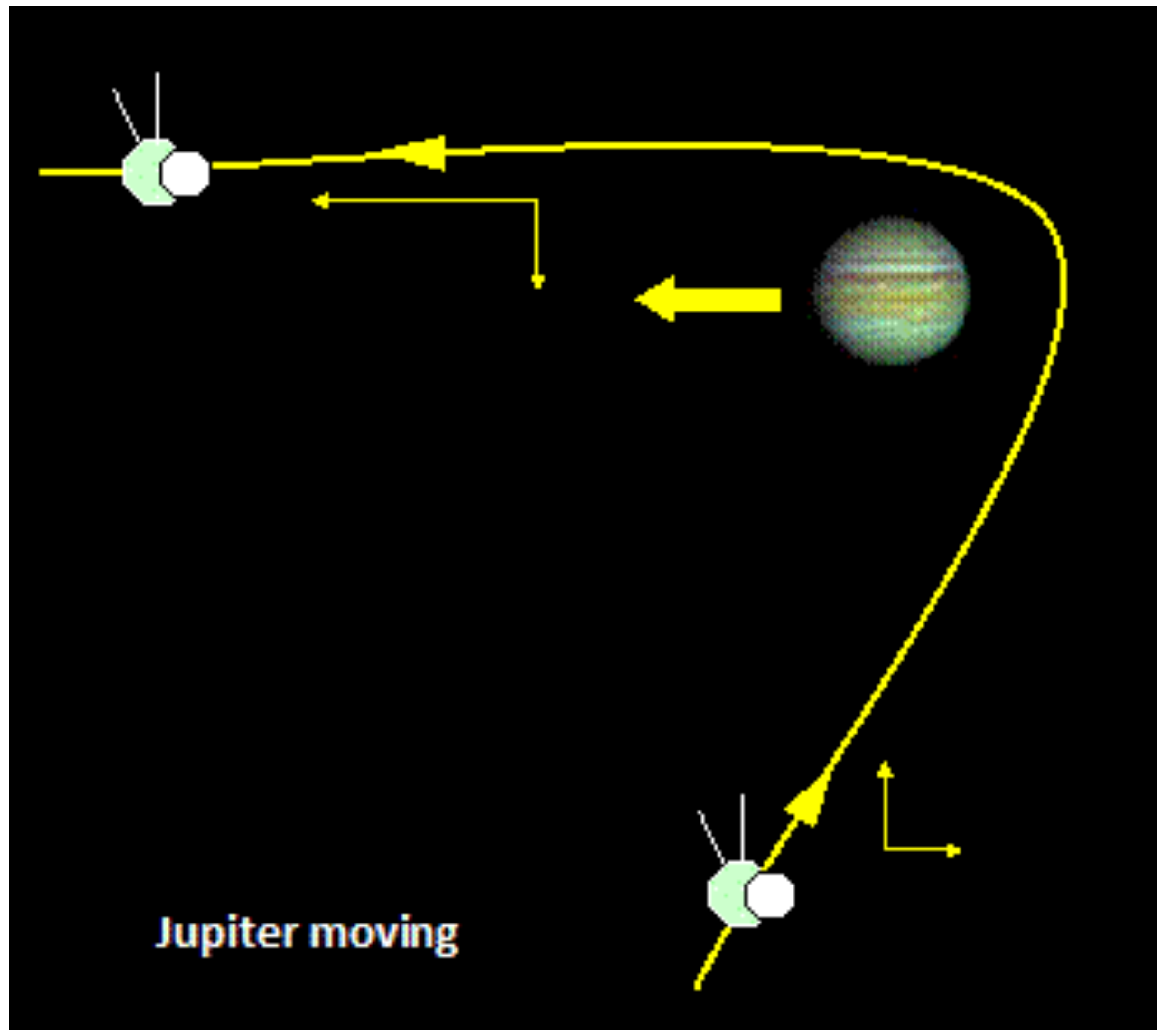


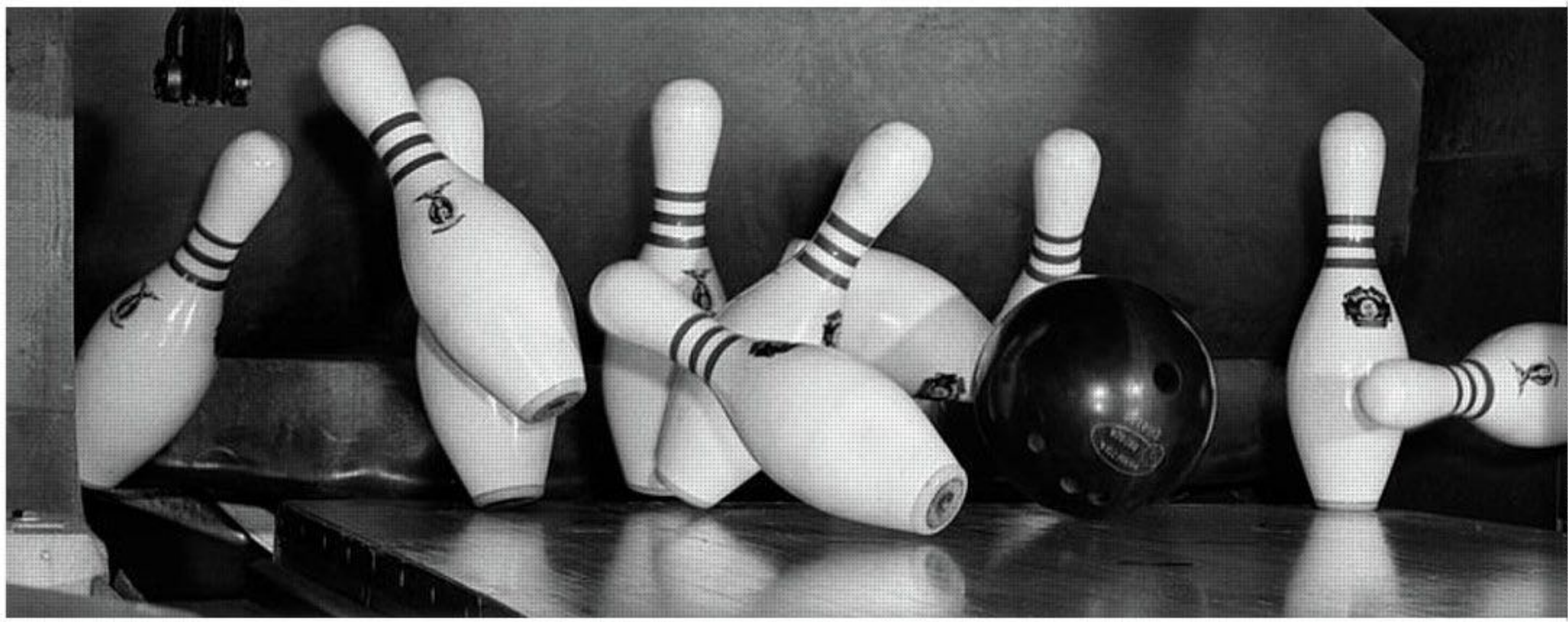




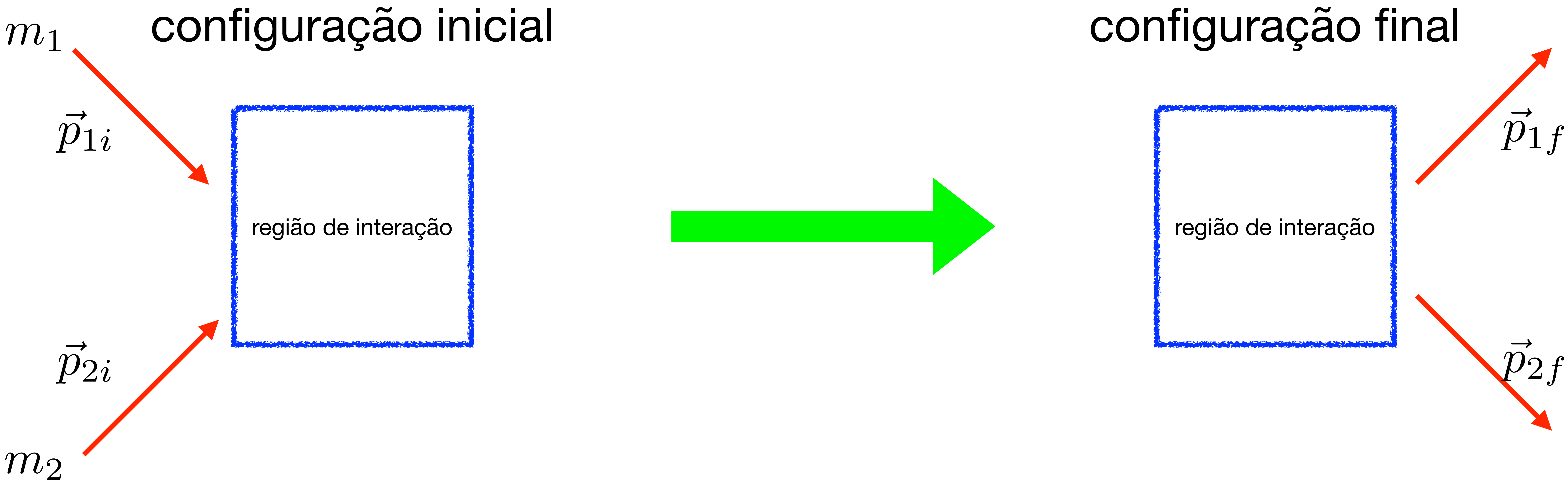
3. Colisões são frequentes em mecânica clássica







- Fases de uma colisão



- Tipos de colisão:

1. A colisão é dita elástica se conserva energia cinética

2. A colisão é ineslástica se não conserva energia cinética

3. Impulso de uma força

- Avaliamos o efeito de uma força entre dois instante de tempo pelo IMPULSO:

$$\int_{t_i}^{t_f} dt\ \vec{F} = \int_{t_i}^{t_f} dt\ \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{p}_f - \vec{p}_i \equiv \Delta\vec{p}$$

- Durante uma colisão as forças são intensas durante o contato

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

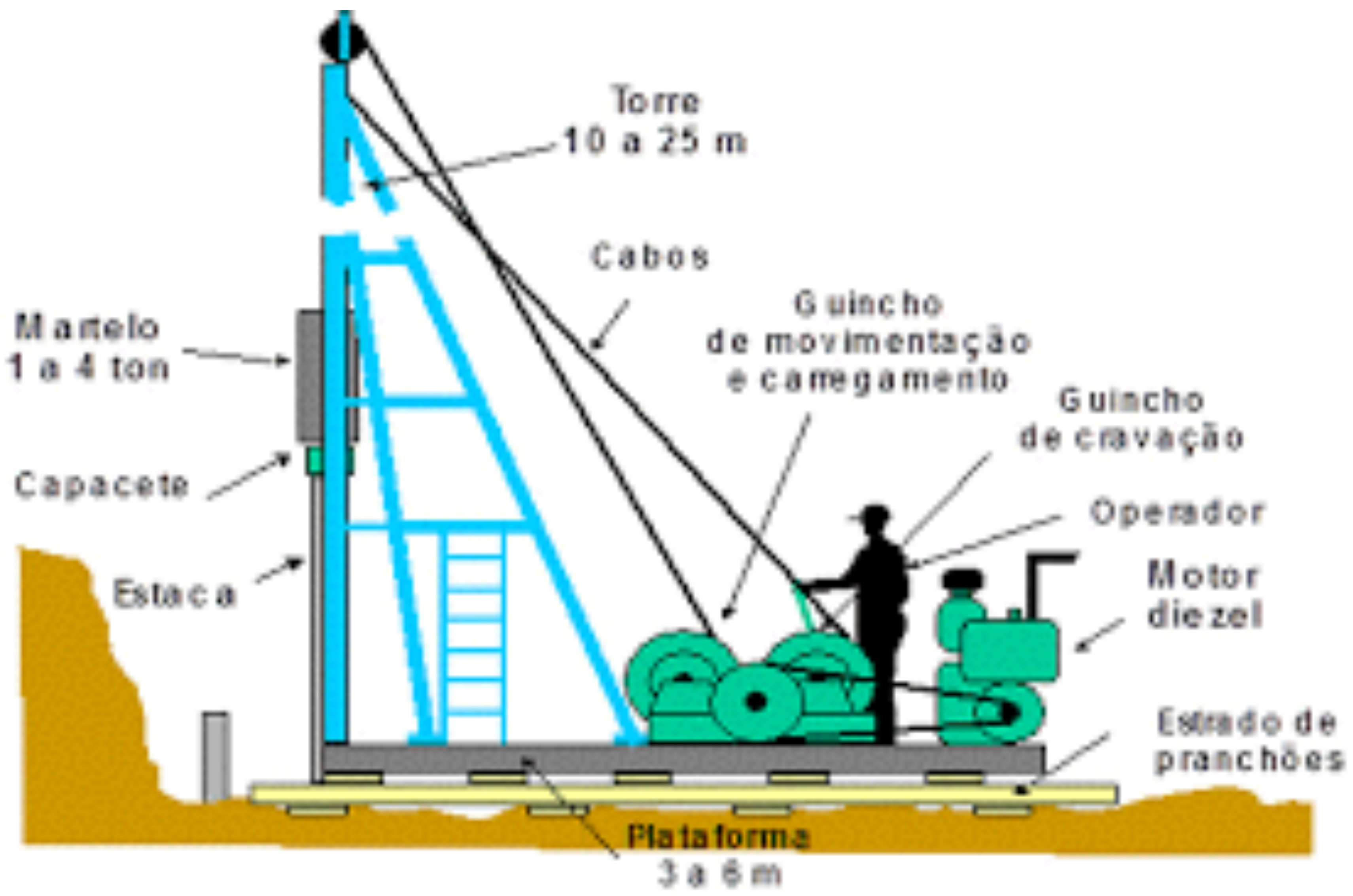
- Integrando no intervalo de tempo do contato

$$\Delta\vec{p}_1 = \Delta\vec{p}_2 \implies \vec{p}_{1f} - \vec{p}_{1i} = -(\vec{p}_{2f} - \vec{p}_{2i}) \implies \vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}$$

como já sabíamos para um sistema isolado!

- Mas isso é uma excelente aproximação na presença de forças externas se as forças de contato são muito maiores!

Exemplo: bate estaca



$$m_{martelo} = 10^3 \text{ kg}$$
$$h_{queda} = 10 \text{ m}$$

O impulso da força de contato para o martelo

$$\left| \int_0^{\Delta t} dt \ \vec{F} \right| = m \times \sqrt{2gh} = |\vec{F}| \Delta t$$

força constante

- Se $\quad \Delta t = 0,1 \text{ s} \quad \Longrightarrow \quad |\vec{F}| = \dfrac{m\sqrt{2gh}}{\Delta t} \simeq 1,4 \times 10^6 \text{ N}$

isso equivale ao peso de 140 toneladas!

4. Colisões Unidimensionais

a situação inicial é

$$v_{1i} > v_{2i}$$

enquanto a final é

- a conservação de momento implica que

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

temos 2 incógnitas e 1 equação. Precisamos de mais informação (sobre energia cinética)

Colisões elásticas : $$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \quad (1)$$

também temos $$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{m_1}\left[(m_1\ v_{1i})^2 - (m_1\ v_{1f})^2\right] = \frac{1}{m_2}\left[(m_2\ v_{2f})^2 - (m_2\ v_{2i})^2\right]$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{m_1}\left[m_1\ v_{1i} - m_1\ v_{1f}\right]\left[m_1\ v_{1i} + m_1\ v_{1f}\right] = \frac{1}{m_2}\left[m_2\ v_{2f} - m_2\ v_{2i}\right]\left[m_2\ v_{2f} + m_2\ v_{2i}\right]$$

$$\Longrightarrow^{(1)} \quad \frac{1}{m_1}\left[m_1\ v_{1i} + m_1\ v_{1f}\right] = \frac{1}{m_2}\left[m_2\ v_{2f} + m_2\ v_{2i}\right]$$

$$\Longrightarrow \quad v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f}) \quad (2)$$

a velocidade relativa entre 1 e 2 troca de sinal

- Agora temos 2 equações e duas incógnitas. Resolvendo (1) + (2)

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

- As equações originais eram simétricas por 1<-> 2 e a solução também

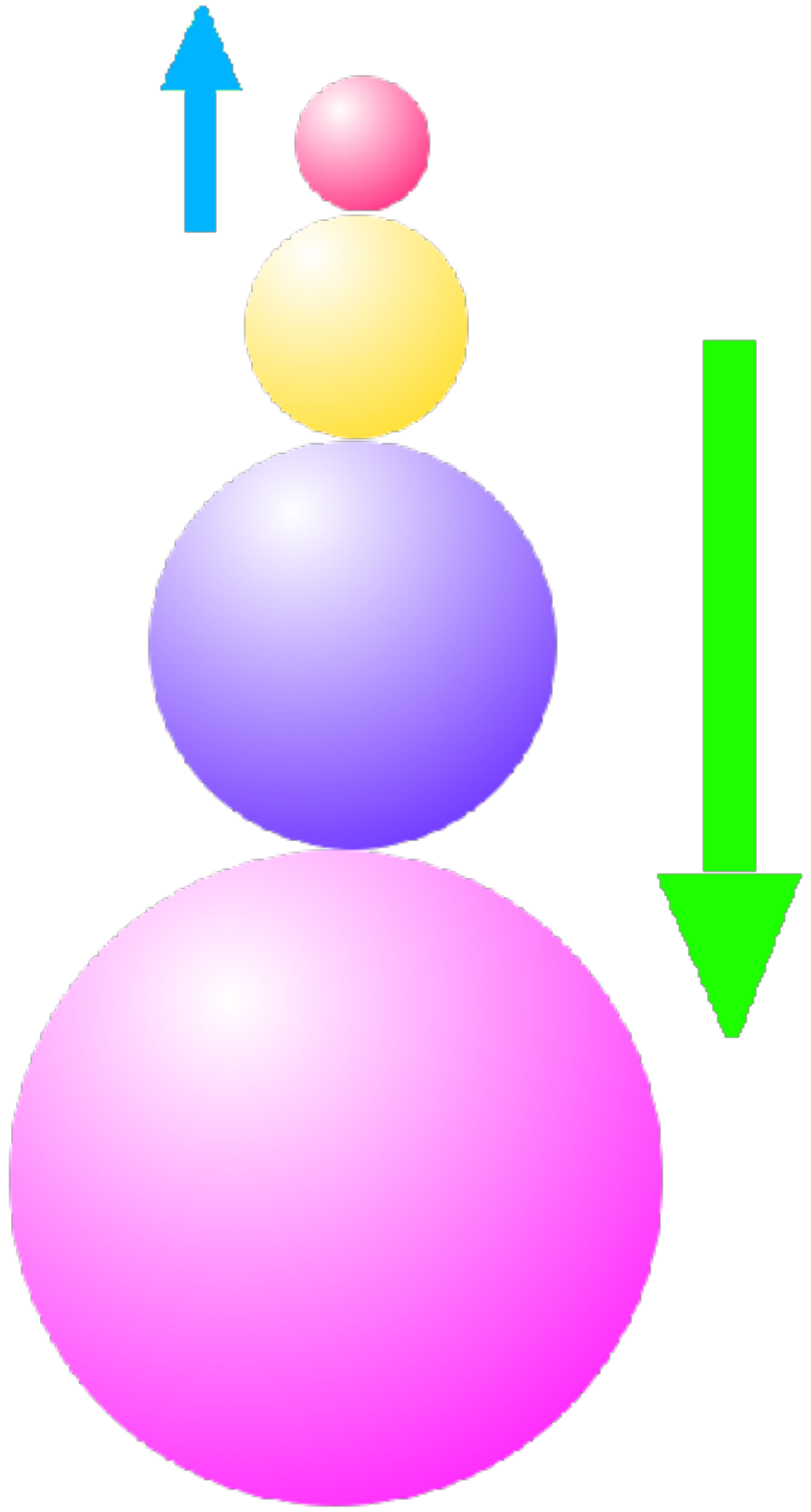
- Casos:

1. Massas iguais: $v_{1f} = v_{2i} \quad \text{e} \quad v_{2f} = v_{1i}$ (pense no referencial do CM)
   https://www.youtube.com/watch?v=51IFubnEAsU
2. Alvo parado: $(v_{2i} = 0)$

   2.1 $m_2 >> m_1 \implies v_{1f} \simeq -v_{1i} \quad \text{e} \quad v_{2f} \simeq 2\frac{m_1}{m_2} v_{1i}$

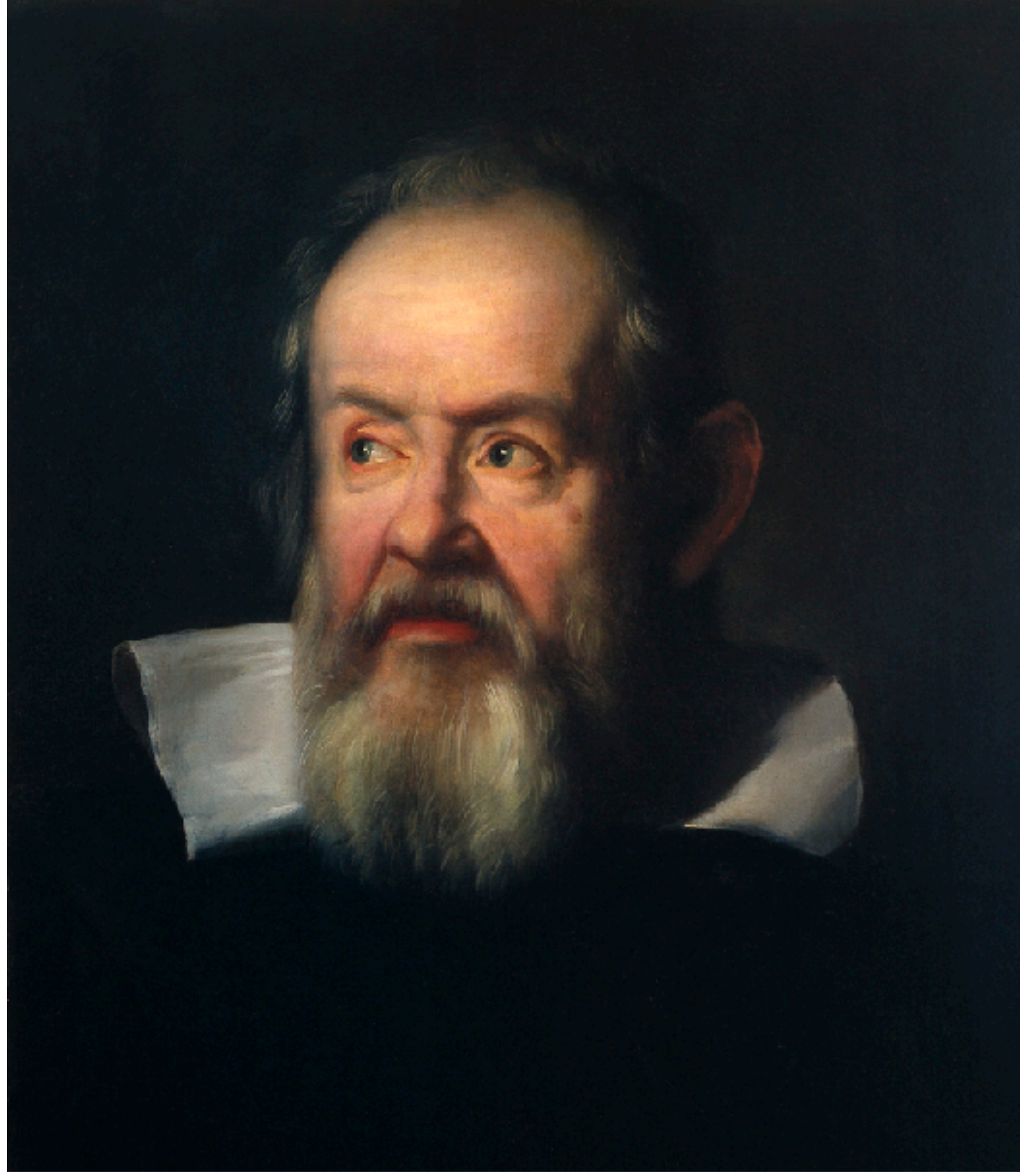
   2.2 $m_1 >> m_2 \implies v_{1f} \simeq v_{1i} \quad \text{e} \quad v_{2f} \simeq 2v_{1i}$ (pense no referencial do CM)

• Exemplo 1: canhão de Galileu

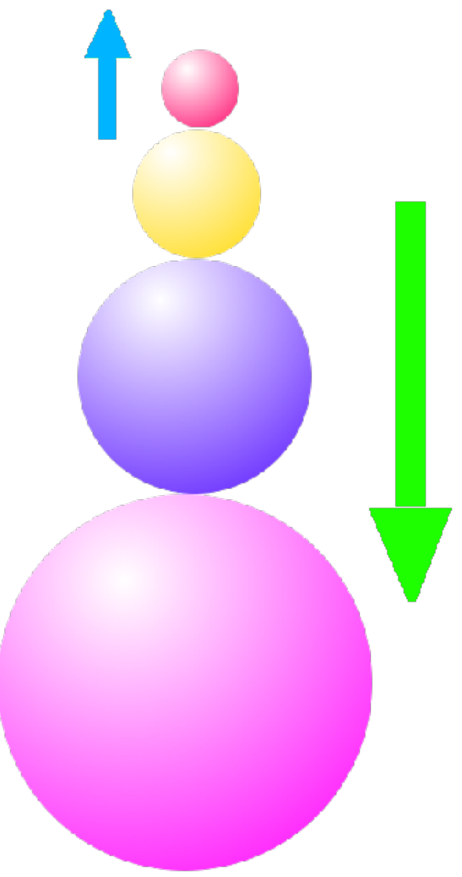


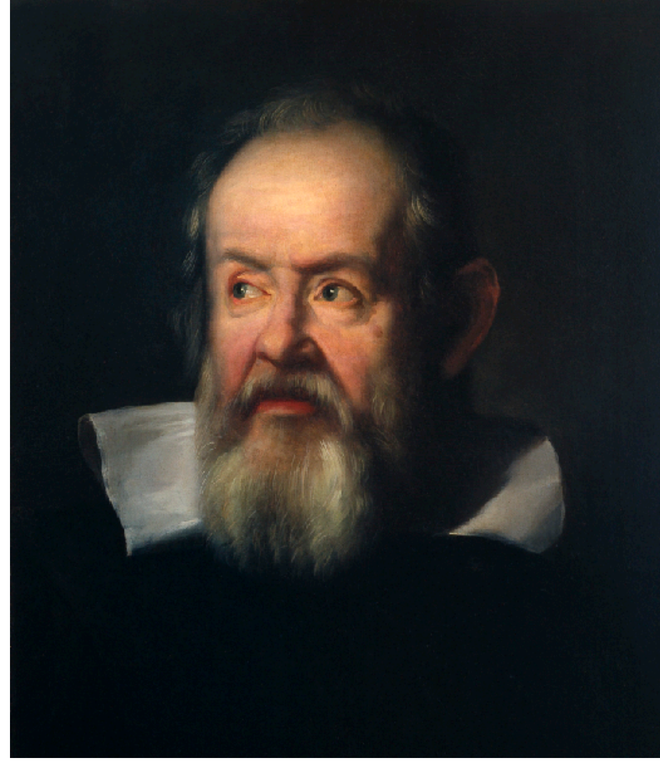
Soltamos o sistema de uma altura h

Pergunta: a bola menor subirá a uma altura igual, maior ou menor que h?

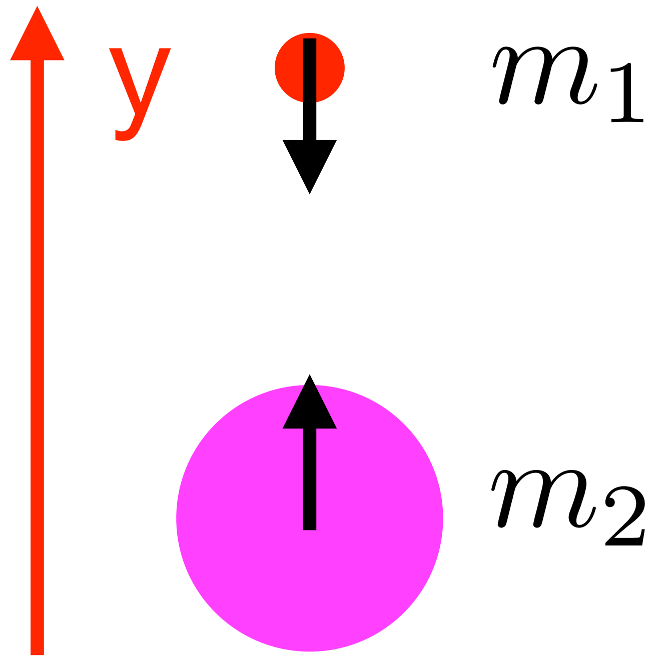


•Exemplo 1: canhão de Galileu





Simplificação: só 2 bolas e colisões elásticas



no referencial do solo

$$v_{1i} = -\sqrt{2gh} = -v_s \quad \text{e} \quad v_{2i} = v_s \quad \Longrightarrow$$

$$v_{1f} \simeq -v_{1i} + 2v_{2i} = 3v_s$$

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

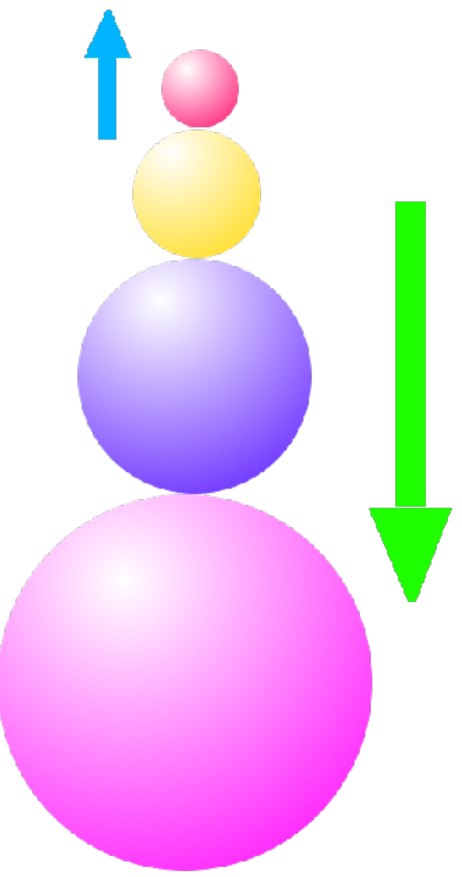
$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

logo a bola pequena sobe a uma altura $h_{final} = \frac{v_{1f}^2}{2g} = 9h$

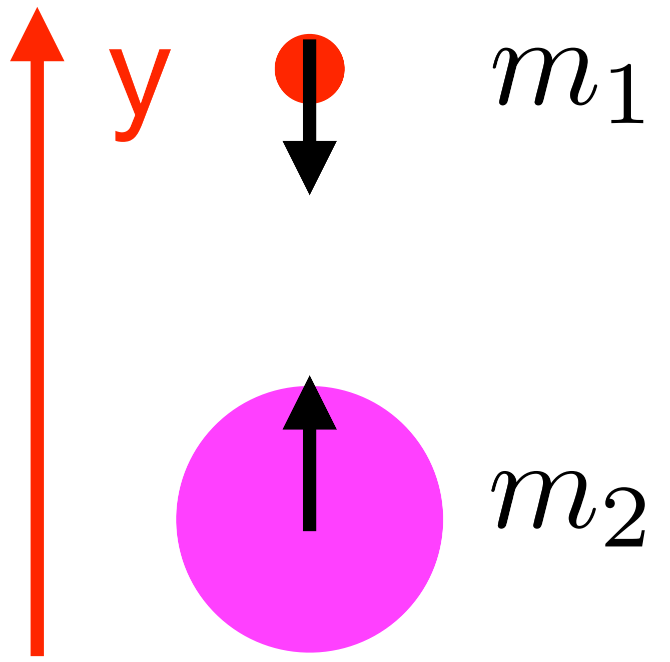
video bem interessante https://www.youtube.com/watch?v=2UHS883_P60

veja também https://www.youtube.com/watch?v=X0y6CzopNCE

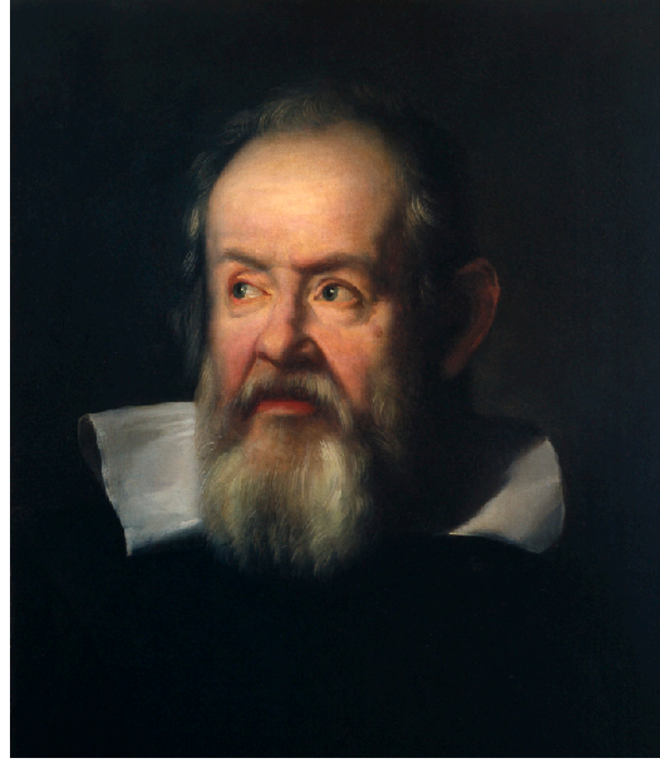
•Exemplo 1: canhão de Galileu



Simplificação: só 2 bolas e colisões elásticas



no referencial do solo



$$v_{1i} = -\sqrt{2gh} = -v_s \quad \text{e} \quad v_{2i} = v_s \implies$$

$$v_{1f} \simeq -v_{1i} + 2v_{2i} = 3v_s$$

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

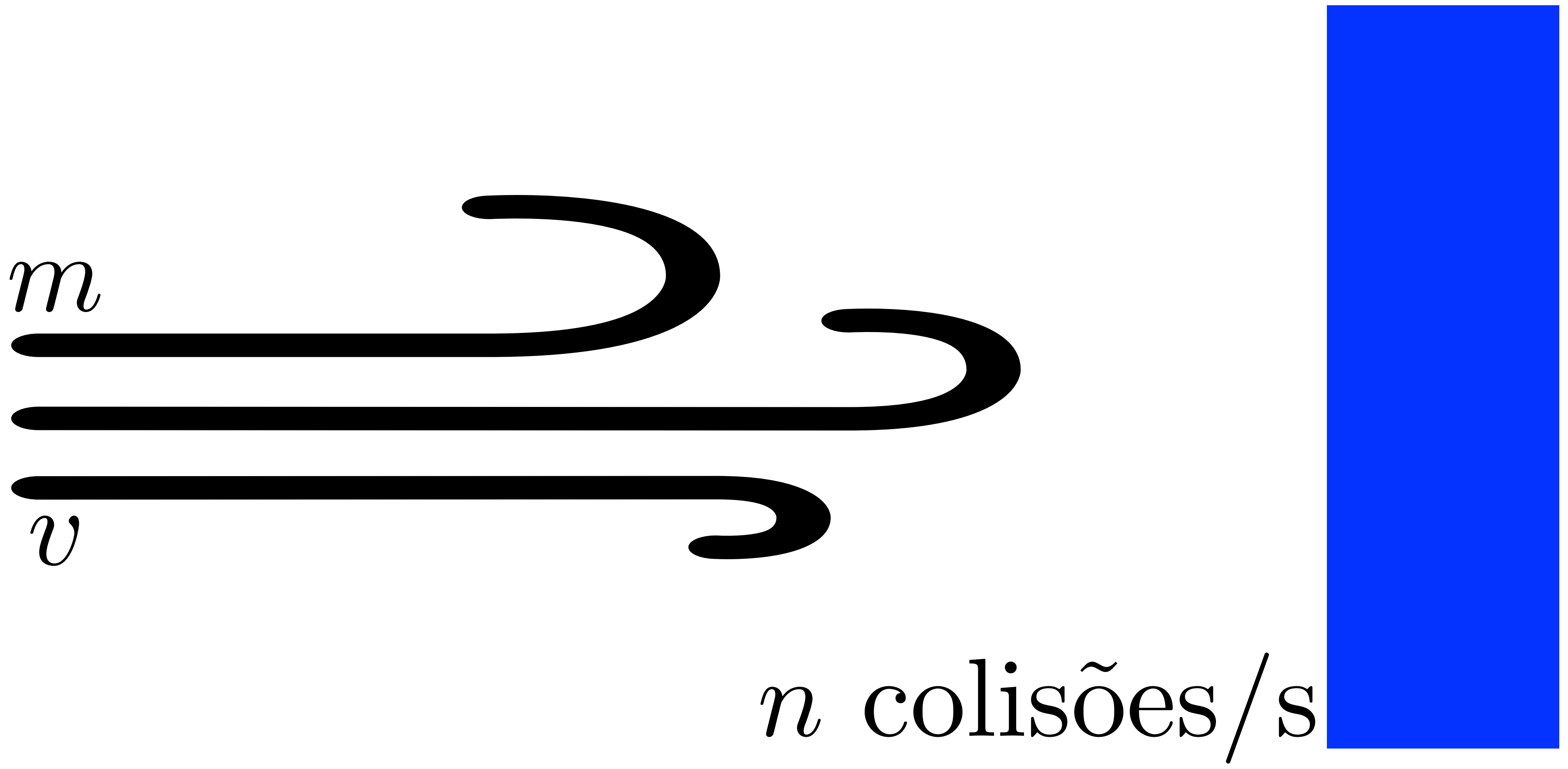
$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

logo a bola pequena sobe a uma altura $\quad h_{final} = \dfrac{v_{1f}^2}{2g} = 9h$

no referencial da bola maior (quase CM): $\quad v'_{1i} = -2v_s \implies v'_{1i} \simeq 2v_s$

de volta ao referencial do solo $\quad v_{1i} = v'_{1i} + v_s \implies v_{1f} = 3v_s$

Exemplo 2: jato de ar



- Para colisões elásticas cada partícula troca o sinal da velocidade e

$$\Delta p = 2mv$$

- A força sobre a parede é

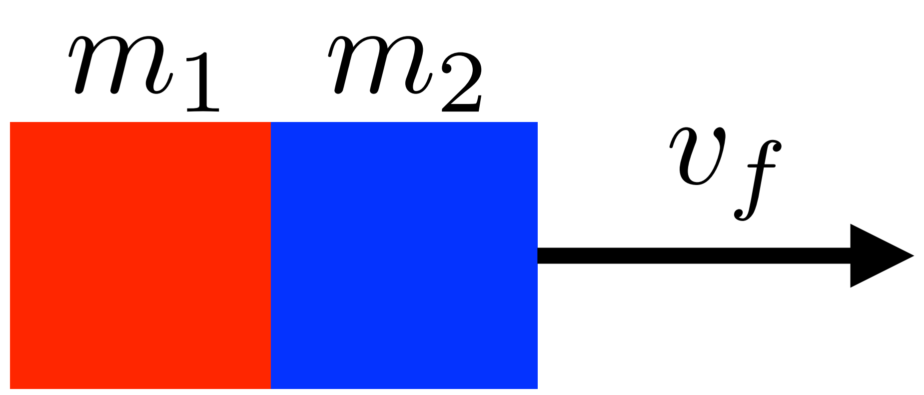
$$\int_0^{\Delta t} dt\ F = 2mvn\Delta t$$

$$\bar{F}\Delta t = 2mnv\Delta t$$

$$\Rightarrow \quad \bar{F} = 2mnv$$

Colisões inelásticas : $m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = P_{CM}$

- Numa colisão totalmente inelástica os corpos movem-se juntos após o impacto



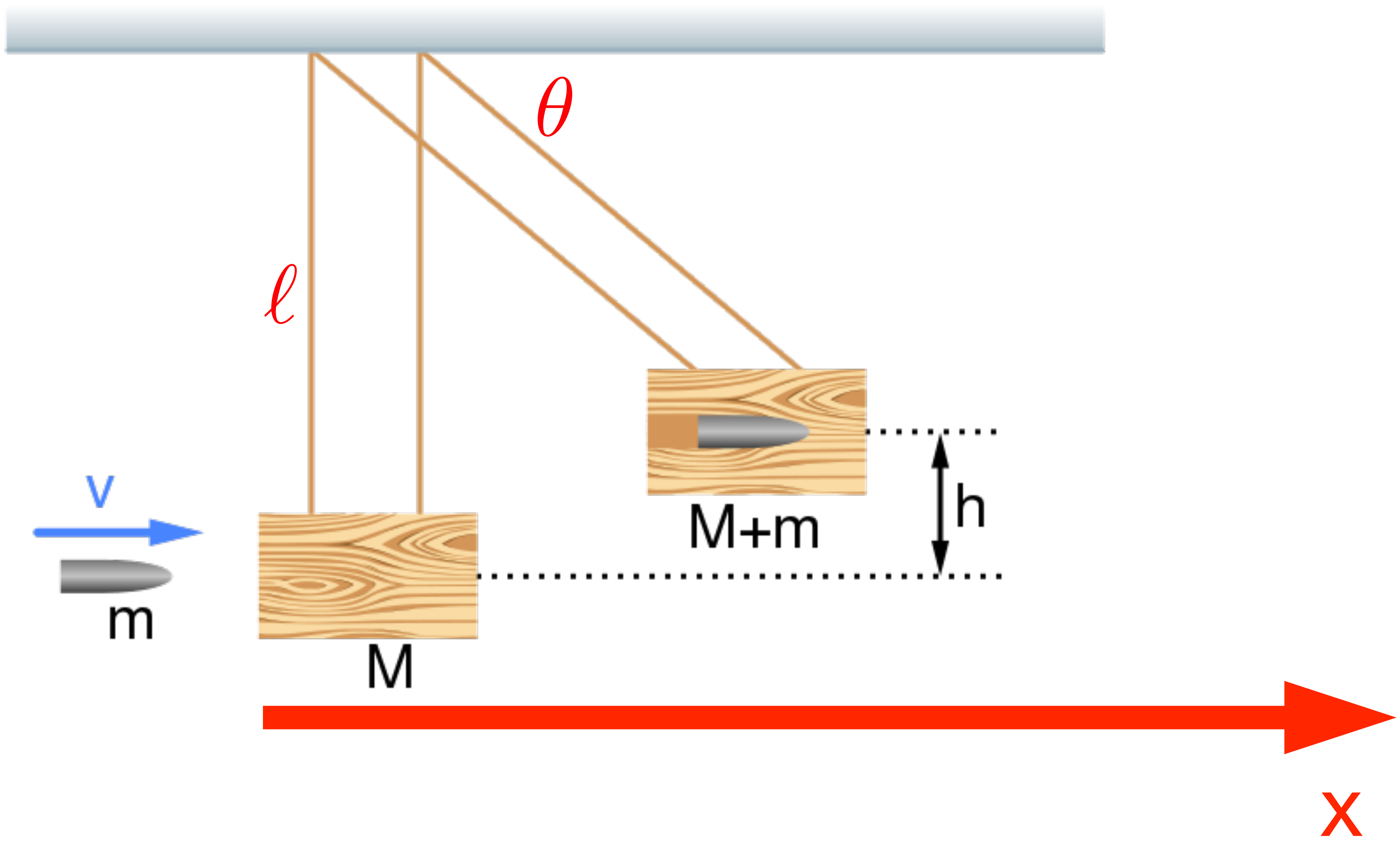
$$v_{1f} = v_{2f} = v_f$$

note que $P_{CM} = m_1 v_f + m_2 v_f = (m_1 + m_2) v_{CM} \implies v_f = v_{CM} = \dfrac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}$

- No referencial do CM: $v'_{1f} = v'_{2f} = 0$

- Vimos que $T_S = \dfrac{1}{2} \sum_j m_j \vec{v}_j^2 = \cancelto{0}{T_{CM}} + \dfrac{1}{2} M \vec{v}_{CM}^2$ logo a energia cinética final é mínima

Exemplo: pêndulo balístico



- Após a colisão $$v_f = \frac{m}{m+M}\, v$$

- Conservação de energia:

$$\frac{1}{2}(m+M)v_f^2 = (m+M)gh \implies v_f = \sqrt{2gh}$$

- Podemos determinar a velocidade de bala medindo a altura que o bloco sobe

$$v = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gh}$$

- Para $m = 10\ \mathrm{g}\ ,\ \ M = 10\ \mathrm{kg}\ ,\ \ v = 200\ \mathrm{m/s} \implies h \simeq 2\ \mathrm{mm}$

- Como medir a velocidade com precisão?

Referências

1. Moysés volume 1 capítulo 9