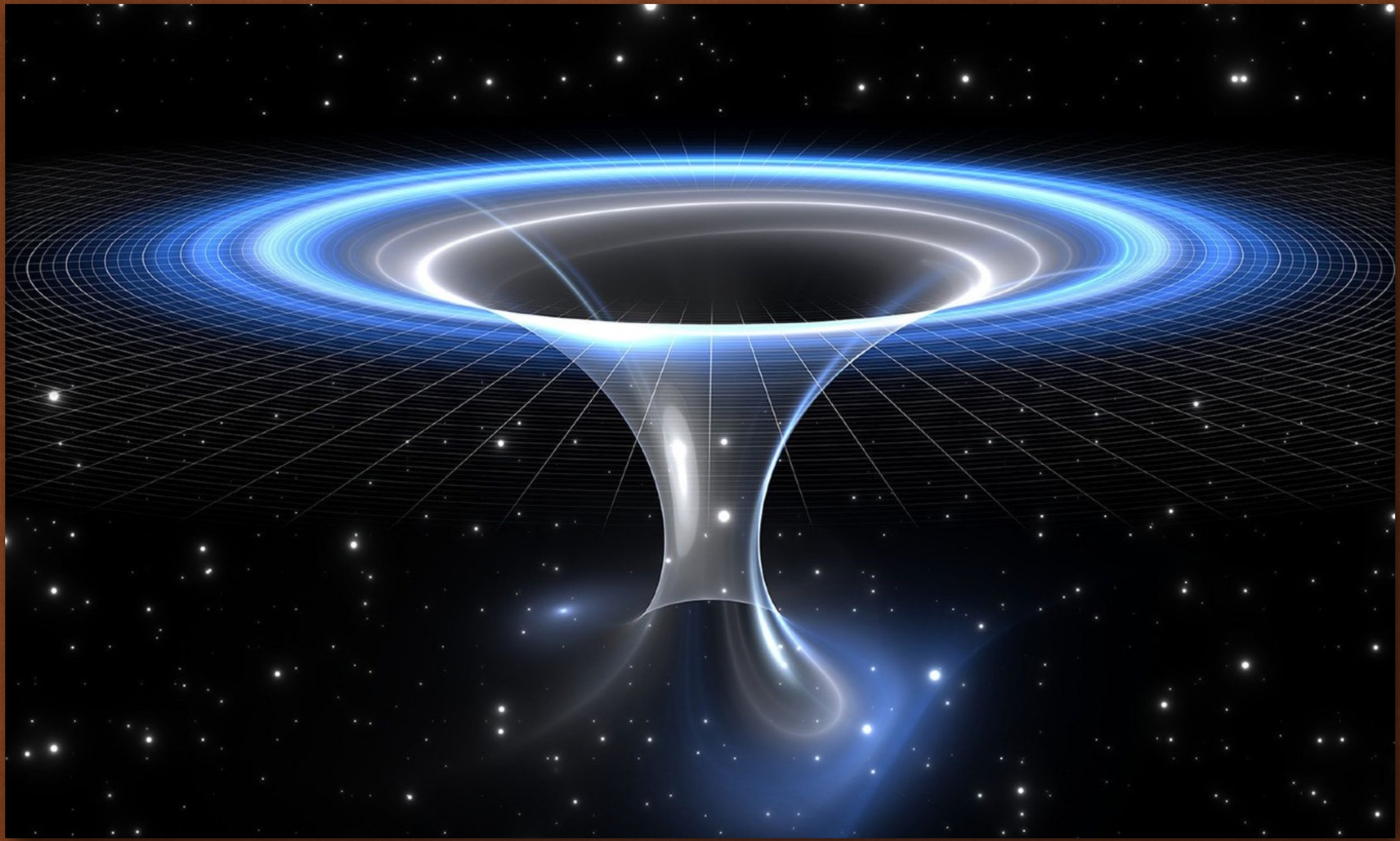
INTRODUÇÃO À



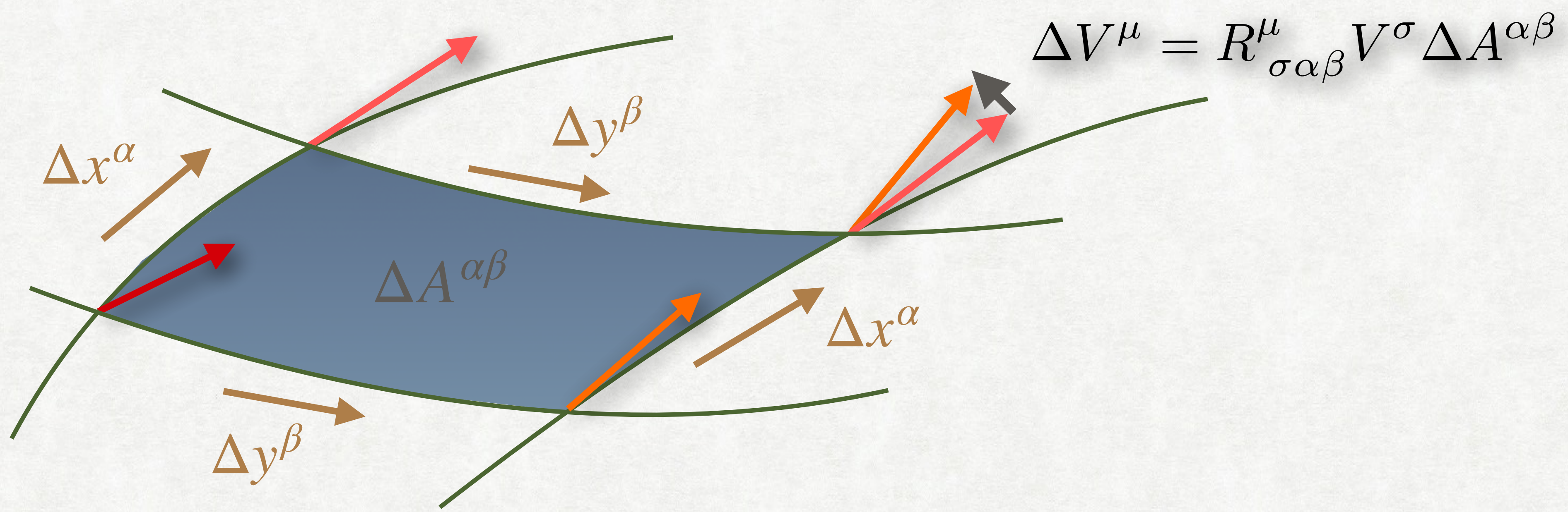
RELATIVIDADE

AULA 13 - 22/04/2020

- O tensor de curvatura de Riemann e suas contrações
- O tensor de Einstein
- A Física no espaço-tempo: equações dinâmicas
- As Equações de Einstein
- **Leitura: Até o capítulo 4, Seção 4.4 do Carroll**
- **Leitura complementar: Capítulos II e IV do A. Zee**

O TENSOR DE CURVATURA DE RIEMANN

- O tensor de curvatura de Riemann indica o quanto uma região qualquer de uma variedade difere do espaço Euclideano:



- Podemos escrever isso como:

$$\left(D_\alpha D_\beta - D_\beta D_\alpha\right) V^\mu = R^\mu_{\ \sigma\alpha\beta} V^\sigma$$

- Onde o tensor de curvatura de Riemann tem a expressão explícita:

$$R^\mu_{\ \sigma\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha \Gamma^\mu_{\beta\sigma} - \partial_\beta \Gamma^\mu_{\alpha\sigma} + \Gamma^\mu_{\alpha\lambda} \Gamma^\lambda_{\beta\sigma} - \Gamma^\mu_{\beta\lambda} \Gamma^\lambda_{\alpha\sigma}$$

O TENSOR DE CURVATURA DE RIEMANN

- Algumas propriedades do tensor de Riemann:

$$R^{\mu}{}_{\sigma\alpha\beta} = -R^{\mu}{}_{\sigma\beta\alpha}$$

- Tensor de Riemann com componentes ***totalmente covariantes***:

$$R_{\lambda\sigma\alpha\beta} = g_{\lambda\mu}R^{\mu}{}_{\sigma\alpha\beta}$$

- Propriedades:

$$R_{\lambda\sigma\alpha\beta} = -R_{\sigma\lambda\alpha\beta} = -R_{\lambda\sigma\beta\alpha}$$ (anti-simetria)

$$R_{\lambda\sigma\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\lambda\sigma}$$ (simetria)

- Identidade de Jacobi:

$$R_{\lambda\sigma\alpha\beta} + R_{\lambda\beta\sigma\alpha} + R_{\lambda\alpha\beta\sigma} = 0$$

PROPRIEDADES DO TENSOR DE RIEMANN

- ***Identidade de Bianchi*** (lembrando: $D_\mu X = X_{;\mu}$):

$$R_{\lambda\sigma\alpha\beta;\mu} + R_{\lambda\sigma\mu\alpha;\beta} + R_{\lambda\sigma\beta\mu;\alpha} = 0$$

- Vamos agora usar o fato de que $D_\mu g_{\alpha\beta} = 0$ e $D_\mu g^{\alpha\beta} = 0$ para escrever:

$$g^{\lambda\alpha}\left(R_{\lambda\sigma\alpha\beta;\mu} + R_{\lambda\sigma\mu\alpha;\beta} + R_{\lambda\sigma\beta\mu;\alpha}\right) = 0$$

$$D_\mu\left(g^{\lambda\alpha}R_{\lambda\sigma\alpha\beta}\right) + D_\beta\left(g^{\lambda\alpha}R_{\lambda\sigma\mu\alpha}\right) + g^{\lambda\alpha}\left(D_\alpha R_{\lambda\sigma\beta\mu}\right) = 0$$

- Na expressão acima há um mesmo objeto aparecendo duas vezes:

$$D_\mu\left(g^{\lambda\alpha}R_{\lambda\sigma\alpha\beta}\right) - D_\beta\left(g^{\lambda\alpha}R_{\lambda\sigma\alpha\mu}\right) + g^{\lambda\alpha}\left(D_\alpha R_{\lambda\sigma\beta\mu}\right) = 0$$

$$D_\mu\left(R_{\sigma\beta}\right) - D_\beta\left(R_{\sigma\mu}\right) + g^{\lambda\alpha}\left(D_\alpha R_{\lambda\sigma\beta\mu}\right) = 0$$

- Onde definimos o ***tensor de Ricci***:

$\boxed{R_{\sigma\beta} \equiv g^{\lambda\alpha}R_{\lambda\sigma\alpha\beta}}$, que é um tensor simétrico, $R_{\sigma\beta} = R_{\beta\sigma}$

PROPRIEDADES DO TENSOR DE RIEMANN

- Agora vamos pegar a *identidade de Bianchi* escrita da forma acima:

$$D_\mu \left(R_{\sigma\beta}\right) - D_\beta \left(R_{\sigma\mu}\right) - g^{\lambda\alpha}\left(D_\alpha R_{\sigma\lambda\beta\mu}\right) = 0$$

- Vamos contrair isso novamente, agora com um $g^{\sigma\beta}$:

$$g^{\sigma\beta} D_\mu \left(R_{\sigma\beta}\right) - g^{\sigma\beta} D_\beta \left(R_{\sigma\mu}\right) - g^{\sigma\beta} g^{\lambda\alpha}\left(D_\alpha R_{\sigma\lambda\beta\mu}\right) = 0$$

$$D_\mu \left(g^{\sigma\beta} R_{\sigma\beta}\right) - D_\beta \left(g^{\sigma\beta} R_{\sigma\mu}\right) - g^{\lambda\alpha} D_\alpha \left(g^{\sigma\beta} R_{\sigma\lambda\beta\mu}\right) = 0$$

- Usando a definição do tensor de Ricci, e definindo o escalar de Ricci $\boxed{R \equiv R^\mu{}_\mu}$, temos:

$$D_\mu (R) - D_\beta \left(R^\beta{}_\mu\right) - g^{\lambda\alpha} D_\alpha \left(R_{\lambda\mu}\right) = 0$$

$$D_\mu R - D_\beta \left(R^\beta{}_\mu\right) - D_\alpha \left(R^\alpha{}_\mu\right) = D_\mu R - 2 D_\beta \left(R^\beta{}_\mu\right) = 0$$

- Ou, de modo equivalente:

$$D_\beta \left(R^\beta{}_\mu - \frac{1}{2}\delta^\beta_\mu R\right) = 0$$

O TENSOR DE EINSTEIN

- Definimos então o Tensor de Einstein como:

$$G^{\beta}{}_{\mu} \equiv R^{\beta}{}_{\mu} - \frac{1}{2}\delta^{\beta}_{\mu} R$$

- Com componentes covariantes ou contra-variantes:

$$G_{\alpha\mu} \equiv R_{\alpha\mu} - \frac{1}{2} g_{\alpha\mu} R$$

$$G^{\alpha\mu} \equiv R^{\alpha\mu} - \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} R$$

- Portanto, a identidade de Bianchi se escreve:

$\boxed{D_{\alpha} G^{\alpha\mu} = 0}$, ou $\boxed{D_{\alpha} G^{\alpha}{}_{\mu} = 0}$

O TENSOR DE EINSTEIN

- A ***Identidade de Bianchi*** não traz à mente algo parecido?

$$D_\alpha G^{\alpha\mu} = 0$$

- Vamos nos lembrar das ***Equações de Maxwell,*** que em quaisquer espaços-tempos, e em quaisquer coordenadas ($\partial_\alpha \to D_\alpha$) se escrevem:

$$D_\alpha F^{\alpha\mu} = \frac{4\pi}{c} J^\mu \qquad , \qquad \text{com} \qquad F_{\alpha\mu} = D_\mu A_\alpha - D_\alpha A_\mu$$

- As Equações de Maxwell são "completadas" pela condição:

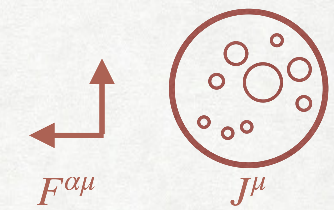
$$D_\mu D_\alpha F^{\alpha\mu} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad D_\mu J^\mu = 0$$

- A ***identidade de Bianchi***, acima parece com esse ***lado esquerdo das Equações de Maxwell***! Mas… o que seria o "lado direito"?

AS EQUAÇÕES DE EINSTEIN

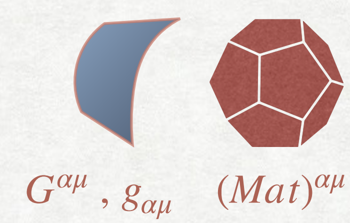
- Equações de Maxwell: campos físicos (lado esquerdo) têm como fontes a matéria (lado direito)

$$(EM)^\mu = D_\alpha F^{\alpha\mu} = \frac{4\pi}{c} J^\mu \iff D_\mu (EM)^\mu = 0 \iff D_\mu J^\mu = 0$$



- O Princípio da Equivalência nos diz que geometria/curvatura não pode ser distinguido de gravidade. Então os "campos físicos" são a geometria/curvatura, e as fontes seriam a matéria:

$$G^{\alpha\mu} = C_G (\text{Materia})^{\alpha\mu} \iff D_\alpha G^{\alpha\mu} = 0 \iff D_\alpha (\text{Materia})^{\alpha\mu} = 0$$



- Mas o que seria essa "matéria", expressa como um ***tensor***? Qual a forma dessas fontes?

- Que constante C_G seria essa?

- E qual a natureza das equações físicas que emergem da relação

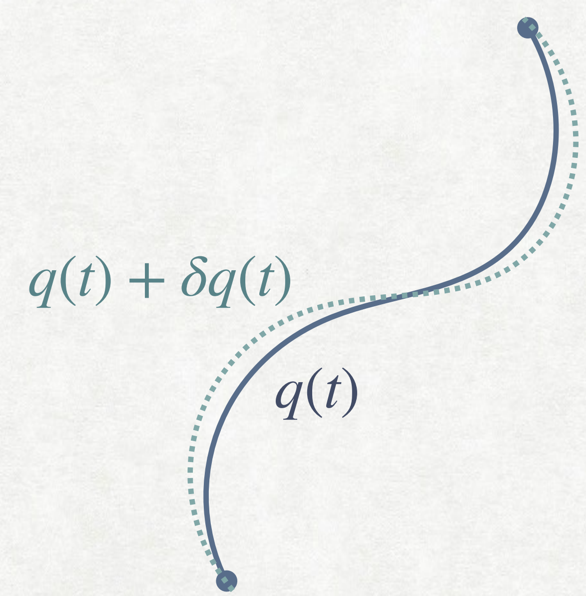
$$G^{\alpha\mu} = C_G (\text{Materia})^{\alpha\mu} \ ?$$

AS EQUAÇÕES DE EINSTEIN E O PRINCÍPIO VARIACIONAL

- Em vez de tentar “adivinhar" de que modo a matéria pode aparecer nessas equações, vamos nos valer da melhor e mais poderosa ferramenta da Física para determinar as equações físicas de um sistema: o ***Princípio Variacional***.

- O princípio variacional se baseia numa ***ação*** e uma ***Lagrangeana***. Num sistema com apenas um grau de liberdade temos:

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt\, L(q, \dot{q}) \quad , \quad \text{onde} \quad L = K - V$$



- O ***Princípio Variacional*** nos diz que, ***na trajetória física*** $q(t)$ a ***ação é um extremo*** (mínimo) sob variações $\delta q(t)$ ao redor dessa trajetória. Ou seja:

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt\, \delta L(q, \dot{q}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{(Equações de Euler-Lagrange)}$$

AS EQUAÇÕES DE EINSTEIN E O PRINCÍPIO VARIACIONAL

- As equações de Euler-Lagrange resultam, depois de um cálculo que já deve ser familiar para vocês a esta altura da vida, em:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \partial_t \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

- Mas o que seria uma Lagrangeana no caso de ***campos*** — e incluindo a ***relatividade***?

- Primeiro, o "tempo" não tem nenhum privilégio: ele é apenas uma das quatro coordenadas do espaço-tempo. Portanto, ***em Relatividade Restrita*** teríamos:

$$S_{1D} = \int_{t_i}^{t_f} dt\, L(q, \dot{q}) \quad \Longrightarrow \quad S_{4D} = \int_i^f d^4y\, \mathscr{L} \qquad ,$$

onde $\mathscr{L}$ é uma ***densidade*** de Lagrangeana.

- No Eletromagnetismo, $\mathscr{L} = \mathscr{L}(F^{\mu\nu}, J^\mu) = \mathscr{L}_{Maxwell}(F^{\mu\nu}) + \mathscr{L}_{Materia}(J^\mu)$, onde:

$$\mathscr{L}_{Maxwell}(F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

$$\mathscr{L}_{Materia}(J^\mu) = -\frac{4\pi}{c} A_\mu J^\mu$$

AS EQUAÇÕES DE EINSTEIN E O PRINCÍPIO VARIACIONAL

- Mas antes mesmo de tentar adivinhar qual deveria ser a ação da Relatividade Geral, temos de lidar com a própria definição da ação. Em Relatividade Restrita temos:

$$S_{4D} = \int d^4y \, \mathscr{L} \quad , \quad \text{onde está implícito que as coordenadas são inerciais}$$

- Mas e se tivermos um referencial qualquer, num espaço com uma métrica qualquer?

- Vamos usar o nosso "velho truque" de relacionar o referencial arbitrário (digamos, x) ao referencial localmente inercial (y). Sob essa transformação, o volume 4D se transforma como o ***Jacobiano da transformação de coordenadas***:

$$d^4y \;=\; \left| \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta} \right| d^4x$$

- Mas lembre-se que esse Jacobiano está relacionado ao ***determinante da métrica***:

$$g_{\alpha\beta} \;=\; \eta_{\mu\nu} \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\beta} \quad \Rightarrow \quad -\det(g) \;= -\det(\eta)\,\det\left(\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha}\right)\,\det\left(\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\beta}\right) \;=\; 1\,\left|\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha}\right|^2$$

$$\Longrightarrow \quad \sqrt{-\det(g)} \;=\; \left|\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha}\right|$$

AS EQUAÇÕES DE EINSTEIN E O PRINCÍPIO VARIACIONAL

- Portanto, em um referencial arbitrário temos:

$$\boxed{S_{4D} = \int d^4x \sqrt{-\det\, g}\, \mathscr{L}}$$

- Note que podemos fazer uma outra transformação de coordenadas geral, $x \to x'$, e:

$$S_{4D} = \int d^4x' \sqrt{-\det\, g'}\, \mathscr{L}$$

- Neste momento não há mais como escapar: agora temos de encontrar uma expressão para a Lagrangeana da parte "geométrica", cuja variação nos dê a expressão $G_{\mu\nu}$, e uma Lagrangeana da matéria, cuja a variação nos dê a parte da matéria:

$$\mathscr{L} \;=\; \mathscr{L}_{Geom.} + \mathscr{L}_{Mat.} \qquad , \qquad \delta\mathscr{L}_{Geom.} \;\to\; G_{\mu\nu} \qquad , \qquad \delta\mathscr{L}_{Mat.} \;\to ??_{\mu\nu}$$

- Nos próximos slides vou mostrar que a Lagrangeana da parte geométrica é a expressão mais simples possível de um escalar que contenha a curvatura do espaço-tempo: o ***escalar de Ricci***

$$R_{\sigma\beta} \equiv R^{\lambda}{}_{\sigma\lambda\beta} \qquad , \qquad R \equiv g^{\sigma\beta} R_{\sigma\beta} = R^{\beta}{}_{\beta}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\mathscr{L}_{Geom.} = K_G\, R}$$

Mais adiante vamos mostrar que $K_G = \dfrac{1}{16\,\pi\, G_N}$

AS EQUAÇÕES DE EINSTEIN E O PRINCÍPIO VARIACIONAL

- Então finalmente temos um ***ansatz para a ação da Gravidade***:

$$\mathscr{L}_{Geom.} = K_G\, R[g, \partial g]$$

- A ação dessa parte ***geométrica*** (ou seja, a parte contendo a ***curvatura do espaço-tempo***) chama-se ***Ação de Einstein-Hilbert***:

$$\boxed{S_{EH} = K_G \int d^4x \sqrt{-\det\, g}\, R[g, \partial g]}$$

- O que queremos calcular a partir do princípio variacional é a métrica g que minimiza essa ação. Ou seja, variações infinitesimais em torno dessa métrica devem manter a ação invariante:

$$\delta S_{EH} = K_G \int d^4x\, \delta\left(\sqrt{-\det\, g}\, R[g, \partial g]\right)$$

- Vamos abrir os três termos que resultam dessa variação:

$$\delta\left(\sqrt{-\det\, g}\, R[g, \partial g]\right) = \delta\left(\sqrt{-\det\, g}\, g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}\right)$$

$$= \left(\delta\sqrt{-\det\, g}\right) g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \sqrt{-\det\, g}\, \delta\left(g^{\mu\nu}\right) R_{\mu\nu} + \sqrt{-\det\, g}\, g^{\mu\nu} \delta\left(R_{\mu\nu}\right)$$

AS EQUAÇÕES DE EINSTEIN E O PRINCÍPIO VARIACIONAL

- Retomando a expressão anterior:

$$\delta\left(\sqrt{-\det g}\, g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\right) = \left(\delta\sqrt{-\det g}\right) R + \sqrt{-\det g}\;\delta\left(g^{\mu\nu}\right)\, R_{\mu\nu} + \sqrt{-\det g}\; g^{\mu\nu}\,\delta\left(R_{\mu\nu}\right)$$

- Note que a primeira variação já é conhecida nossa:

$$\delta\sqrt{-\det g} = \frac{1}{2}\sqrt{-\det g}\; g^{\alpha\beta}\,\delta g_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\sqrt{-\det g}\; g_{\alpha\beta}\,\delta g^{\alpha\beta}$$

- Ou seja, podemos escrever, renomeando alguns índices:

$$\begin{aligned}\delta\left(\sqrt{-\det g}\, g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\right) &= -\frac{1}{2}\sqrt{-\det g}\; g_{\alpha\beta}\,\delta g^{\alpha\beta}\, R + \sqrt{-\det g}\;\delta g^{\mu\nu}\, R_{\mu\nu} + \sqrt{-\det g}\; g^{\mu\nu}\,\delta R_{\mu\nu} \\ &= \sqrt{-\det g}\left[\underline{-\frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu}\, R + \delta g^{\mu\nu}\, R_{\mu\nu}} + g^{\mu\nu}\,\delta R_{\mu\nu}\right] \\ &= \sqrt{-\det g}\left[\underline{G_{\mu\nu}}\,\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\,\delta R_{\mu\nu}\right]\end{aligned}$$

- Portanto, se calhar que $g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \to 0$ dentro da ação de EH, então teremos que:

$$\frac{\delta\left(\sqrt{-\det g}\, R\right)}{\delta g^{\mu\nu}} \to G_{\mu\nu}$$, ou seja , $$\delta S_{EH} = K_G \int d^4x\,\sqrt{-\det g}\; G_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu}$$

AS EQUAÇÕES DE EINSTEIN E O PRINCÍPIO VARIACIONAL

- Então vamos agora mostrar que o termo $g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$ se anula na ação de Einstein-Hilbert. Note que:

$$R_{\mu\nu} = R^{\eta}{}_{\mu\eta\nu} \equiv \partial_\eta \Gamma^\eta_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^\eta_{\eta\mu} + \Gamma^\eta_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \Gamma^\eta_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\eta\mu}$$

- Portanto, a variação do tensor de Ricci retorna a expressão:

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta\left(\partial_\eta \Gamma^\eta_{\nu\mu}\right) - \delta\left(\partial_\nu \Gamma^\eta_{\eta\mu}\right) + \delta\left(\Gamma^\eta_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\mu}\right) - \delta\left(\Gamma^\eta_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\eta\mu}\right) \quad = \quad \delta(\partial\Gamma) + \delta(\partial\Gamma) + 4\,\Gamma\,\delta\Gamma$$

- Vamos agora usar o nosso "velho truque": no ***referencial localmente inercial (RLI)***, as conexões $\Gamma \to 0$, e portanto:

$$\delta R_{\mu\nu}\Big|_{RLI} = \delta\left(\partial_\eta \Gamma^\eta_{\nu\mu}\right)_{RLI} - \delta\left(\partial_\nu \Gamma^\eta_{\eta\mu}\right)_{RLI}$$

- No termo da ação temos então:

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \xrightarrow{RLI} \eta^{\mu\nu} \times \left[\delta\left(\partial_\sigma \Gamma^\sigma_{\nu\mu}\right)_{RLI} - \delta\left(\partial_\nu \Gamma^\sigma_{\sigma\mu}\right)_{RLI}\right]$$

AS EQUAÇÕES DE EINSTEIN E O PRINCÍPIO VARIACIONAL

- Portanto, obtivemos acima que o termo que deve se anular na ação de Einstein-Hilbert pode ser escrito, no referencial localmente inercial (RLI), como:

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \xrightarrow{RLI} \eta^{\mu\nu}\left[\delta\left(\partial_\sigma \Gamma^\sigma_{\nu\mu}\right)_{RLI} - \delta\left(\partial_\nu \Gamma^\sigma_{\sigma\mu}\right)_{RLI}\right]$$

$$= \partial_\sigma\left(\eta^{\mu\nu}\,\delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu}\right)_{RLI} - \partial_\nu\left(\eta^{\mu\nu}\,\delta\Gamma^\sigma_{\sigma\mu}\right)_{RLI}$$

$$= \partial_\nu\left(\eta^{\mu\sigma}\,\delta\Gamma^\nu_{\sigma\mu}\right)_{RLI} - \partial_\nu\left(\eta^{\mu\nu}\,\delta\Gamma^\sigma_{\sigma\mu}\right)_{RLI} \equiv \partial_\nu\,\omega^\nu$$

- Mas se esse escalar é uma divergência total no RLI, ele deve ser uma divergência em ***qualquer referencial***:

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = D_\nu\,\omega^\nu$$, e como vimos anteriormente, $$D_\nu\,\omega^\nu = \frac{1}{\sqrt{-\det g}}\partial_\nu\left(\sqrt{-\det g}\,\omega^\nu\right)$$

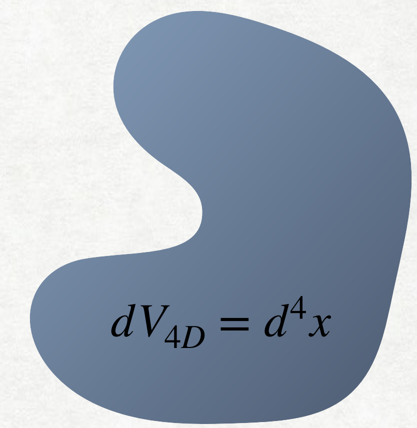
- Portanto, esse termo, na ação fica escrito:

$$\int d^4x\sqrt{-\det\, g}\times g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \int d^4x\sqrt{-\det\, g}\times\frac{1}{\sqrt{-\det g}}\partial_\nu\left(\sqrt{-\det g}\,\omega^\nu\right) = \int d^4x\,\partial_\nu\left(\sqrt{-\det g}\,\omega^\nu\right)$$

AS EQUAÇÕES DE EINSTEIN E O PRINCÍPIO VARIACIONAL

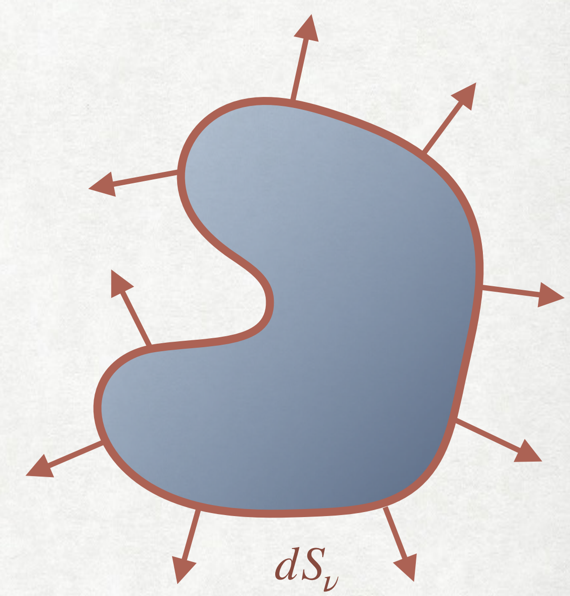
- Assim, chegamos à conclusão surpreendente que o termo envolvendo $\delta R_{\mu\nu}$ é uma derivada total:

$$\int d^4x \sqrt{-\det g} \times g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \int d^4x \, \partial_\nu \left(\sqrt{-\det g} \, \omega^\nu \right)$$



- Mas isso significa que, pelo Teorema do Divergente, podemos escrever essa integral no volume como uma ***integral na superfície***:

$$\int d^4x \sqrt{-\det g} \times g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \oint dS_\nu \left(\sqrt{-\det g} \, \omega^\nu \right) \ \rightarrow \ 0 \ !!!$$



NO ELETROMAGNETISMO ESSA SITUAÇÃO SURGE FREQUENTEMENTE: IMAGINE UMA FONTE (CARGA) NA ORIGEM, E UMA INTEGRAL NUMA SUPERFÍCIE INFINITAMENTE DISTANTE DESSA CARGA. ESSA INTEGRAL DÁ ZERO*

*QUASE SEMPRE!

AS EQUAÇÕES DE EINSTEIN E O PRINCÍPIO VARIACIONAL

- Em suma, obtivemos que a variação da ação de Einstein-Hilbert com respeito à métrica resulta em:

$$\boxed{\delta S_{EH} = K_G \int d^4x \sqrt{-\det g}\; G_{\mu\nu}\, \delta g^{\mu\nu}}$$

- ***OK, mas... e a matéria?...***

- Vamos escrever a ação mais geral possível para a parte da matéria:

$$S_{Mat} = \int d^4x \sqrt{-\det g}\; \mathscr{L}_{Mat}$$

- A mesma variação dessa ação, sob perturbações da métrica, resulta nas equações de Euler-Lagrange:

$$\delta S_{Mat} = \int d^4x\, \delta \left[\sqrt{-\det g}\; \mathscr{L}_{Mat}\right] = \int d^4x \left[\frac{\partial \left(\sqrt{-\det g}\; \mathscr{L}_{Mat}\right)}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\alpha \cancel{\frac{\partial \left(\sqrt{-\det g}\; \mathscr{L}_{Mat}\right)}{\partial(\partial_\alpha g^{\mu\nu})}} \right] \delta g^{\mu\nu}$$

- A ação da matéria deve trazer informação sobre a energia, a pressão, fluxos e estresses da matéria, e não deve depender das conexões $\Gamma \sim \partial g$. Portanto, temos:

$$\delta S_{Mat} = \int d^4x\, \frac{\partial \left(\sqrt{-\det g}\; \mathscr{L}_{Mat}\right)}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu}$$

AS EQUAÇÕES DE EINSTEIN E O PRINCÍPIO VARIACIONAL

- Portanto, coletando o termo geométrico, da ação de Einstein-Hilbert, e o termo da matéria, temos:

$$\delta S_{EH} = K_G \int d^4x \sqrt{-\det g}\; G_{\mu\nu}\, \delta g^{\mu\nu}$$

$$\delta S_{Mat} = \int d^4x \, \frac{\partial \left(\sqrt{-\det g}\; \mathscr{L}_{Mat} \right)}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu}$$

- Podemos juntar essas duas coisas se definirmos:

$$\frac{\partial \left(\sqrt{-\det g}\; \mathscr{L}_{Mat} \right)}{\partial g^{\mu\nu}} \equiv - \frac{\sqrt{-\det g}}{2} T_{\mu\nu}$$, onde $T_{\mu\nu}$ é chamado de ***tensor de energia-momento da matéria***

- Desse modo, a variação da ação fica escrita:

$$\delta S_{Total} = \int d^4x \sqrt{-\det g} \left(K_G\, G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu}$$

- Ou seja, sob uma variação $\delta g^{\mu\nu}$ da métrica, a ação fica invariante se valerem as equações:

$$\boxed{K_G\, G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} T_{\mu\nu}}$$

EQUAÇÕES DE EINSTEIN !

AS EQUAÇÕES DE EINSTEIN NO LIMITE NEWTONIANO

- Só falta determinar que constante K_G é essa, que conecta a geometria à matéria. Para fazer essa última conexão vamos utilizar o *limite Newtoniano* (ou seja, o limite quase-estático, não-relativístico — veja aula passada!)

- No limite Newtoniano a métrica é dada aproximadamente por:

$$g_{00} \simeq -1 + \epsilon h_{00} \quad , \quad \text{com} \quad \epsilon\, h_{00} \to -\frac{2}{c^2}\Phi$$

- As conexões relevantes nessa aproximação são apenas:

$$\Gamma^i_{00} \simeq -\frac{\epsilon}{2}\partial_i h_{00}$$

- Você pode calcular (exercício!) que nesse caso temos:

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R \simeq -\vec{\nabla}^2 g_{00} = \frac{2}{c^2}\vec{\nabla}^2\Phi$$

- Portanto, nas Equações de Einstein:

$$K_G\, G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad K_G\, G_{00} = \frac{2K_G}{c^2}\vec{\nabla}^2\Phi = \frac{1}{2} T_{00}$$

AS EQUAÇÕES DE EINSTEIN NO LIMITE NEWTONIANO

- Vocês talvez já saibam, pelo tensor de energia e momento do Eletromagnetismo (se não souberem, aguardem a aula que vem!) que:

$T_{00} = \rho_E$, onde ρ_E é a ***densidade de energia*** (da matéria)

- Temos então que, no limite Newtoniano,

$$K_G\, G_{00} \simeq \frac{2K_G}{c^2}\vec{\nabla}^2\Phi = \frac{1}{2}T_{00} = \frac{1}{2}\rho_E$$

- Mas agora podemos juntar essa informação com a Equação de Poisson:

$$\vec{\nabla}^2\Phi = 4\pi G\,\rho_{Massa} \quad \oplus \quad \frac{2K_G}{c^2}\vec{\nabla}^2\Phi = \frac{1}{2}\rho_E \quad \Rightarrow \quad K_G = \frac{c^4}{16\,\pi\,G}$$

- Portanto, chegamos agora ao resultado central deste curso:

$\rho_E = \rho_{Massa}\, c^2$

$$\boxed{G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}}$$

PARA A AULA QUE VEM:

- **Trabalhem na 3a lista de exercícios !**
- Leitura: S. Carroll, Capítulo 1, Seções 1.9-1.10, e tudo que você conseguir ler do Capítulo 4 .