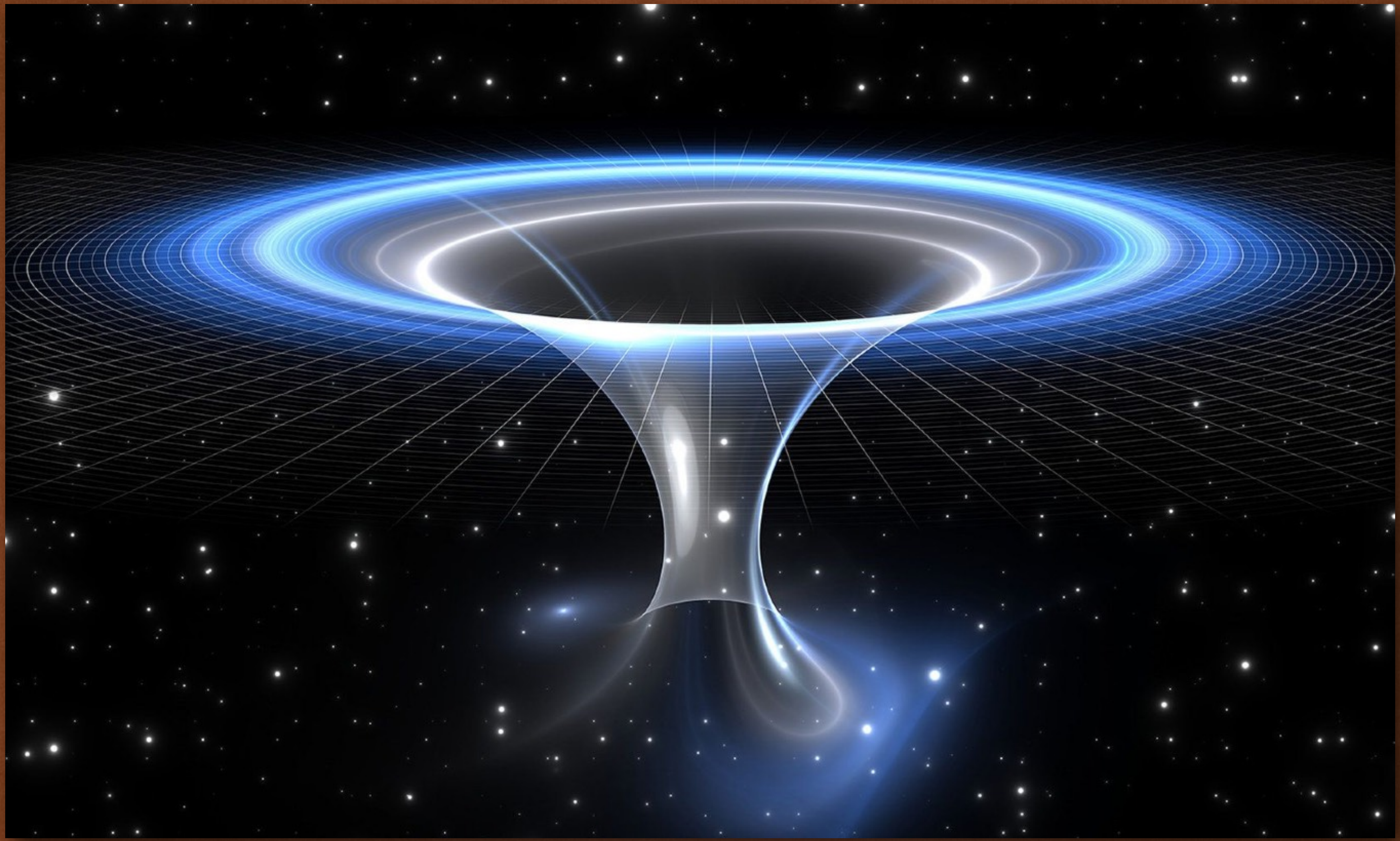
INTRODUÇÃO À



RELATIVIDADE

AULA 12 - 15/04/2020

- Usando a derivada covariante
- A curvatura e o tensor de curvatura
- Um pouco de Física: o limite Newtoniano
- Um pouco de Física: o redshift gravitacional
- **Leitura: Até o Capítulo 3.7 do Carroll**

REVISÃO: DERIVADA COVARIANTE

- Na aula passada encontramos o operador que permite "derivar" vetores e outros objetos de caráter tensorial — ou seja, que têm componentes que "sentem" a curvatura do espaço.

- Essa ***derivada covariante*** opera do seguinte modo num vetor *covariante*:

$$D_\nu A_\mu \equiv \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} A_\sigma$$

- Já num vetor *contra-variante*, a derivada covariante opera como:

$$D_\nu V^\mu \equiv \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} V^\sigma$$

REVISÃO: DERIVADA COVARIANTE

- Derivada covariante de um escalar:

$$D_\mu \phi \;\equiv\; \partial_\mu \phi$$

- Derivada covariante de um tensor covariante:

$$D_\alpha Q_{\mu\nu} \;\equiv\; \partial_\alpha Q_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\alpha\mu} Q_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\alpha\nu} Q_{\mu\sigma}$$

- Derivada de um tensor contravariante:

$$D_\alpha Y^{\mu\nu} \;\equiv\; \partial_\alpha Y^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\alpha\sigma} Y^{\sigma\nu} + \Gamma^\nu_{\alpha\sigma} Y^{\mu\sigma}$$

- Derivada covariante da ***métrica***:

$$D_\alpha g_{\mu\nu} \;=\; \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\alpha\mu} g_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\alpha\nu} g_{\mu\sigma} \;=\; 0 \quad \text{(!!!)}$$

MÉTRICA: LIGAÇÃO ENTRE OS ESPAÇOS TANGENTE E COTANGENTE

- Note que a métrica pode ser usada para "converter" objetos que vivem em espaços diferentes:

$$A^\mu \quad \to \quad A_\mu = g_{\mu\nu} \, A^\nu$$

$$B_\mu \quad \to \quad B^\mu = g^{\mu\nu} \, B_\nu \qquad , \qquad \text{onde } g^{\alpha\mu} \, g_{\mu\beta} = \delta^\alpha_\beta$$

- A ***norma*** ("produto escalar no espaço com métrica g") permanece invariante:

$$||A||^2 = g_{\mu\nu} \, A^\mu \, A^\nu = A^\mu \, A_\mu$$

$$||B||^2 = g^{\mu\nu} \, B_\mu \, B_\nu = B^\nu \, B_\nu$$

$$||AB|| = A^\mu \, B_\mu = g_{\mu\nu} \, A^\mu \, B^\nu = g^{\mu\nu} \, A_\mu \, B_\nu \qquad , \qquad \text{etc.}$$

- Portanto, a métrica pode ser usada para "descer" um índice contra-variante, ou para "subir" um índice covariante:

$$T^\mu{}_\beta = g_{\beta\nu} \, T^{\mu\nu} \qquad , \qquad T_\alpha{}^\nu = g_{\alpha\mu} \, T^{\mu\nu} \qquad , \qquad T_{\alpha\beta} = g_{\alpha\mu} \, g_{\beta\nu} \, T^{\mu\nu}$$

$$Q^\mu{}_\beta = g^{\mu\alpha} \, Q_{\alpha\beta} \qquad , \qquad Q_\alpha{}^\nu = g^{\nu\beta} \, Q_{\alpha\beta} \qquad , \qquad Q^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} \, g^{\nu\beta} \, Q_{\alpha\beta} \qquad , \qquad \text{etc.}$$

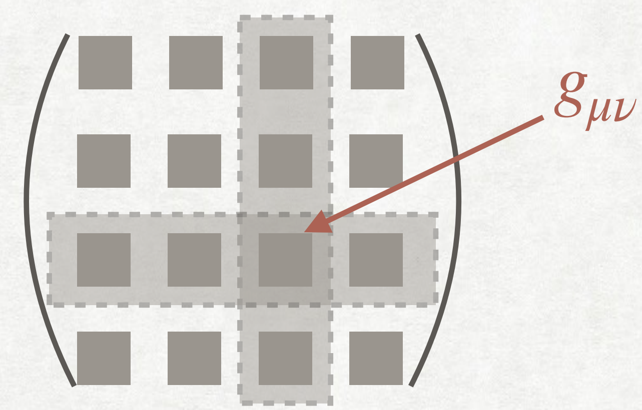
APLICAÇÕES DA DERIVADA COVARIANTE

- Divergente (covariante)

$$D_\alpha V^\alpha \equiv \partial_\alpha V^\alpha + \Gamma^\alpha_{\alpha\sigma} V^\sigma$$

- Essa contração da conexão, $\Gamma^\alpha_{\alpha\sigma}$, tem uma expressão conveniente em termos do ***determinante da métrica***:

$$\det(g) = \sum_{\mu\nu} Cof^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \ ,$$



onde $Cof^{\mu\nu}$ denota os *cofatores* da matriz $g_{\mu\nu}$

$$\Rightarrow \quad d[\det(g)] = Cof^{\mu\nu} dg_{\mu\nu}$$

- Por outro lado, a inversa da métrica, $g^{\mu\nu}$, é obtida tomando os cofatores dividos pelo determinante:

$$g^{\mu\nu} = \frac{Cof^{\mu\nu}}{\det(g)} \qquad \Rightarrow \qquad Cof^{\mu\nu} = \det(g)\, g^{\mu\nu}$$

- Portanto, podemos escrever que:

$$\frac{1}{\det g} d[\det(g)] = g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu}$$

APLICAÇÕES DA DERIVADA COVARIANTE

- Vamos agora usar essa expressão,

$$\frac{1}{\det g} d[\det(g)] = g^{\mu\nu}\, dg_{\mu\nu} \quad ,$$

A assinatura da métrica do espaço-tempo é -1: $\det \eta = -1$!

para escrever:

$$\frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \sqrt{|\det g|} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\, \partial_\alpha\, g_{\mu\nu}$$

- Agora, pela definição da conexão:

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma}\left(\partial_\mu\, g_{\nu\sigma} + \partial_\nu\, g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma\, g_{\mu\nu}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \Gamma^\alpha_{\mu\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma}\left(\partial_\mu\, g_{\alpha\sigma} + \partial_\alpha\, g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma\, g_{\mu\alpha}\right) = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma}\, \partial_\mu\, g_{\alpha\sigma}$$

- Portanto, chegamos na identidade:

$$\frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \sqrt{|\det g|} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\, \partial_\alpha\, g_{\mu\nu} = \Gamma^\mu_{\alpha\mu}$$

- Agora, retornando à nossa expressão para o divergente covariante, temos:

$$D_\alpha V^\alpha \;=\; \partial_\alpha V^\alpha + \Gamma^\sigma_{\alpha\sigma} V^\alpha \;=\; \partial_\alpha V^\alpha + V^\alpha \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \sqrt{|\det g|} \;=\; \frac{1}{\sqrt{|\det g|}}\, \partial_\alpha\left(\sqrt{|\det g|}\, V^\alpha\right)$$

APLICAÇÕES DA DERIVADA COVARIANTE

- Portanto, podemos escrever a 4-divergência covariante de um vetor como:

$$V^{\alpha}_{;\alpha} = D_\alpha V^\alpha = \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \partial_\alpha \left(\sqrt{|\det g|} V^\alpha \right)$$

- ***Exercício***: mostre que a 4-divergência de um tensor *anti-simétrico* $T^{\alpha\beta} = - T^{\beta\alpha}$, pode ser escrita como:

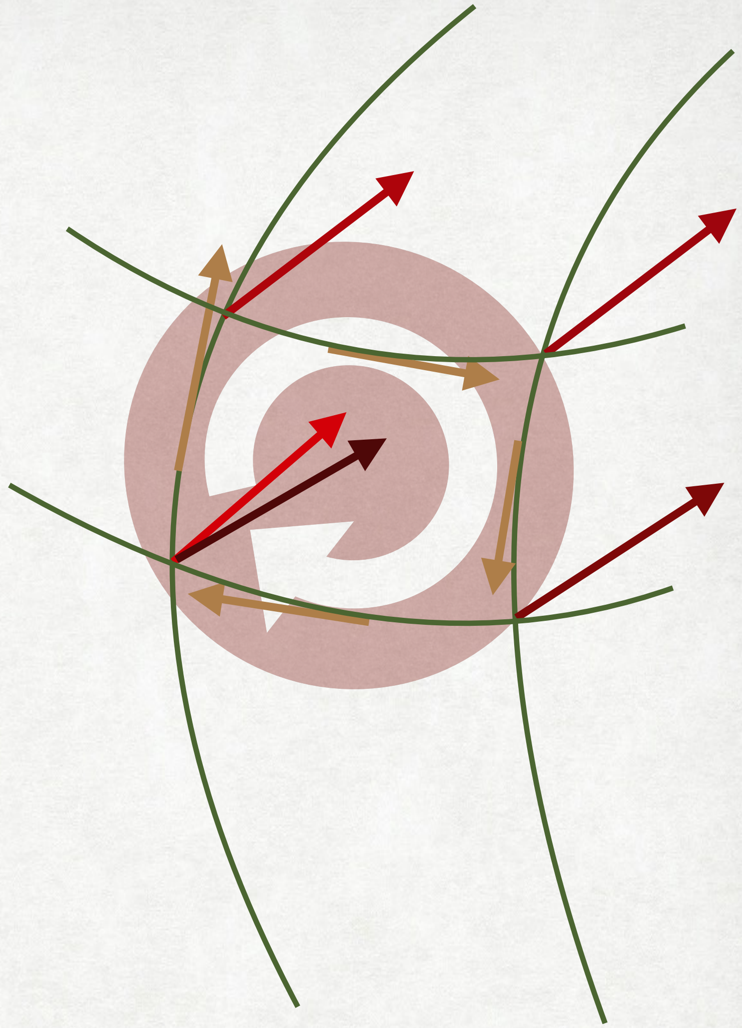
$$T^{\alpha\beta}_{;\alpha} = D_\alpha T^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \partial_\alpha \left(\sqrt{|\det g|} T^{\alpha\beta} \right)$$

- ***Corolário***: o D'Alembertiano covariante de um escalar (S) é definido como:

$$\Box S = g^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta S = D_\alpha \left(g^{\alpha\beta} D_\beta S \right) = D_\alpha \left(g^{\alpha\beta} \partial_\beta S \right)$$

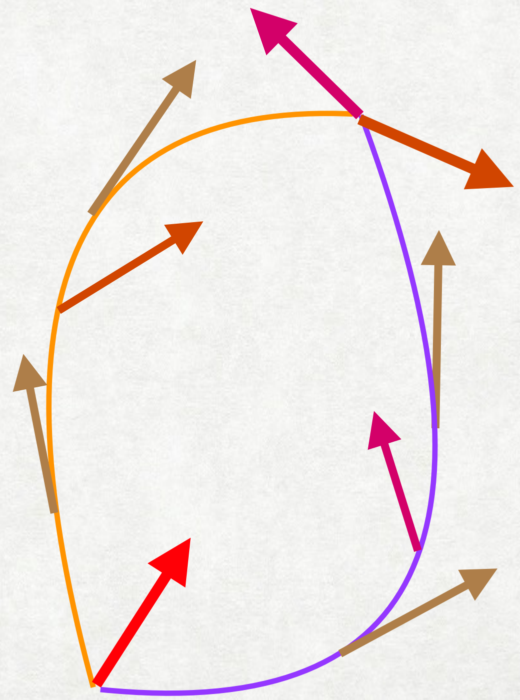
$$\Rightarrow \quad \Box S = \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \partial_\alpha \left(\sqrt{|\det g|} g^{\alpha\beta} \partial_\beta S \right)$$

CURVATURA



- Na aula passada vimos que, ao transportar um vetor por um circuito fechado, num espaço curvo, esse vetor se transforma.

- Ou, dito de outra forma, o mesmo vetor transportado por dois caminhos diferentes resulta em vetores diferentes, mesmo que o ponto final dos percursos seja o mesmo.



- Ou seja: a mudança por um caminho ou por outro pode ser diferente

CURVATURA

- Vamos lembrar que a *mudança* de um vetor num espaço curvo é na verdade descrita pela derivada covariante:

$$D_\alpha V^\mu \;=\; \partial_\alpha V^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\sigma} V^\sigma$$

- Em particular, a *segunda derivada* covariante é:

$$\begin{aligned} D_\beta D_\alpha V^\mu \;&=\; D_\beta\left(\partial_\alpha V^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\sigma} V^\sigma\right) \\ &=\; \partial_\beta\left(\cancel{\partial_\alpha V^\mu} + \underline{\Gamma^\mu_{\alpha\sigma}} V^\sigma\right) + \Gamma^\mu_{\beta\lambda}\left(\underline{\partial_\alpha V^\lambda} + \underline{\Gamma^\lambda_{\alpha\sigma}} V^\sigma\right) - \Gamma^\lambda_{\beta\alpha}\left(\cancel{\partial_\lambda V^\mu} + \cancel{\Gamma^\mu_{\lambda\sigma}} V^\sigma\right) \end{aligned}$$

- Agora vamos ***trocar a ordem*** dessas derivadas:

$$D_\alpha D_\beta V^\mu \;=\; \partial_\alpha\left(\cancel{\partial_\beta V^\mu} + \underline{\Gamma^\mu_{\beta\sigma}} V^\sigma\right) + \Gamma^\mu_{\alpha\lambda}\left(\underline{\partial_\beta V^\lambda} + \underline{\Gamma^\lambda_{\beta\sigma}} V^\sigma\right) - \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\left(\cancel{\partial_\lambda V^\mu} + \cancel{\Gamma^\mu_{\lambda\sigma}} V^\sigma\right)$$

- Subtraindo uma da outra temos:

$$\left(D_\alpha D_\beta - D_\beta D_\alpha\right) V^\mu \;=\; \underline{\left(\partial_\alpha \Gamma^\mu_{\beta\sigma} - \partial_\beta \Gamma^\mu_{\alpha\sigma}\right) V^\sigma + \left(\cancel{\Gamma^\mu_{\beta\sigma}\partial_\alpha - \Gamma^\mu_{\alpha\sigma}\partial_\beta}\right) V^\sigma} + \left(\underline{\cancel{\Gamma^\mu_{\alpha\lambda}\partial_\beta - \Gamma^\mu_{\beta\lambda}\partial_\alpha}}\right) V^\lambda + \left(\underline{\Gamma^\mu_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda_{\beta\sigma} - \Gamma^\mu_{\beta\lambda}\Gamma^\lambda_{\alpha\sigma}}\right) V^\sigma$$

CURVATURA

Georg F. B Riemann

- Podemos escrever, portanto:

$$\left(D_\alpha D_\beta - D_\beta D_\alpha\right) V^\mu = R^\mu{}_{\sigma\alpha\beta} V^\sigma$$

- O objeto que apareceu acima chama-se ***tensor de curvatura de Riemann***:

$$R^\mu{}_{\sigma\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha \Gamma^\mu_{\beta\sigma} - \partial_\beta \Gamma^\mu_{\alpha\sigma} + \Gamma^\mu_{\alpha\lambda} \Gamma^\lambda_{\beta\sigma} - \Gamma^\mu_{\beta\lambda} \Gamma^\lambda_{\alpha\sigma}$$

- Apesar de envolver as conexões (que ***não são tensores***), o tensor de Riemann ***é de fato um tensor*** (ele se transforma como um objeto com um índice contravariante, e três índices covariantes)

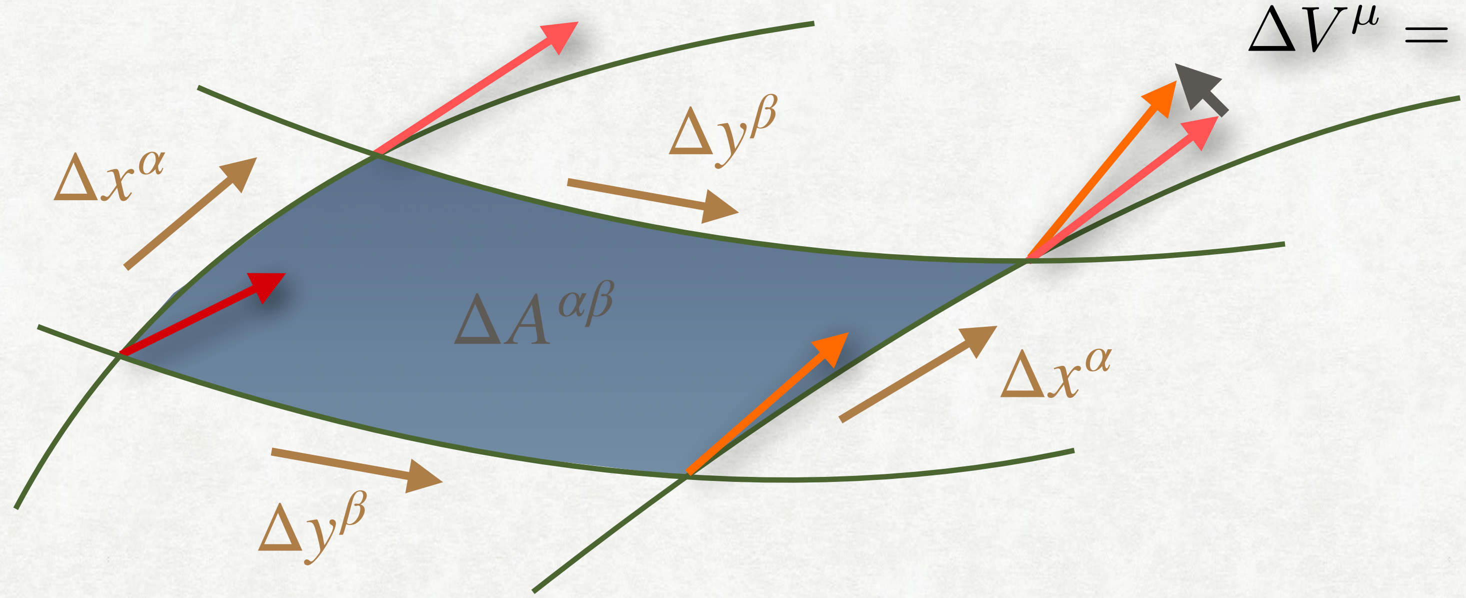
- O tensor é ***anti-simétrico*** nos dois índices finais:

$$R^\mu{}_{\sigma\alpha\beta} = - R^\mu{}_{\sigma\beta\alpha}$$

CURVATURA: INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

- Vamos voltar ao nosso *experimento mental* de transportar um vetor ao longo de dois caminhos que levam ao mesmo lugar:

$$\Delta V^\mu = R^\mu_{\ \sigma\alpha\beta} V^\sigma \Delta A^{\alpha\beta}$$



- Pela equação do transporte paralelo, temos que:

1) $V^\mu \xrightarrow{\Delta x} V^\mu + D_\alpha V^\mu \, \Delta x^\alpha \xrightarrow{\Delta y} \cancel{V^\mu} + D_\alpha \cancel{V^\mu} \, \Delta x^\alpha + D_\beta \left(\cancel{V^\mu} + D_\alpha V^\mu \, \Delta x^\alpha \right) \Delta y^\beta$

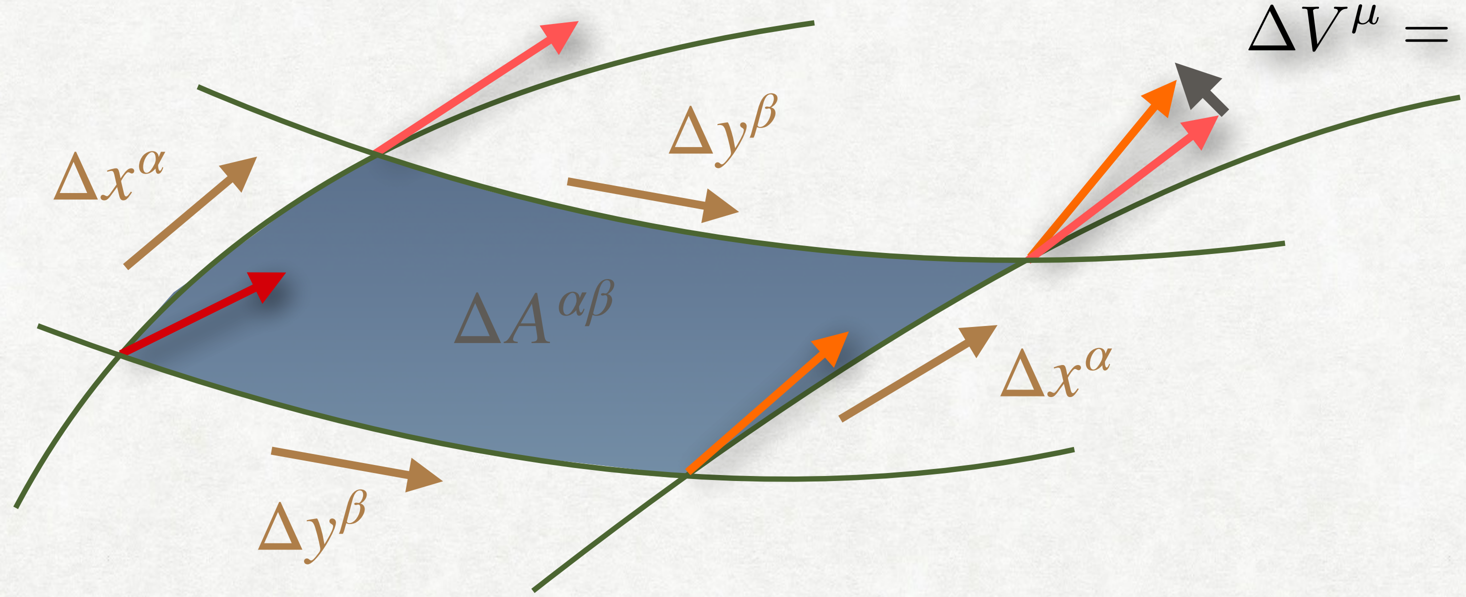
2) $V^\mu \xrightarrow{\Delta y} V^\mu + D_\beta V^\mu \, \Delta y^\beta \xrightarrow{\Delta x} \cancel{V^\mu} + D_\beta \cancel{V^\mu} \, \Delta y^\beta + D_\alpha \left(\cancel{V^\mu} + D_\beta V^\mu \, \Delta y^\beta \right) \Delta x^\alpha$

$$\Delta V^\mu = V^\mu_{\to\Delta y \to \Delta x} - V^\mu_{\to \Delta x \to \Delta y} = \left(D_\alpha D_\beta V^\mu - D_\beta D_\alpha V^\mu \right) \Delta x^\alpha \Delta y^\beta = R^\mu_{\ \sigma\alpha\beta} V^\sigma \Delta x^\alpha \Delta y^\beta$$

CURVATURA: INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

- Portanto, a curvatura se manifesta como uma deformação que depende da área do percurso

$$\Delta V^{\mu} = R^{\mu}_{\ \sigma\alpha\beta} V^{\sigma} \Delta A^{\alpha\beta}$$



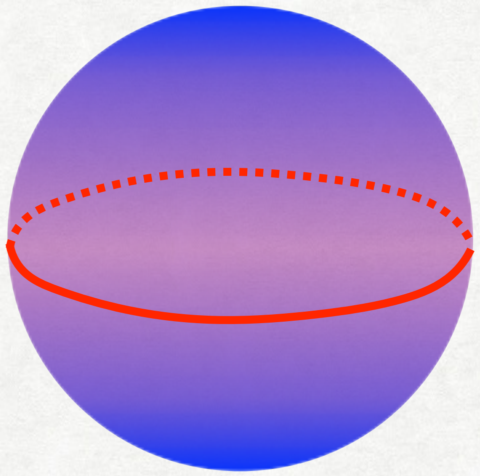
- Podemos escrever, usando a anti-simetria do tensor de Riemann:

$$\Delta V^{\mu} = R^{\mu}_{\ \sigma\alpha\beta} V^{\sigma} \Delta x^{\alpha} \Delta y^{\beta} = \frac{1}{2} R^{\mu}_{\ \sigma\alpha\beta} V^{\sigma} \left(\Delta x^{\alpha} \Delta y^{\beta} - \Delta x^{\beta} \Delta y^{\alpha} \right)$$

- Essa última expressão pode ser escrita como:

$$\Delta V^{\mu} = \frac{1}{2} \oint R^{\mu}_{\ \sigma\alpha\beta} V^{\sigma} x^{\alpha} dy^{\beta}$$

EXEMPLO DE CURVATURA: ESFERA 2D



- Vamos retornar à nossa esfera 2D:

$$ds^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2\,\theta\, d\varphi^2$$

$$\det g = \text{sen}^2\,\theta$$

$$\Gamma^1_{22} = -\,\text{sen}\,\theta\,\cos\theta \qquad , \qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}$$

- O tensor de Riemann é:

$$R^\mu{}_{\sigma\alpha\beta} = \partial_\alpha\,\Gamma^\mu_{\beta\sigma} - \partial_\beta\,\Gamma^\mu_{\alpha\sigma} + \Gamma^\mu_{\alpha\lambda}\,\Gamma^\lambda_{\beta\sigma} - \Gamma^\mu_{\beta\lambda}\,\Gamma^\lambda_{\alpha\sigma}$$

$$R^2{}_{121} = \cancel{\partial_2\,\Gamma^2_{11}} - \partial_1\,\Gamma^2_{21} + \Gamma^2_{2\lambda}\,\cancel{\Gamma^\lambda_{11}} - \Gamma^2_{1\lambda}\,\Gamma^\lambda_{21} = -\,\partial_\theta\,\frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta} - \left(\frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}\right)^2$$

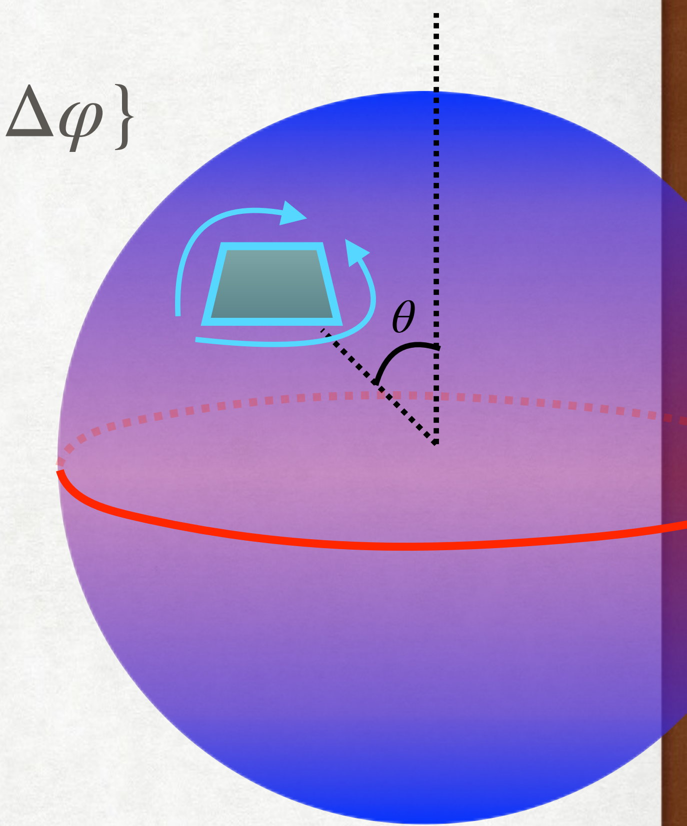
$$= 1 + \frac{\cos^2\theta}{\text{sen}^2\,\theta} - \left(\frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}\right)^2 = 1$$

$R^1{}_{212} = \text{sen}^2\,\theta$, todas as outras componentes zero ou iguais por simetria (***Mostre!***)

EXEMPLO DE CURVATURA: ESFERA 2D

- Agora podemos recalcular o transporte paralelo:

$$\Delta V^\mu = R^\mu{}_{\sigma\alpha\beta} V^\sigma \Delta x^\alpha \Delta y^\beta \quad , \quad \text{com } \Delta x = \{\Delta\theta, 0\} \text{ , } \Delta y = \{0, \Delta\varphi\}$$



$$\Delta V^1 = R^1{}_{\sigma\alpha\beta} V^\sigma \Delta x^\alpha \Delta y^\beta = R^1{}_{212} V^2 \Delta x^1 \Delta y^2$$

$$\Delta V^2 = R^2{}_{\sigma\alpha\beta} V^\sigma \Delta x^\alpha \Delta y^\beta = R^2{}_{112} V^1 \Delta x^1 \Delta y^2$$

- Ou seja:

$$\Delta V^\theta = (\mathrm{sen}^2\theta) \times V^\varphi \Delta\theta \Delta\varphi \qquad \text{(no exemplo da aula passada, } \theta \to \pi/2 \text{ !)}$$

$$\Delta V^\varphi = (-1) \times V^\theta \Delta\varphi \Delta\theta$$

- Portanto, recuperamos o resultado da aula passada!

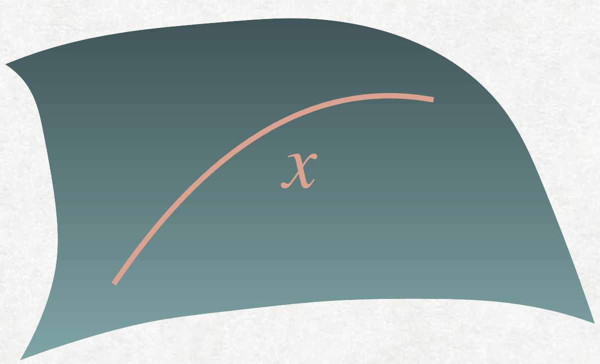
UM POUCO DE FÍSICA: O LIMITE NEWTONIANO

- Até agora ainda não falamos de fato em “gravidade”, apenas em referenciais, métricas, conexões, curvatura, etc.

- Antes de prosseguir explorando a curvatura do espaço-tempo, vamos ver como ficam as ***equações de movimento*** de um corpo qualquer, na presença de um ***espaço-tempo curvo*** — e que, portanto, pelo ***Princípio da Equivalência***, é indistinguível da presença de um ***campo gravitacional.***

- Num espaço-tempo curvo a trajetória de uma partícula é dada pela Equação da Geodésica:

$$\frac{d^2x^\gamma}{d\tau^2} + \Gamma^\gamma_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$



- Agora, vamos supor que o nosso sistema físico é não-relativístico, no sentido de que qualquer parte desse sistema se move com velocidades pequenas, $v/c \ll 1$

UM POUCO DE FÍSICA: O LIMITE NEWTONIANO

- O limite não-relativístico implica que uma série de termos devem ser desprezados na trajetória x^μ da partícula:

$$\frac{d\,x^0}{c\,d\tau} \simeq 1 \qquad \text{(o tempo próprio é praticamente igual ao tempo do referencial)}$$

$$\left|\frac{d\,x^i}{c\,d\tau}\right| \simeq \frac{1}{c}\left|\frac{d\,x^i}{dt}\right| \simeq \frac{v}{c} \ll 1$$

- Vamos agora assumir que o espaço-tempo é ***quase plano***: ou seja, que a métrica é muito próxima da métrica de Minkowski, com apenas umas ***pequenas correções*** ("perturbações"):

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon\, h_{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \qquad , \qquad \text{com } \epsilon \ll 1 \text{ uma constante.}$$

- Note que essas perturbações podem depender de t, x, y, z

UM POUCO DE FÍSICA: O LIMITE NEWTONIANO

- Uma métrica que é aproximadamente dada pela métrica de Minkowski admite algumas simplificações:

$$g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu} + \epsilon\, h_{\mu\nu}(x)$$

- A inversa dessa métrica (ou seja, a métrica "contra-variante") é:

$$g^{\mu\nu} \simeq \eta^{\mu\nu} - \epsilon\, h^{\mu\nu}(x) \quad ,$$

com $h^{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$ (todas as componentes são iguais)

- Vamos verificar:

$$g^{\alpha\mu} g_{\mu\nu} \simeq \left(\eta^{\alpha\mu} - \epsilon\, h^{\alpha\nu}\right) \left(\eta_{\mu\nu} + \epsilon\, h_{\mu\nu}\right)$$

$$\simeq \delta^{\alpha}_{\nu} + \eta^{\alpha\mu} \epsilon\, h_{\mu\nu} - \epsilon\, h^{\alpha\mu} \eta_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \;=\; \delta^{\alpha}_{\nu} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$ (***Verifique!***)

UM POUCO DE FÍSICA: O LIMITE NEWTONIANO

- Portanto temos:

$$g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu} + \epsilon\, h_{\mu\nu}(x) \quad , \quad g^{\mu\nu} \simeq \eta^{\mu\nu} - \epsilon\, h^{\mu\nu}(x)$$

- Com isso, as conexões até ordem $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ ficam:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} \left(\partial_\mu\, g_{\nu\sigma} + \partial_\nu\, g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma\, g_{\mu\nu} \right) \simeq \frac{\epsilon}{2} \eta^{\alpha\sigma} \left(\partial_\mu\, h_{\nu\sigma} + \partial_\nu\, h_{\sigma\mu} - \partial_\sigma\, h_{\mu\nu} \right)$$

- Em particular, temos que:

$$\Gamma^{i}_{00} \simeq \frac{\epsilon}{2} \delta^{ij} \left(\partial_0\, h_{0j} + \partial_0\, h_{j0} - \partial_j\, h_{00} \right) \simeq \frac{\epsilon}{2} \delta^{ij} \left(2\, \partial_0\, h_{0j} - \partial_j\, h_{00} \right)$$

- Mas assim como as velocidades são muito pequenas (***aproximação não-relativística***), as derivadas com relação ao tempo também são pequenas, $\partial_0 = \partial/\partial(ct) = (1/c)\partial_t$ (essa chama-se ***aproximação quase-estática***). Portanto, podemos aproximar:

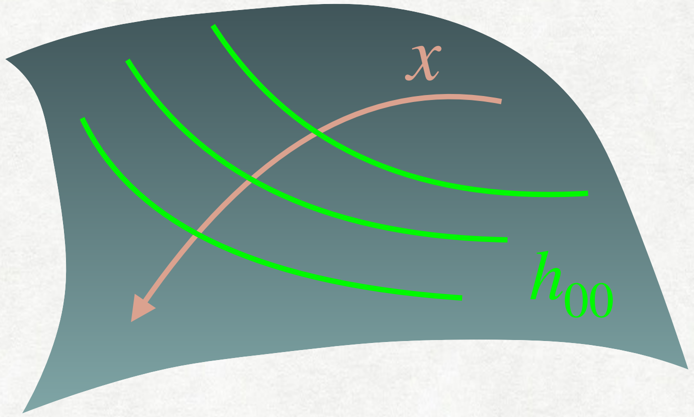
$$\Gamma^{i}_{00} \simeq -\frac{\epsilon}{2} \partial_i\, h_{00}$$

UM POUCO DE FÍSICA: O LIMITE NEWTONIANO

- Substituindo essa expressão na Equação da Geodésica temos:

$$\frac{d^2x^\gamma}{d\tau^2} + \Gamma^\gamma_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{00}\frac{dx^0}{dt}\frac{dx^0}{dt} \simeq 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2x^i}{dt^2} + \left(-\frac{\epsilon}{2}\,\partial_i h_{00}\right) c^2 \simeq 0$$



- Mas agora vamos lembrar da equação do movimento num campo gravitacional:

$$\frac{d^2\overrightarrow{x}}{dt^2} = -\overrightarrow{\nabla}\Phi$$

- Portanto, já descobrimos algo muito importante: no limite de campos gravitacionais fracos, de curvatura do espaço-tempo pequena, e de velocidades não-relativísticas, o ***potencial gravitacional Newtoniano*** pode ser identificado com a perturbação da métrica:

$$\epsilon\, h_{00} \to -\frac{2}{c^2}\Phi$$

(Note que Φ/c^2 é de fato ***adimensional***, assim como $h_{\mu\nu}$!)

- Em outras palavras, em ***quase todo lugar do universo*** devemos ter $g_{00} \simeq -1 - 2\dfrac{\Phi}{c^2}$!!

UM POUCO DE FÍSICA: O REDSHIFT GRAVITACIONAL

- Vamos novamente nos lembrar que o tempo próprio é dado por:

$$d\tau^2 = -\frac{ds^2}{c^2} = -\frac{1}{c^2}\,\eta_{\alpha\beta}\,dy^\alpha dy^\beta = -\frac{1}{c^2}\,g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta$$

- Ou seja, podemos escrever, no referencial x:

$$\frac{\Delta\tau^2}{\Delta t^2} = -\frac{1}{c^2}\,g_{\alpha\beta}\,\frac{\Delta x^\alpha}{\Delta t}\frac{\Delta x^\beta}{\Delta t}$$

- Vamos supor que os observadores (e portanto os relógios) do referencial x estão (*quase*-) estáticos, ou seja, $\Delta x^i \simeq 0$. Então, temos que:

$$\frac{\Delta\tau^2}{\Delta t^2} = -\frac{1}{c^2}\,g_{00}\,\frac{\Delta(ct)}{\Delta t}\frac{\Delta(ct)}{\Delta t}$$

- Ou seja, usando o resultado acima, do limite Newtoniano, temos que:

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta t} = \sqrt{-g_{00}} \simeq \sqrt{1 + 2\frac{\Phi}{c^2}}$$

UM POUCO DE FÍSICA: O REDSHIFT GRAVITACIONAL

- Em particular, note que dois relógios em posições diferentes medem intervalos de tempo:

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta t} = \sqrt{-g_{00}} \simeq \sqrt{1 + 2\frac{\Phi}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = \sqrt{\frac{g_{00}(x_1)}{g_{00}(x_2)}} \simeq \sqrt{\frac{1 + 2\frac{\Phi(x_1)}{c^2}}{1 + 2\frac{\Phi(x_2)}{c^2}}}$$

- Em termos das frequências de uma fonte de luz que é emitida de um ponto ao outro, temos:

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \sqrt{\frac{g_{00}(x_1)}{g_{00}(x_2)}} \simeq \sqrt{\frac{1 + 2\frac{\Phi(x_1)}{c^2}}{1 + 2\frac{\Phi(x_2)}{c^2}}} \simeq 1 + \left[\frac{\Phi(x_1)}{c^2} - \frac{\Phi(x_2)}{c^2}\right]$$

- Portanto, podemos fazer uma ***previsão***: dois relógios idênticos, um colocado na superfície da Terra (R), e outro colocado numa torre a uma altura ΔR , verão o tempo passar de um modo diferente, a saber:

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} - 1 = \frac{\Delta\nu}{\nu} \simeq \frac{GM}{c^2\, R} - \frac{GM}{c^2(R + \Delta R)} \simeq \frac{GM\Delta R}{c^2\, R^2} = \frac{g\, \Delta R}{c^2}$$

UM POUCO DE FÍSICA: O REDSHIFT GRAVITACIONAL

- Vários experimentos foram feitos para testar esse "redshift gravitacional", o mais famoso deles conhecido como o da "Torre de Harvard":

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \simeq \frac{g\,\Delta R}{c^2}$$

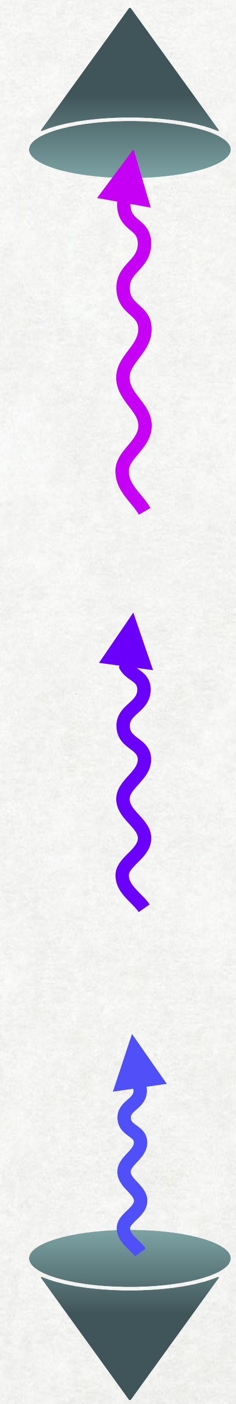
22,5 m

- Naquele experimento, Robert Pound & Glen Rebka usaram raios-γ para medir esse efeito. Notem que no caso deles:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \simeq \frac{(10m/s)\times(22{,}5m)}{(3.10^8 m/s)^2} \simeq 10^{-15} \quad !!!$$

UM POUCO DE FÍSICA: O REDSHIFT GRAVITACIONAL

- A interpretação desse efeito é muito simples: imagine um raio de luz que sobe da base da torre para o topo.
- Ao subir, esse raio de luz vai subindo pelo potencial gravitacional da Terra.
- Enquanto ele sobre nesse potencial, um pouco da energia do fóton vai sendo “perdida" para o campo gravitacional (ou seja, ele troca energia cinética pela energia potencial)
- Mas a energia do fóton é a mesma coisa que a sua frequência. Então à medida que ele sobe a torre, sua energia diminui, sua frequência diminui, e seu comprimento de onda aumenta. Daí o nome: “redshift gravitacional”
- Muitos outros experimentos foram realizados depois da Torre de Harvard, sempre verificando com precisão esse fenômeno do redshift gravitacional.
- Note que essa é uma ***consequência do Princípio da Equivalência*** — ainda não dissemos nada sobre a Teoria da Gravitação de Einstein, a Relatividade Geral!



PARA A AULA QUE VEM:

- 3a lista de exercícios online hoje ou amanhã! (P/ 30/4)
- Leitura: S. Carroll, Capítulo 3 (tudo que você conseguir!)