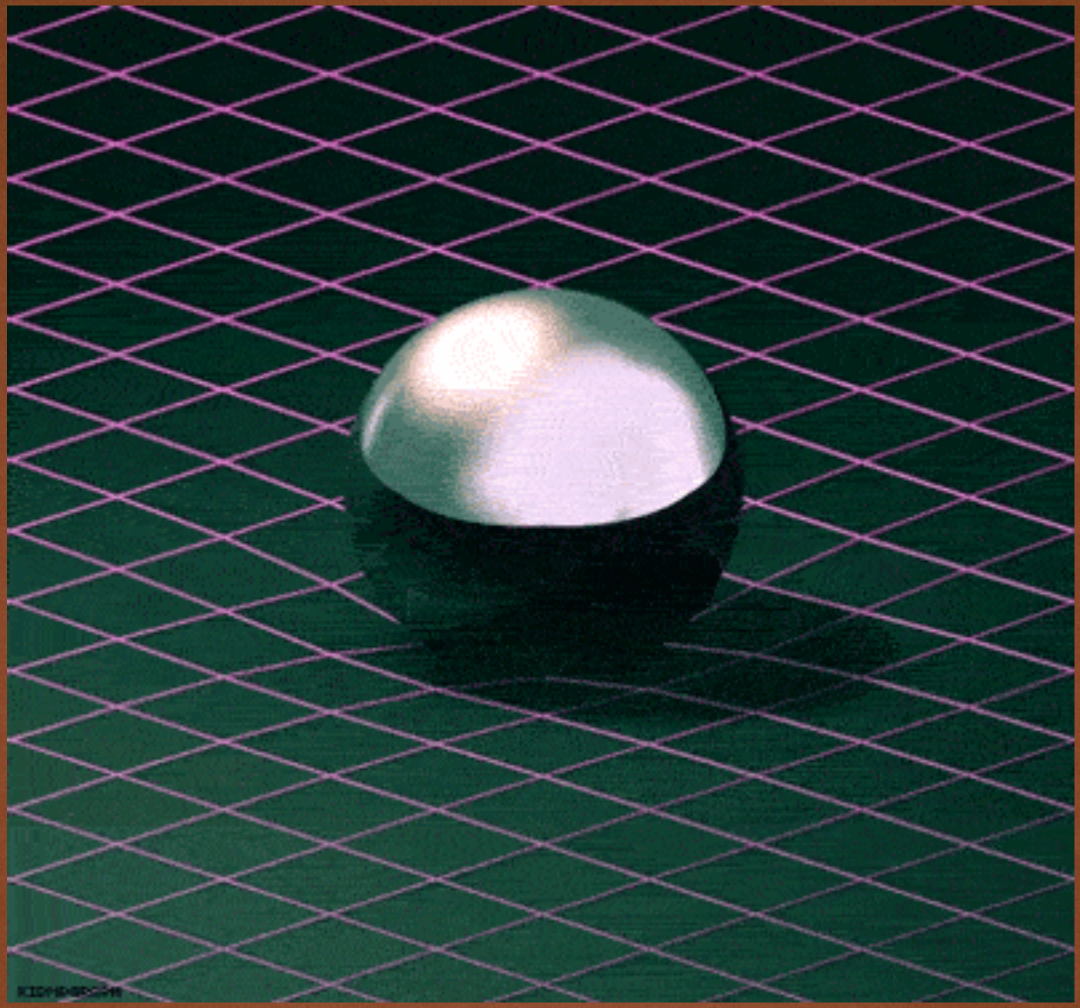
INTRODUÇÃO À



RELATIVIDADE

AULA 10 - 01/04/2020

- O Princípio da Equivalência
- A Invariância Local de Lorentz (***LLI***, *Local Lorentz Invariance*)
- A Equação da Geodésica
- As conexões (símbolos de Christoffel)
- Equação da Geodésica - *reload*
- Exemplo simples de um espaço curvo: a esfera 2D
- **Leitura: Capítulo 2 do Carroll**

O PRINCÍPIO DA EQUIVALÊNCIA

- Até agora consideramos apenas uma classe de referenciais muito particular — os referenciais inerciais.

- Vimos que esses referenciais inerciais se relacionam por meio das transformações:

$dr^{'\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\, dr^{\alpha}$, onde Λ é uma Transformação de Lorentz.

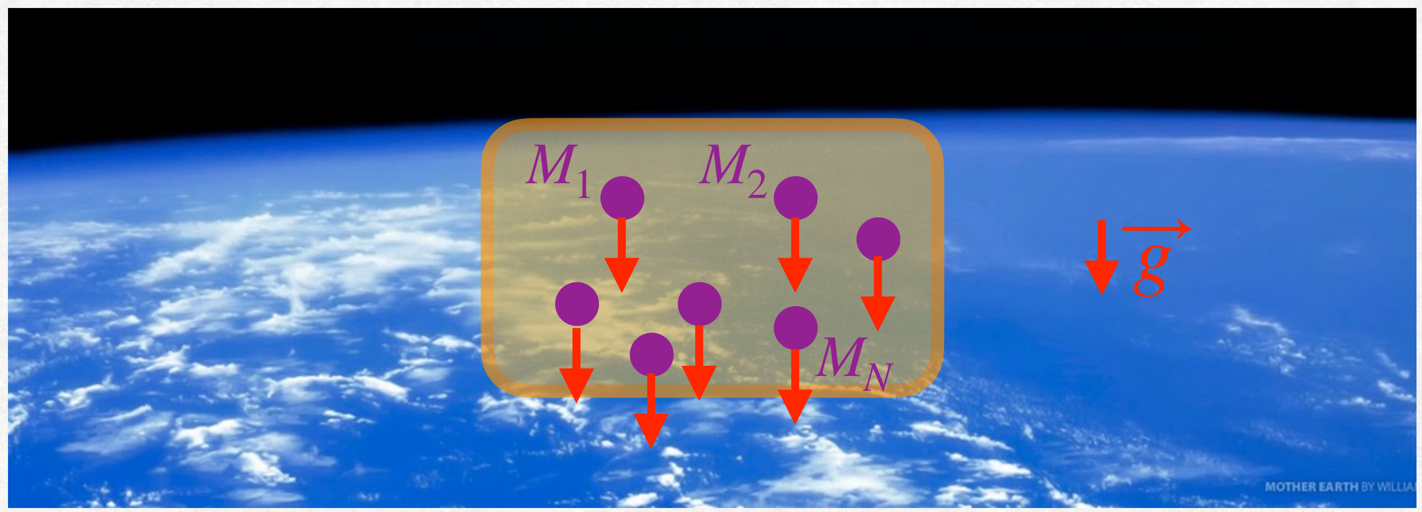
- Podemos escrever isso do seguinte modo:

$$\frac{dr^{'\mu}}{dr^{\alpha}} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \quad \text{ou, de modo equivalente,} \quad \frac{dr^{\alpha}}{dr^{'\mu}} = (\Lambda^{\mu}{}_{\alpha})^{-1} = \Lambda_{\mu}{}^{\alpha}$$

- Mas o que aconteceria num referencial ***qualquer***?...

O PRINCÍPIO DA EQUIVALÊNCIA

- Vamos considerar um conjunto de *N* partículas que podem interagir entre si, aqui na Terra:



- Claramente, a *n*-ésima partícula estará sujeita a uma força:

$$M_n \frac{d^2 \vec{x}_n}{dt^2} = M_n \vec{g} + \sum_{m \neq n}^{N} \vec{F}(\vec{x}_n - \vec{x}_m)$$

O PRINCÍPIO DA EQUIVALÊNCIA

- Vamos agora efetuar uma transformação de coordenadas que não é nem uma Tr. de Galileu nem uma Tr. de Lorentz:

$$\vec{y} = \vec{x} - \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \quad , \quad \text{portanto} \quad \vec{y}_n = \vec{x}_n - \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

- Nessas novas coordenadas a aceleração é:

$$\frac{d^2\vec{y}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} - \vec{g}$$

Referencial acelerado, em "queda livre" com a aceleração da gravidade

- Como $\vec{y}_n - \vec{y}_m = \vec{x}_n - \vec{x}_m$, a equação de movimento fica:

$$M_n \frac{d^2\vec{y}_n}{dt^2} = \sum_{m \neq n}^{N} \vec{F}(\vec{y}_n - \vec{y}_m)$$

O PRINCÍPIO DA EQUIVALÊNCIA

- Nesse referencial acelerado (portanto, ***não-inercial***), o campo gravitacional da Terra foi anulado.

- O observador no referencial $\overrightarrow{y}$ verifica as mesmas leis da Física comparado com o referencial $\overrightarrow{x}$, exceto que não há campo gravitacional.

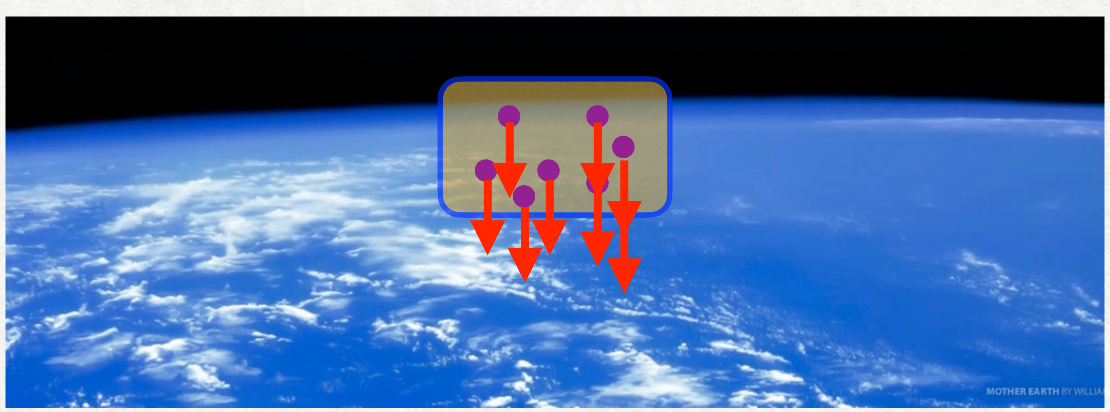
- O ***Princípio da Equivalência*** afirma que esse "cancelamento" do campo gravitacional que ocorre no "referencial de queda livre" é fundamental — ou seja, sempre podemos efetivamente anular o campo gravitacional ao permitirmos que todos os corpos se movam livremente sob o efeito de um campo gravitacional.

O PRINCÍPIO DA EQUIVALÊNCIA

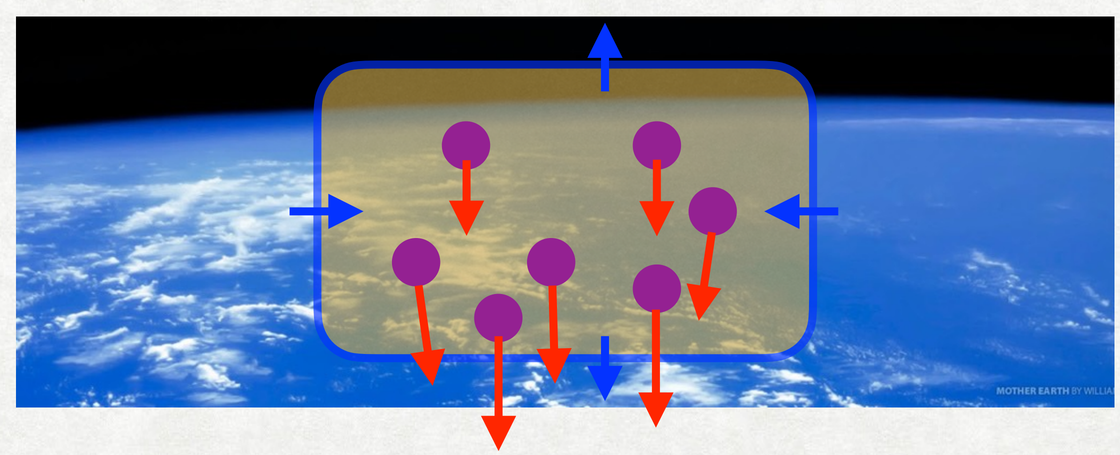
- Note que isso só é possível por causa da equivalência dos conceitos de massa inercial e massa gravitacional:

$$\cancel{m_I}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{G\,\cancel{m_G}\,M}{r^2}\hat{x} \quad , \quad m_I = m_G$$

- Note também que isso só é possível quando o campo gravitacional for o mesmo para todos os corpos:



campo gravitacional *homogêneo* dentro do “laboratório"



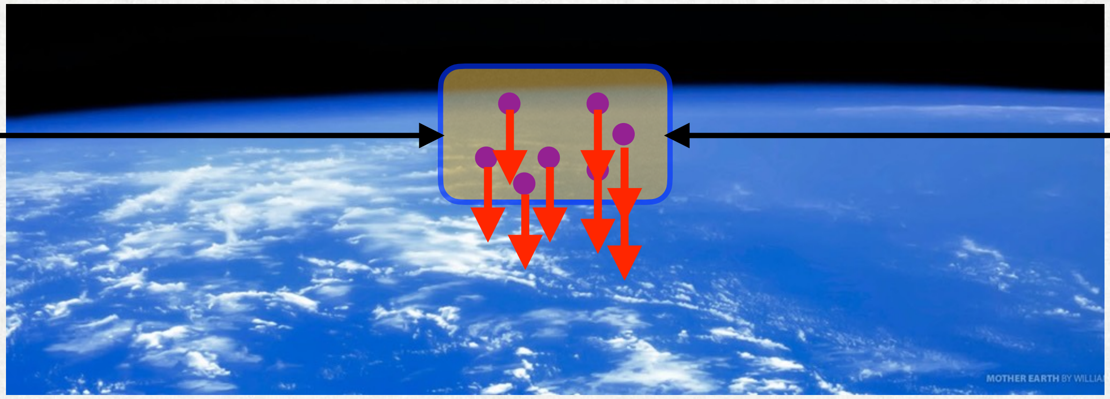
laboratório “grande”: *forças de maré* = gradiente do campo gravitacional

O PRINCÍPIO DA EQUIVALÊNCIA

- Isso nos leva a uma formulação do *Princípio da Equivalência*:

"Em qualquer lugar e em qualquer instante, na presença de um campo gravitacional arbitrário, é sempre possível encontrar um referencial inercial, em queda livre nesse campo gravitacional, tal que, numa região suficientemente pequena e durante um intervalo de tempo suficientemente curto, tal que nesse referencial todas as leis da Física têm a mesma forma que num referencial não-acelerado, e sem campos gravitacionais."

No ref. em queda livre valem as leis da Física "normais", sem campo gravitacional



Em particular, no ref. em queda livre vale a Invariância de Lorentz — nesse "local"

CONSEQUÊNCIAS DO PRINCÍPIO DA EQUIVALÊNCIA

- Vamos então tomar o referencial de um corpo que está em "queda livre", e portanto esse referencial é "localmente" inercial", no sentido definido acima.

- A trajetória desse corpo, em termos do seu tempo próprio, é uma trajetória ***não-acelerada***, ou seja:

$$\frac{d^2 y^\mu}{d\tau^2} = 0 \,,$$

onde lembre-se que $d\tau^2 = -\frac{1}{c^2} ds^2 = -\frac{1}{c^2}\, \eta_{\alpha\beta}\, dy^\alpha dy^\beta$.

- Agora, como fica isso num ***referencial qualquer***?

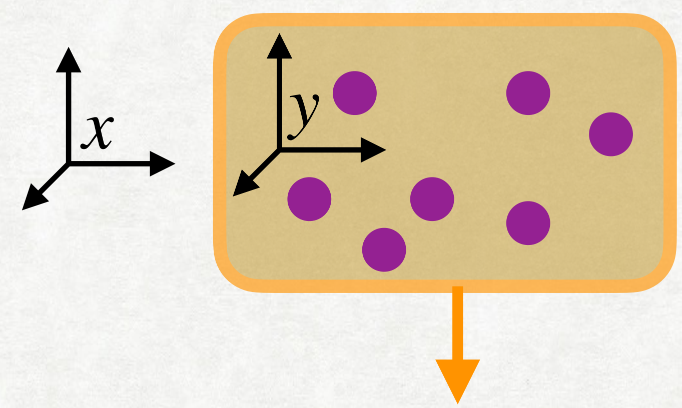
CONSEQUÊNCIAS DO PRINCÍPIO DA EQUIVALÊNCIA

- Vamos então pensar num **referencial arbitrário** (x^μ)

- Partindo da trajetória não-acelerada no **referencial localmente inercial** (y^μ), temos:

$$0 = \frac{d^2y^\mu}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau}\frac{dy^\mu}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{dx^\alpha}{d\tau}$$

$$= \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 y^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}$$



- Nesse momento é conveniente multiplicar por $\dfrac{\partial x^\nu}{\partial y^\mu}$ e somar em μ, obtendo:

$$0 = \underbrace{\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\mu}\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha}}_{\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\mu}\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\alpha} = \delta^\nu_\alpha}\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\mu}\frac{\partial^2 y^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = \frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} + \underbrace{\left(\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\mu}\frac{\partial^2 y^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\right)}_{\equiv\ \Gamma^\nu_{\alpha\beta}}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}$$

CONSEQUÊNCIAS DO PRINCÍPIO DA EQUIVALÊNCIA

- Chegamos assim à famosa Equação da Geodésica:

$$\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \quad , \text{ onde } \quad \Gamma^\nu_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\mu}\frac{\partial^2 y^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\right)$$

  são chamados de ***conexões***, ou ***Símbolos de Christoffel***.

  (Note que as conexões são simétricas por trocas $\Gamma^\nu_{\alpha\beta} = \Gamma^\nu_{\beta\alpha}$)

- Como se pode ver pela equação acima, a aceleração ($d^2x/d\tau^2$) é determinada pelas conexões.

- Ou, pelo Princípio da Equivalência, o ***campo gravitacional no referencial*** x ***é dado pelas conexões***.

CONSEQUÊNCIAS DO PRINCÍPIO DA EQUIVALÊNCIA

- Antes de calcular essas conexões de um modo um pouco mais prático, vamos antes nos relembrar que a distância invariante, definida no referencial localmente inercial (para o qual vale a Invariância de Lorentz local), é:

$$ds_y^2 = \eta_{\alpha\beta}\, dy^\alpha dy^\beta = ds_x^2$$

$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = \eta_{\alpha\beta}\, dy^\alpha dy^\beta$

- Portanto, temos que:

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \right) \left(\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu \right) \equiv g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$$, onde

A métrica também é simétrica, $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$

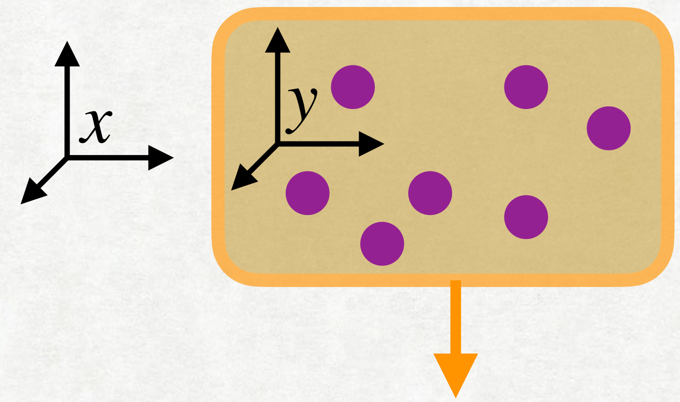
$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu}$$ é a **métrica do espaço-tempo nas coordenadas** x.

- A ***métrica*** $g_{\mu\nu}$ e as ***conexões*** $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ são os ***objetos fundamentais*** das teorias baseadas no Princípio da Equivalência — as chamadas ***teorias covariantes da gravidade***.

AS CONEXÕES (SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL)

- Agora vamos ***determinar as conexões em termos da métrica*** nesse referencial arbitrário x. Em termos das coordenadas do sistema localmente inercial temos:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial y^{\beta}} \frac{\partial^2 y^{\beta}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}}$$



$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial y^{\beta}}{\partial x^{\nu}}$$

- Vamos agora multiplicar as conexões por $\partial y^{\lambda} / \partial x^{\alpha}$ (e somando em α):

$$\frac{\partial y^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \underbrace{\frac{\partial y^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial y^{\beta}}}_{= \delta^{\lambda}_{\beta}} \frac{\partial^2 y^{\beta}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\mu}} = \delta^{\lambda}_{\beta} \frac{\partial^2 y^{\beta}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} = \frac{\partial^2 y^{\lambda}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}}$$ (guarde isso!)

AS CONEXÕES (SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL)

- Por outro lado, temos que:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} = \frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu}\right)$$

$$= \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu}\right)$$

$$= \eta_{\alpha\beta}\left(\underbrace{\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\sigma \partial x^\mu}}_{\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\gamma}\Gamma^\gamma_{\sigma\mu}}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} + \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\underbrace{\frac{\partial^2 y^\beta}{\partial x^\sigma \partial x^\nu}}_{\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\gamma}\Gamma^\gamma_{\sigma\nu}}\right)$$

- Mas acima encontramos que $\dfrac{\partial y^\lambda}{\partial x^\alpha}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \dfrac{\partial^2 y^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$

AS CONEXÕES (SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL)

- Portanto, podemos escrever:

$$\partial_\sigma g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\gamma}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu}\Gamma^\gamma_{\sigma\mu} + \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\gamma}\Gamma^\gamma_{\sigma\nu}\right)$$

- Mas também vimos que a métrica é $g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu}$, portanto:

$$\partial_\sigma g_{\mu\nu} = g_{\gamma\nu}\Gamma^\gamma_{\sigma\mu} + g_{\mu\gamma}\Gamma^\gamma_{\sigma\nu}$$

- Aqui já podemos notar uma relação muito importante: as conexões são basicamente as derivadas da métrica! E no referencial localmente inercial $x \to y$, a métrica é $g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}$, cujas derivadas são nulas, e portanto $\Gamma(x) \to \Gamma(y) \stackrel{!}{=} 0$

AS CONEXÕES (SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL)

- Obtivemos, acima, que:

$$-\ \partial_\sigma g_{\mu\nu} = \cancel{g_{\gamma\nu}}\,\Gamma^\gamma_{\sigma\mu} + \cancel{g_{\mu\gamma}}\,\Gamma^\gamma_{\nu\sigma}$$

, portanto “trocando" os índices:

$$+\ \partial_\nu g_{\sigma\mu} = \cancel{g_{\gamma\mu}}\,\Gamma^\gamma_{\nu\sigma} + \underline{g_{\sigma\gamma}}\,\Gamma^\gamma_{\mu\nu}$$

$$+\ \partial_\mu g_{\nu\sigma} = \underline{g_{\gamma\sigma}}\,\Gamma^\gamma_{\mu\nu} + \cancel{g_{\nu\gamma}}\,\Gamma^\gamma_{\sigma\mu}$$

$$\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu} = 2\, g_{\sigma\gamma}\,\Gamma^\gamma_{\mu\nu}$$

- Finalmente, podemos ***inverter*** a métrica do lado direito dessa equação, definindo o inverso da métrica como:

$$g^{\mu\nu} = (g_{\mu\nu})^{-1} \quad \leftrightarrow \quad g^{\mu\nu} g_{\nu\alpha} = \delta^\mu_\alpha$$

AS CONEXÕES (SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL)

- Ou seja, chegamos na expressão:

$$g^{\alpha\sigma}\left(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}\right) = 2\, g^{\alpha\sigma}\, g_{\sigma\gamma}\, \Gamma^\gamma_{\mu\nu} = 2\, \delta^\alpha_\gamma\, \Gamma^\gamma_{\mu\nu} = 2\, \Gamma^\alpha_{\mu\nu}$$

- Finalmente, chegamos na expressão final para as conexões em termos da métrica e suas derivadas:

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma}\left(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}\right)$$

- Vamos lembrar que, pela sua própria definição, num **sistema localmente inercial as conexões se anulam** ↔ **No sistema em "queda livre" não há campos gravitacionais**

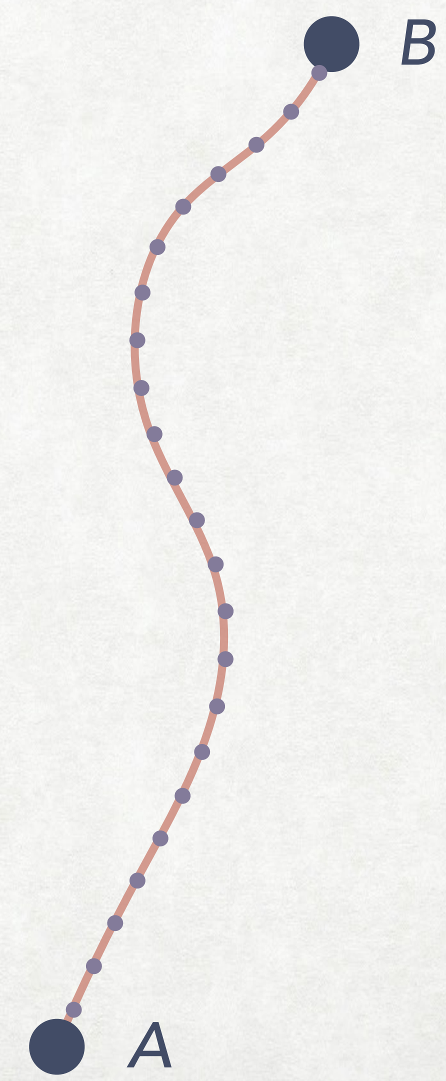
- Para verificar, basta lembrar que passando para o referencial inercial, $x \to y$, temos $g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}$, cujas **derivadas** são **zero**!

EQUAÇÃO DA GEODÉSICA PELO PRINCÍPIO VARIACIONAL

- Podemos impor a preservação da noção da distância invariante ao longo de um movimento por meio da minimização de uma "ação":

$T = \int_A^B d\tau$, onde $d\tau^2 = -\frac{1}{c^2} ds^2$ denota o tempo próprio de uma partícula

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$$



- Ao longo da trajetória podemos definir qualquer parâmetro que siga a evolução da partícula à medida que ela se move. Esse parâmetro (λ) pode ser praticamente qualquer coisa deve, mas ele naturalmente tem que ser **monotônico** com o tempo próprio. Isso é chamado de ***parâmetro afim***.

- Em termos de um parâmetro afim, a ação dessa partícula fica:

$$T = \int_A^B d\lambda \frac{d\tau}{d\lambda} = \int_A^B d\lambda \frac{1}{c} \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}$$

EQUAÇÃO DA GEODÉSICA PELO PRINCÍPIO VARIACIONAL

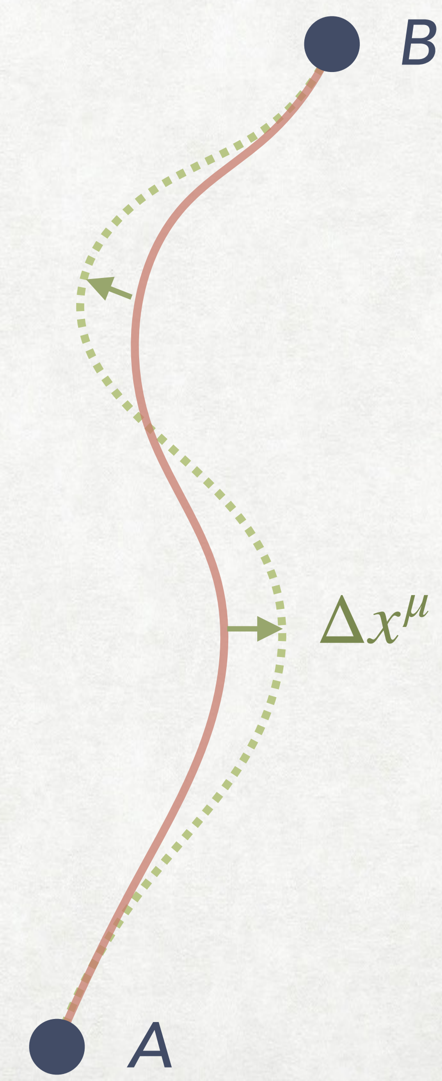
- Ao longo dessa trajetória, o intervalo entre A e B deve ser um extremo. Isso quer dizer que qualquer desvio da trajetória real aumentaria essa distância entre A e B.

  Ou seja, qualquer desvio da trajetória física, $x^\mu(\lambda) \to x^\mu(\lambda) + \Delta x^\mu(\lambda)$, com $\Delta x^\mu \big|_A = \Delta x^\mu \big|_B = 0$, aumentaria a distância total T

- Dito de outra maneira, a trajetória física $x^\mu(\lambda)$ é caracterizada pela condição de que T é um mínimo sob variações $\Delta x^\mu(\lambda)$

- Ou seja, vamos tomar a variação:

$$T + \Delta T = \int_A^B \frac{d\lambda}{c} \sqrt{-g_{\mu\nu}(x + \Delta x) \frac{d(x^\mu + \Delta x^\mu)}{d\lambda} \frac{d(x^\nu + \Delta x^\nu)}{d\lambda}}$$



EQUAÇÃO DA GEODÉSICA PELO PRINCÍPIO VARIACIONAL

- Vamos começar expandindo o tempo dentro da raiz em uma série de Taylor, assumindo que o desvio Δx^μ é pequeno:

$$\left[-g_{\mu\nu}(x+\Delta x)\frac{d(x^\mu+\Delta x^\mu)}{d\lambda}\frac{d(x^\nu+\Delta x^\nu)}{d\lambda}\right]^{1/2}$$

$$\simeq \left[-g_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}(x)\Delta x^\sigma \frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} - g_{\mu\nu}(x)\frac{d\Delta x^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} - g_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{d\Delta x^\nu}{d\lambda} + \mathcal{O}(\Delta x^2)\right]^{1/2}$$

$$\simeq \left[-g_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\right]^{1/2} +$$

$$+\frac{1}{2}\left[-g_{\mu'\nu'}(x)\frac{dx^{\mu'}}{d\lambda}\frac{dx^{\nu'}}{d\lambda}\right]^{-1/2} \times \left[-\partial_\sigma g_{\mu\nu}(x)\Delta x^\sigma \frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} - 2g_{\mu\nu}(x)\frac{d\Delta x^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} + \mathcal{O}(\Delta x^2)\right]$$

EQUAÇÃO DA GEODÉSICA PELO PRINCÍPIO VARIACIONAL

- Vamos agora ficar só com a variação da distância total entre os pontos A e B, ou seja, ΔT, até primeira ordem em Δx:

$$\Delta T = -\int_A^B \frac{d\lambda}{c}\left[-g_{\mu'\nu'}(x)\frac{dx^{\mu'}}{d\lambda}\frac{dx^{\nu'}}{d\lambda}\right]^{-1/2}\left[\frac{1}{2}\partial_\sigma g_{\mu\nu}(x)\,\Delta x^\sigma\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}+g_{\mu\nu}(x)\frac{d\Delta x^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\right]$$

$$\sqrt{-\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2}$$

- Neste momento é meio inútil seguir usando esse "parâmetro afim" (eu só usei essa oportunidade para introduzir esse conceito), e podemos usar o melhor parâmetro afim de todos, que é o próprio tempo próprio. Lembrando que $d\lambda = (d\lambda/d\tau)\,d\tau$, e que $d\tau = \sqrt{-ds^2/c^2} = (1/c)\sqrt{-g_{\mu\nu}\,dx^\mu dx^\nu}$

EQUAÇÃO DA GEODÉSICA PELO PRINCÍPIO VARIACIONAL

- Em termos do tempo próprio temos, para a variação de T:

$$\Delta T = -\int_A^B d\tau \left[\frac{1}{2}\partial_\sigma g_{\mu\nu}\,\Delta x^\sigma \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} + g_{\mu\nu}\boxed{\frac{d\Delta x^\mu}{d\tau}}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right]$$

- O segundo termo dessa expressão pode ser integrada por partes:

$\Delta x(A) = \Delta x(B) = 0$

$$\Delta T = -\cancel{\left(g_{\mu\nu}\,\Delta x^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau}\right)_A^B} - \int_A^B d\tau \left[\frac{1}{2}\partial_\sigma g_{\mu\nu}\,\Delta x^\sigma \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} - \Delta x^\mu \frac{d}{d\tau}\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right)\right]$$

$$= \int_A^B d\tau \left[\Delta x^\mu \left(\partial_\sigma g_{\mu\nu}\frac{dx^\sigma}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} + g_{\mu\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2}\right) - \frac{1}{2}\partial_\sigma g_{\mu\nu}\,\Delta x^\sigma \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right]$$

Aqui vamos trocar $\mu \leftrightarrow \sigma$

EQUAÇÃO DA GEODÉSICA PELO PRINCÍPIO VARIACIONAL

- Temos então:

$$\Delta T = \int_A^B d\tau \left[\Delta x^\sigma \left(\partial_\mu g_{\sigma\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} + g_{\sigma\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} \right) - \frac{1}{2}\partial_\sigma g_{\mu\nu}\, \Delta x^\sigma \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} \right]$$

$$= \int_A^B d\tau\, \Delta x^\sigma \left[\partial_\mu g_{\sigma\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} + g_{\sigma\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} - \frac{1}{2}\partial_\sigma g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} \right]$$

- Vou deixar como exercício para vocês mostrarem que essa expressão pode ser simplificada e resulta em:

$$\Delta T = \int_A^B d\tau\, \Delta x^\sigma\, g_{\sigma\gamma} \left[\underbrace{\frac{d^2x^\gamma}{d\tau^2} + \Gamma^\gamma_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}}_{= 0\ !!} \right] \stackrel{!}{=} 0$$

EQUAÇÃO DA GEODÉSICA PELO PRINCÍPIO VARIACIONAL

- Portanto, desse modo também chegamos na Equação da Geodésica:

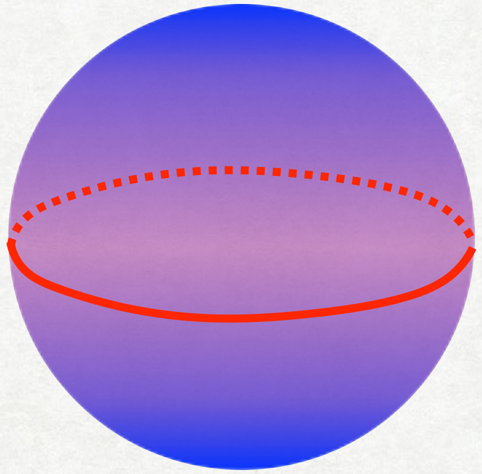
$$\frac{d^2x^\gamma}{d\tau^2} + \Gamma^\gamma_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

- Lembrando aqui que a geodésica define o caminho da menor distância, que é também o caminho em “queda livre”: na ausência de forças (ou melhor: forças não-gravitacionais), a partícula segue uma geodésica!

EXEMPLO: ESFERA 2D (+ 1D=TEMPO)

- Vamos considerar um universo em que somos seres bidimensionais na superfície de uma esfera de raio R . A métrica desse espaço é:

$$ds^2 = -\,c^2 dt^2 + R^2 d\theta^2 + R^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2$$



- Na nossa notação, podemos escrever essa métrica em coordenadas esféricas como ($r^0 = ct\,, r^1 = \theta\,, r^2 = \varphi$):

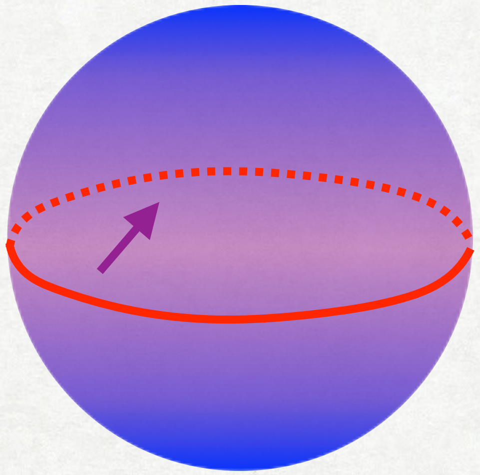
$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & R^2 \operatorname{sen}^2\theta \end{pmatrix} \qquad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & R^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & R^{-2} \operatorname{sen}^{-2}\theta \end{pmatrix}$$

EXEMPLO: ESFERA 2D (+ 1D=TEMPO)

- Vamos calcular a geodésica nesse "espaço-tempo curvo",

$$\frac{d^2x^\gamma}{d\tau^2} + \Gamma^\gamma_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad , \quad \text{com}$$

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}\left(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}\right)$$



- Se você calcular as conexões para a métrica da esfera 1+2D obtemos:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & R^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\Gamma^1_{22} = -\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$$

$$\Gamma^2_{1\,2} = \Gamma^2_{2\,1} = \frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}$$

Todos os outros $\Gamma \to 0$

EXEMPLO: ESFERA 2D (+ 1D=TEMPO)

- Vamos calcular essas conexões, usando a definição:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} \left(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu} \right)$$

- Componente $\alpha = 0$:

$$\Gamma^{0}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{0\sigma} \left(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu} \right) \quad ,$$

mas como $g^{0\,\sigma} = -1$ se $\sigma = 0$, e $g^{0\,\sigma} = 0$ se $\sigma \neq 0$,

$$\Gamma^{0}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{00} \left(\partial_\mu g_{\nu\,0} + \partial_\nu g_{0\,\mu} - \partial_0 g_{\mu\nu} \right)$$

$$= \frac{1}{2} g^{00} \left(\partial_\mu g_{\nu\,0} + \partial_\nu g_{0\,\mu} - \partial_0 g_{\mu\nu} \right) \; = \; 0 \quad \text{, para quaisquer } \mu\,,\nu$$

EXEMPLO: ESFERA 2D (+ 1D=TEMPO)

- Vamos calcular essas conexões, usando a definição:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} \left(\partial_{\mu} g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu} g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma} g_{\mu\nu} \right)$$

- Componente $\alpha = 1$:

$$\Gamma^{1}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{1\sigma} \left(\partial_{\mu} g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu} g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma} g_{\mu\nu} \right) \quad ,$$

mas como $g^{1\,\sigma} = R^{-2}$ se $\sigma = 1$, e $g^{1\,\sigma} = 0$ se $\sigma \neq 1$, e $g_{1\,\sigma} = R^2$ $(\sigma = 1)$, temos:

$$\Gamma^{1}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{11} \left(\partial_{\mu} g_{\nu\,1} + \partial_{\nu} g_{1\,\mu} - \partial_{1} g_{\mu\nu} \right) = \frac{1}{2} R^{-2} \left(-\partial_{\theta} g_{\mu\nu} \right) \quad , \quad \mu \to 2 \, , \nu \to 2$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma^{1}_{22} = -\frac{1}{2} R^{-2} \, \partial_{\theta} \left(R^2 \operatorname{sen}^2 \theta \right) = -\operatorname{sen}\theta \, \cos\theta$$

EXEMPLO: ESFERA 2D (+ 1D=TEMPO)

- Vamos calcular essas conexões, usando a definição:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} \left(\partial_\mu \, g_{\nu\sigma} + \partial_\nu \, g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma \, g_{\mu\nu} \right)$$

- Componente $\alpha = 2$:

$$\Gamma^{2}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{2\sigma} \left(\partial_\mu \, g_{\nu\sigma} + \partial_\nu \, g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma \, g_{\mu\nu} \right) \quad ,$$

mas como $g^{2\,\sigma} = R^{-2} \,\mathrm{sen}^{-2}\,\theta$ se $\sigma = 2$, e $g^{2\,\sigma} = 0$ se $\sigma \neq 2$, com $g_{2\,\sigma} = R^2 \,\mathrm{sen}^2\,\theta$,

$$\Gamma^{2}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{22} \left(\partial_\mu \, g_{\nu\,2} + \partial_\nu \, g_{2\,\mu} - \partial_2 \, g_{\mu\nu} \right) \quad ,$$ logo ou $\mu, \nu = 1{,}2$, ou $\mu, \nu = 2{,}1$

$$\Rightarrow \quad \Gamma^{2}_{12} = \frac{1}{2} R^{-2} \,\mathrm{sen}^{-2}\,\theta \; \partial_\theta \left(R^2 \,\mathrm{sen}^2\,\theta \right) = \frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}$$

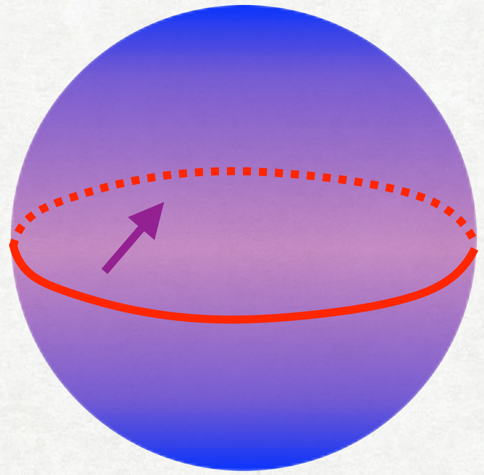
EXEMPLO: ESFERA 2D (+ 1D=TEMPO)

- A equação da geodésica fica portanto com as componentes:

$$\gamma = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0$$

$$\gamma = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + \Gamma^1_{22} \frac{d\varphi}{d\tau}\frac{d\varphi}{d\tau} = 0$$

$$\gamma = 2 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} + \Gamma^1_{12} \frac{d\theta}{d\tau}\frac{d\varphi}{d\tau} + \Gamma^1_{21} \frac{d\varphi}{d\tau}\frac{d\theta}{d\tau} = 0$$



- A primeira equação nos diz que $\tau = a\,t + b$, ou seja, o "relógio" da partícula é idêntico ao de um observador em repouso

- As duas outras equações determinam o movimento:

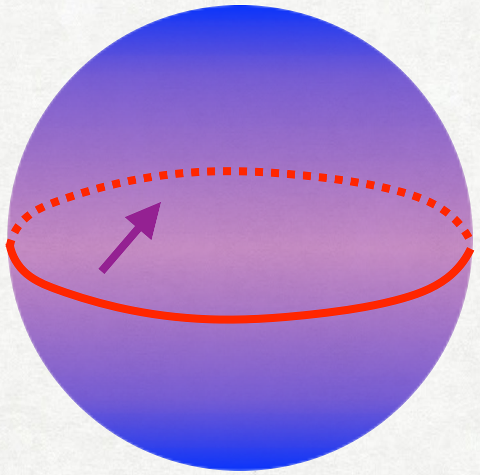
$$\ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta = 0 \quad , \quad \text{e} \quad \ddot{\varphi} + 2\,\dot{\varphi}\,\dot{\theta}\,\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = 0$$

EXEMPLO: ESFERA 2D (+ 1D=TEMPO)

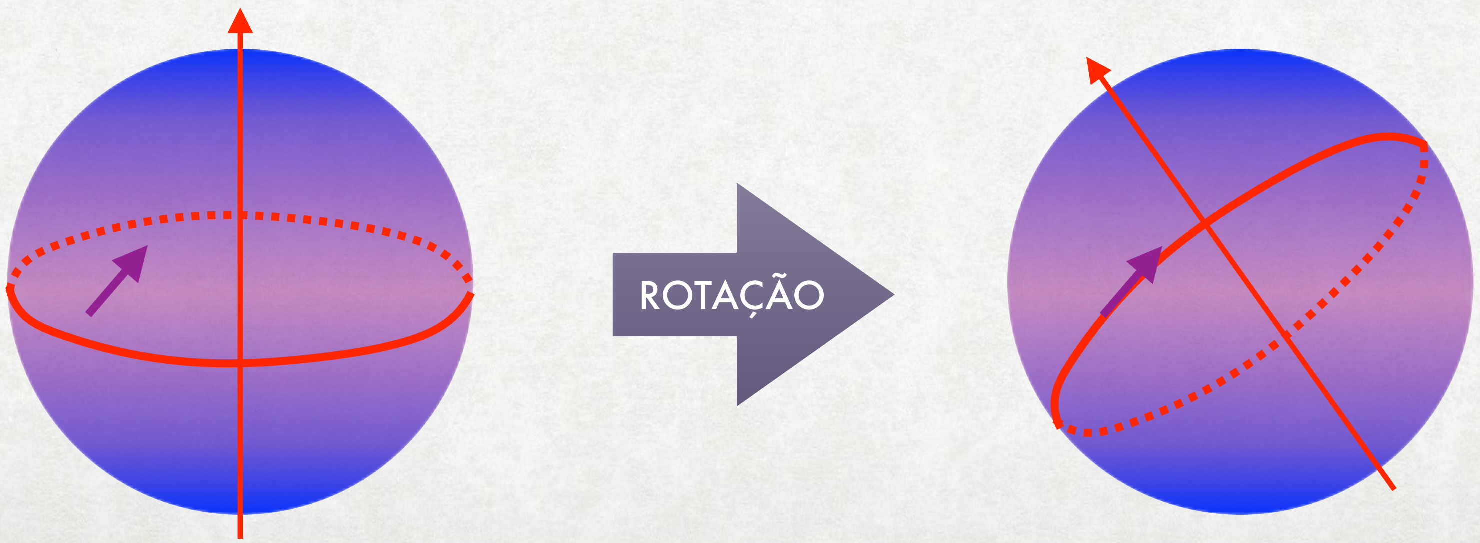
- Essas duas equações acopladas, e não-lineares, parecem muito difíceis de resolver!

$$\ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}\theta \, \cos\theta = 0 \quad , \quad \text{e}$$

$$\ddot{\varphi} + 2\,\dot{\varphi}\,\dot{\theta}\,\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = 0$$



- Porém, não precisamos resolver esse problema do modo mais difícil, podemos resolver isso facilmente lembrando que todos os pontos na esfera são equivalentes — há simetria por rotação:

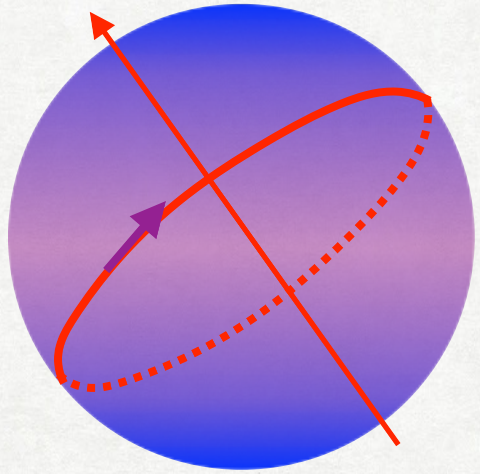


EXEMPLO: ESFERA 2D (+ 1D=TEMPO)

- Agora podemos resolver essas equações tomando como condições iniciais (em $t = t_i$) um movimento no **plano do Equador**, ou seja, $\theta(t_i) = \pi/2$, e também tomando $\dot{\theta}(t_i) = 0$, obtemos:

$$\ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}\theta \, \cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = 0$$

$$\ddot{\varphi} + 2\,\dot{\varphi}\,\dot{\theta}\,\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} = 0$$



- Ou seja, a solução dessas equações é simplesmente:

$$\theta = \theta_i + \dot{\theta}_i t = \theta_i = \pi/2$$

$$\varphi = \varphi_i + \dot{\varphi}_i t$$

- Mas isso não é nada mais do que o **movimento ao longo do equador**!
- Poderíamos também ter resolvido facilmente o problema no qual o movimento se dá em um **meridiano**
- No caso mais geral, o movimento “livre” da partícula, a sua geodésica, é um **grande círculo** nessa esfera!

EXEMPLO: ESFERA 2D (+ 1D=TEMPO)

- Há uma maneira ainda mais elegante de considerar esse problema, que é em termos das constantes de integração (ou quantidades conservadas).

- Você já sabe o que seria uma quantidade conservada, caso pensasse numa partícula com massa qualquer, se movimentando em cima dessa esfera: sua energia cinética (que nesse caso é idêntica ao momento angular)

$$v^2 = \dot{\theta}^2 + \mathrm{sen}^2\,\theta\,\dot{\varphi}^2 = constante$$

- Você pode demonstrar diretamente que essa quantidade se conserva pelas componentes da Equação da Geodésica.

- Numa situação mais geral (e mais complicada), temos de obter as constantes de integração diretamente da Equação da Geodésica. Tente fazer isso nesse caso simples!