INTRODUÇÃO À RELATIVIDADE

AULA 8 - 25/03/2020

E LEMBRE O SEU PROFESSOR DESMIOLADO A INICIAR A GRAVAÇÃO DA AULA!!!

<u>Regras de etiqueta para aulas online:</u>

- Deixe seu microfone no **mudo**
- Levante a mão para fazer uma pergunta (se eu estiver distraído, ligue rapidamente o seu microfone e chame a minha atenção)
- Caso a minha conexão falhe , **todos** devem sair da aula e retornar somente após **10 minutos**
- Se você não conseguir se conectar a uma aula por qualquer motivo, não se preocupe: as aulas ficarão gravadas , e os slides serão disponibilizados no site da disciplina
- Se você tiver dificuldade para se conectar durante essas semanas e meses mais difíceis, entre em contato comigo que vamos tentar **<u>encontrar uma solução!</u>**

AULA 8 - 25/03/2020

- 4-Vetores no espaço de Minkowski
- Notação: por que raios esses “índices em cima”, “índices em baixo”?
- Espalhamento Compton
- 4-Vetores e tensores
- Eletromagnetismo e Relatividade: um paradoxo (ou será?…)
- **Leitura: Capítulos 1.3 a 1.9 do Carroll**

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- Temos **dois tipos de notação** para um mesmo 4-vetor:
  - ➟ Notação usual, tal como r^μ : $V^\mu = \{V^0, V^1, V^2, V^3\}$
  - ➟ Notação "dual" : $V_\mu = \eta_{\mu\nu} V^\nu = \{-V^0, V^1, V^2, V^3\}$

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- Temos **dois tipos de notação** para um mesmo 4-vetor:
  - ➟ Notação usual, tal como r^μ : $V^\mu = \{V^0, V^1, V^2, V^3\}$
  - ➟ Notação "dual" : $V_\mu = \eta_{\mu\nu} V^\nu = \{-V^0, V^1, V^2, V^3\}$

$$\left.\right\} \; ||V||^2 = \eta_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = V_\nu V^\mu$$

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- Temos **dois tipos de notação** para um mesmo 4-vetor:
  - ➟ Notação usual, tal como r^μ : $V^\mu = \{V^0, V^1, V^2, V^3\}$
  - ➟ Notação "dual" : $V_\mu = \eta_{\mu\nu} V^\nu = \{-V^0, V^1, V^2, V^3\}$

$$\left.\begin{array}{l} \\ \end{array}\right\} ||V||^2 = \eta_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = V_\nu V^\mu$$

- A **operação** que leva o vetor usual no seu dual é a contração com a métrica de Minkowski:

$V_\mu = \eta_{\mu\nu} V^\nu$, ou, numa linguagem mais simples, $V(\text{dual}) = \eta \cdot V$

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- Temos **dois tipos de notação** para um mesmo 4-vetor:
  - ➟ Notação usual, tal como r^μ : $V^\mu = \{V^0, V^1, V^2, V^3\}$
  - ➟ Notação "dual" : $V_\mu = \eta_{\mu\nu} V^\nu = \{-V^0, V^1, V^2, V^3\}$

$$\left.\right\} \; ||V||^2 = \eta_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = V_\nu V^\mu$$

- A **operação** que leva o vetor usual no seu dual é a contração com a métrica de Minkowski:

  $V_\mu = \eta_{\mu\nu} V^\nu$, ou, numa linguagem mais simples, $V(\text{dual}) = \eta \cdot V$

- O inverso dessa operação deve ser

  $V = \eta^{-1} \cdot V(\text{dual})$. Mas é fácil ver que $\eta^{-1} = \eta$!

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- Temos **dois tipos de notação** para um mesmo 4-vetor:

  ➟ Notação usual, tal como r^μ : $V^\mu = \{V^0, V^1, V^2, V^3\}$

  ➟ Notação "dual" : $V_\mu = \eta_{\mu\nu} V^\nu = \{-V^0, V^1, V^2, V^3\}$

  $$\Big\} \; ||V||^2 = \eta_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = V_\nu V^\mu$$

- A **operação** que leva o vetor usual no seu dual é a contração com a métrica de Minkowski:

  $V_\mu = \eta_{\mu\nu} V^\nu$, ou, numa linguagem mais simples, $V(\text{dual}) = \eta \cdot V$

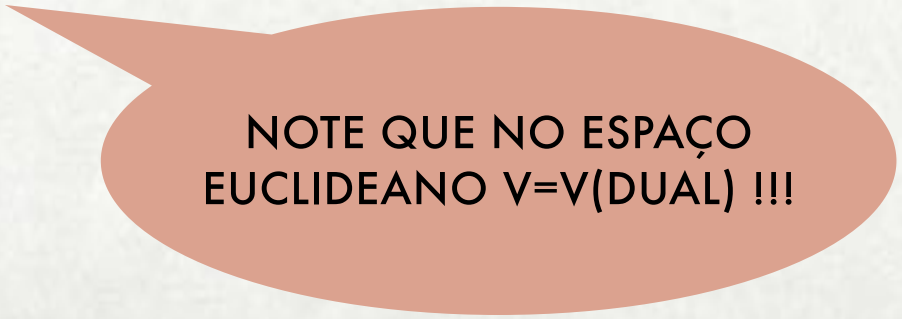
- O inverso dessa operação deve ser

  $V = \eta^{-1} \cdot V(\text{dual})$. Mas é fácil ver que $\eta^{-1} = \eta$!

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Portanto,

  $V = \eta \cdot V(\text{dual})$



4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- Mas Raul, **PORQUE ESSA INSISTÊNCIA NESSES MALDITOS ÍNDICES, ORA EM CIMA, ORA EM BAIXO???**

- Notem que temos **dois tipos** de notação para um mesmo objeto:

(a) Vetores “normais", digamos, $V \quad \rightarrow \quad V^\mu = \{V^0, V^1, V^2, V^3\}$

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- Mas Raul, **PORQUE ESSA INSISTÊNCIA NESSES MALDITOS ÍNDICES, ORA EM CIMA, ORA EM BAIXO???**

- Notem que temos **dois tipos** de notação para um mesmo objeto:

  (a) Vetores "normais", digamos, $V \quad \rightarrow \quad V^\mu = \{\boxed{V^0}, V^1, V^2, V^3\}$

  (b) Vetores na notação "dual" , digamos $V(\text{dual}) \quad \rightarrow \quad V_\mu = \eta_{\mu\nu} V^\nu = \{\boxed{-V^0}, V^1, V^2, V^3\}$

- A métrica de Minkowski deve ser encarada como uma **operação** , que leva o vetor usual no seu dual, e vice-versa:

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- Mas Raul, **PORQUE ESSA INSISTÊNCIA NESSES MALDITOS ÍNDICES, ORA EM CIMA, ORA EM BAIXO???**

- Notem que temos **dois tipos** de notação para um mesmo objeto:

(a) Vetores "normais", digamos, $V \quad \rightarrow \quad V^{\mu} = \{\boxed{V^0}, V^1, V^2, V^3\}$

(b) Vetores na notação "dual" , digamos $V(\text{dual}) \quad \rightarrow \quad V_{\mu} = \eta_{\mu\nu} V^{\nu} = \{\boxed{-V^0}, V^1, V^2, V^3\}$

- A métrica de Minkowski deve ser encarada como uma **operação** , que leva o vetor usual no seu dual, e vice-versa:

(a) $V(\text{dual}) = \eta \cdot V \;\; ➟ \;\; V_{\mu} = \eta_{\mu\nu} V^{\nu}$

(b) $V = \eta \cdot V(\text{dual}) \;\; ➟ \;\; V^{\mu} = \eta^{\mu\nu} V_{\nu}$

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- Mas Raul, **PORQUE ESSA INSISTÊNCIA NESSES MALDITOS ÍNDICES, ORA EM CIMA, ORA EM BAIXO???**

- Notem que temos **dois tipos** de notação para um mesmo objeto:

(a) Vetores "normais", digamos, $V \quad \rightarrow \quad V^\mu = \{V^0, V^1, V^2, V^3\}$

(b) Vetores na notação "dual" , digamos $V(\text{dual}) \quad \rightarrow \quad V_\mu = \eta_{\mu\nu} V^\nu = \{-V^0, V^1, V^2, V^3\}$

- A métrica de Minkowski deve ser encarada como uma **operação** , que leva o vetor usual no seu dual, e vice-versa:

(a) $V(\text{dual}) = \eta \cdot V \;\Rightarrow\; V_\mu = \eta_{\mu\nu} V^\nu$

(b) $V = \eta \cdot V(\text{dual}) \;\Rightarrow\; V^\mu = \eta^{\mu\nu} V_\nu$

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Mas ora: se é apenas uma questão de *notação*, qual é a vantagem disso?

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- Há objetos que são vetores intrinsecamente "normais" (Ex: dr^μ), e há outros que são intrinsecamente do tipo "dual". Exemplo:

$$\frac{\partial}{\partial r^\mu} \equiv \partial_\mu$$

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- Há objetos que são vetores intrinsecamente “normais" (Ex: dr^μ), e há outros que são intrinsecamente do tipo “dual”. Exemplo:

$$\frac{\partial}{\partial r^\mu} \equiv \partial_\mu$$

- Sim, é verdade, isso é um “vetor" esquisito: para “concretizar" o vetor, basta imaginar que aplicamos essas derivadas parciais num escalar ϕ:

$$A_\mu = \partial_\mu \phi$$

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- Há objetos que são vetores intrinsecamente “normais" (Ex: dr^{μ}), e há outros que são intrinsecamente do tipo “dual”. Exemplo:

$$\frac{\partial}{\partial r^{\mu}} \equiv \partial_{\mu}$$

- Sim, é verdade, isso é um “vetor" esquisito: para “concretizar" o vetor, basta imaginar que aplicamos essas derivadas parciais num escalar ϕ:

$$A_{\mu} = \partial_{\mu} \phi$$

- Vamos ver como esse objeto se transforma sob Lorentz:

$$\frac{\partial}{\partial r^{\mu}} \rightarrow \frac{\partial}{\partial r^{'\mu}} = \frac{\partial}{\Lambda^{\mu}_{\ \nu}\, \partial r^{\nu}} = (\Lambda^{\mu}_{\ \nu})^{-1} \frac{\partial}{\partial r^{\nu}}$$

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- Há objetos que são vetores intrinsecamente “normais" (Ex: dr^μ), e há outros que são intrinsecamente do tipo “dual”. Exemplo:

$$\frac{\partial}{\partial r^\mu} \equiv \partial_\mu$$

- Sim, é verdade, isso é um “vetor" esquisito: para “concretizar" o vetor, basta imaginar que aplicamos essas derivadas parciais num escalar ϕ:

$$A_\mu = \partial_\mu \phi$$

- Vamos ver como esse objeto se transforma sob Lorentz:

$$\frac{\partial}{\partial r^\mu} \to \frac{\partial}{\partial r'^\mu} = \frac{\partial}{\Lambda^\mu_{\ \nu}\, \partial r^\nu} = (\Lambda^\mu_{\ \nu})^{-1} \frac{\partial}{\partial r^\nu}$$

- Mas essa transformação é exatamente aquela que vale para vetores duais! Afinal,

$$(\Lambda^\mu_{\ \nu})^{-1} = \underset{\uparrow \atop \Lambda(\text{dual})}{\Lambda_\mu^{\ \nu}} \quad \Rightarrow \quad \partial'_\mu = \Lambda_\mu^{\ \nu}\, \partial_\nu$$

$$\Lambda(\text{dual}) = \Lambda^{-1} = \Lambda(v \to -v, R \to R^{\text{tr}})$$

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- OK, mas e esse lance de índice em cima e em baixo, versus a notação matricial??
- Em primeiro lugar, essas dicas são apenas para facilitar a sua visualização na passagem para a notação tensorial.

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- OK, mas e esse lance de índice em cima e em baixo, versus a notação matricial??
- Em primeiro lugar, essas dicas são apenas para facilitar a sua visualização na passagem para a notação tensorial.
- Vamos começar lembrando do modo como operamos com matrizes normalmente, no espaço Euclideano, quando $V = V(\text{dual})$:

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- OK, mas e esse lance de índice em cima e em baixo, versus a notação matricial??
- Em primeiro lugar, essas dicas são apenas para facilitar a sua visualização na passagem para a notação tensorial.
- Vamos começar lembrando do modo como operamos com matrizes normalmente, no espaço Euclideano, quando $V = V(\text{dual})$:

$$A \cdot B = C \quad \leftrightarrow \quad A_{ij} \cdot B_{jk} = C_{ik} \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- OK, mas e esse lance de índice em cima e em baixo, versus a notação matricial??
- Em primeiro lugar, essas dicas são apenas para facilitar a sua visualização na passagem para a notação tensorial.
- Vamos começar lembrando do modo como operamos com matrizes normalmente, no espaço Euclideano, quando $V = V(\text{dual})$:

$$A \cdot B = C \quad \leftrightarrow \quad A_{ij} \cdot B_{jk} = C_{ik} \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

- $A_{11}\, B_{11} + A_{12}\, B_{21} = C_{11}$

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- OK, mas e esse lance de índice em cima e em baixo, versus a notação matricial??

- Em primeiro lugar, essas dicas são apenas para facilitar a sua visualização na passagem para a notação tensorial.

- Vamos começar lembrando do modo como operamos com matrizes normalmente, no espaço Euclideano, quando $V = V(\text{dual})$:

$$A \cdot B = C \quad \leftrightarrow \quad A_{ij} \cdot B_{jk} = C_{ik} \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

- $A_{11} B_{11} + A_{12} B_{21} = C_{11}$

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- OK, mas e esse lance de índice em cima e em baixo, versus a notação matricial??

- Em primeiro lugar, essas dicas são apenas para facilitar a sua visualização na passagem para a notação tensorial.

- Vamos começar lembrando do modo como operamos com matrizes normalmente, no espaço Euclideano, quando $V = V(\text{dual})$:

$$A \cdot B = C \quad \leftrightarrow \quad A_{ij} \cdot B_{jk} = C_{ik} \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

- $A_{11} B_{11} + A_{12} B_{21} = C_{11}$

- $A_{11} B_{12} + A_{12} B_{22} = C_{12}$

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- OK, mas e esse lance de índice em cima e em baixo, versus a notação matricial??

- Em primeiro lugar, essas dicas são apenas para facilitar a sua visualização na passagem para a notação tensorial.

- Vamos começar lembrando do modo como operamos com matrizes normalmente, no espaço Euclideano, quando $V = V(\text{dual})$:

$$A \cdot B = C \quad \leftrightarrow \quad A_{ij} \cdot B_{jk} = C_{ik} \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

- $A_{11} B_{11} + A_{12} B_{21} = C_{11}$

- $A_{11} B_{12} + A_{12} B_{22} = C_{12}$

NA NOTAÇÃO MATRICIAL O PRIMEIRO ÍNDICE É O DAS LINHAS, E O SEGUNDO É O DAS COLUNAS

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- OK, mas e a correspondência com a notação "tensorial"?
- Primeiro, temos de lembrar que é sempre necessário distinguir entre vetores e vetores duais.

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- OK, mas e a correspondência com a notação “tensorial”?

- Primeiro, temos de lembrar que é sempre necessário distinguir entre vetores e vetores duais.

- Na notação tensorial, isso é feito usando índices em cima para vetores “normais" ($dr \to dr^{\mu}$) e em baixo para vetores duais ($\partial \leftrightarrow \partial_{\mu}$)

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- OK, mas e a correspondência com a notação “tensorial”?

- Primeiro, temos de lembrar que é sempre necessário distinguir entre vetores e vetores duais.

- Na notação tensorial, isso é feito usando índices em cima para vetores “normais" ($dr \to dr^\mu$) e em baixo para vetores duais ($\partial \leftrightarrow \partial_\mu$)

- É possível fazer uma ***analogia*** em termos de “linhas e colunas”, na notação matricial:

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- OK, mas e a correspondência com a notação "tensorial"?

- Primeiro, temos de lembrar que é sempre necessário distinguir entre vetores e vetores duais.

- Na notação tensorial, isso é feito usando índices em cima para vetores "normais" ($dr \to dr^\mu$) e em baixo para vetores duais ($\partial \leftrightarrow \partial_\mu$)

- É possível fazer uma ***analogia*** em termos de "linhas e colunas", na notação matricial:

(1) Associe *vetores normais* a *vetores-coluna na notação matricial* (ou seja, o índice do vetor denota as *linhas* dentro do vetor-coluna;

$$dr^\mu = \begin{pmatrix} dr^0 \\ dr^1 \\ dr^2 \\ dr^3 \end{pmatrix}$$

(2) Associe vetores duais a vetores-linha na notação matricial (ou seja, o índice do vetor denota as colunas dentro do vetor-linha;

$$\partial_\mu = (\partial_0 \, , \, \partial_1 \, , \, \partial_2 \, , \, \partial_3)$$

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- É útil pensar na métrica de Minkowski como um **operador**, que leva do vetor (coluna) ao dual (linha), e do dual (linha) de volta ao vetor (coluna)

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- É útil pensar na métrica de Minkowski como um **operador**, que leva do vetor (coluna) ao dual (linha), e do dual (linha) de volta ao vetor (coluna)

- Note que a **operação matricial** que troca linha por coluna é o **transposto:**

- $dr_\mu = \eta_{\mu\nu} dr^\nu \quad \leftrightarrow \quad dr(\text{dual}) = (\eta \cdot dr)^{\text{tr}}$

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- É útil pensar na métrica de Minkowski como um **operador**, que leva do vetor (coluna) ao dual (linha), e do dual (linha) de volta ao vetor (coluna)
- Note que a **operação matricial** que troca linha por coluna é o **transposto:**
- $dr_\mu = \eta_{\mu\nu} dr^\nu \quad \leftrightarrow \quad dr(\text{dual}) = (\eta \cdot dr)^{\text{tr}}$
- Ou, de modo equivalente:
- $dr^\mu = \eta^{\mu\nu} dr_\nu \quad \leftrightarrow \quad dr = [dr(\text{dual}) \cdot \eta]^{\text{tr}}$

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- Algumas operações são fáceis desse modo, por exemplo:

$$dr'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} dr^{\nu} \leftrightarrow \begin{pmatrix} dr'^0 \\ dr'^1 \\ dr'^2 \\ dr'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & \Lambda^0{}_2 & \Lambda^0{}_3 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & \Lambda^1{}_2 & \Lambda^1{}_3 \\ \Lambda^2{}_0 & \Lambda^2{}_1 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^2{}_3 \\ \Lambda^3{}_0 & \Lambda^3{}_1 & \Lambda^3{}_2 & \Lambda^3{}_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dr^0 \\ dr^1 \\ dr^2 \\ dr^3 \end{pmatrix}$$

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- Algumas operações são fáceis desse modo, por exemplo:

$$dr'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu} dr^{\nu} \leftrightarrow \begin{pmatrix} dr'^0 \\ dr'^1 \\ dr'^2 \\ dr'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_{\ 0} & \Lambda^0_{\ 1} & \Lambda^0_{\ 2} & \Lambda^0_{\ 3} \\ \Lambda^1_{\ 0} & \Lambda^1_{\ 1} & \Lambda^1_{\ 2} & \Lambda^1_{\ 3} \\ \Lambda^2_{\ 0} & \Lambda^2_{\ 1} & \Lambda^2_{\ 2} & \Lambda^2_{\ 3} \\ \Lambda^3_{\ 0} & \Lambda^3_{\ 1} & \Lambda^3_{\ 2} & \Lambda^3_{\ 3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dr^0 \\ dr^1 \\ dr^2 \\ dr^3 \end{pmatrix}$$

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- Algumas operações são fáceis desse modo, por exemplo:

$$dr'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu} dr^{\nu} \leftrightarrow \begin{pmatrix} dr'^0 \\ dr'^1 \\ dr'^2 \\ dr'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_{\ 0} & \Lambda^0_{\ 1} & \Lambda^0_{\ 2} & \Lambda^0_{\ 3} \\ \Lambda^1_{\ 0} & \Lambda^1_{\ 1} & \Lambda^1_{\ 2} & \Lambda^1_{\ 3} \\ \Lambda^2_{\ 0} & \Lambda^2_{\ 1} & \Lambda^2_{\ 2} & \Lambda^2_{\ 3} \\ \Lambda^3_{\ 0} & \Lambda^3_{\ 1} & \Lambda^3_{\ 2} & \Lambda^3_{\ 3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dr^0 \\ dr^1 \\ dr^2 \\ dr^3 \end{pmatrix}$$

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- Algumas operações são fáceis desse modo, por exemplo:

$$dr'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu} dr^{\nu} \leftrightarrow \begin{pmatrix} dr'^0 \\ dr'^1 \\ dr'^2 \\ dr'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_{\ 0} & \Lambda^0_{\ 1} & \Lambda^0_{\ 2} & \Lambda^0_{\ 3} \\ \Lambda^1_{\ 0} & \Lambda^1_{\ 1} & \Lambda^1_{\ 2} & \Lambda^1_{\ 3} \\ \Lambda^2_{\ 0} & \Lambda^2_{\ 1} & \Lambda^2_{\ 2} & \Lambda^2_{\ 3} \\ \Lambda^3_{\ 0} & \Lambda^3_{\ 1} & \Lambda^3_{\ 2} & \Lambda^3_{\ 3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dr^0 \\ dr^1 \\ dr^2 \\ dr^3 \end{pmatrix}$$

- Agora vamos ver o vetor dual, que se transforma segundo a transformação "dual":

$$\partial'_{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\ \nu} \partial_{\nu}$$

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- Algumas operações são fáceis desse modo, por exemplo:

$$dr'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu} dr^{\nu} \leftrightarrow \begin{pmatrix} dr'^0 \\ dr'^1 \\ dr'^2 \\ dr'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_{\ 0} & \Lambda^0_{\ 1} & \Lambda^0_{\ 2} & \Lambda^0_{\ 3} \\ \Lambda^1_{\ 0} & \Lambda^1_{\ 1} & \Lambda^1_{\ 2} & \Lambda^1_{\ 3} \\ \Lambda^2_{\ 0} & \Lambda^2_{\ 1} & \Lambda^2_{\ 2} & \Lambda^2_{\ 3} \\ \Lambda^3_{\ 0} & \Lambda^3_{\ 1} & \Lambda^3_{\ 2} & \Lambda^3_{\ 3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dr^0 \\ dr^1 \\ dr^2 \\ dr^3 \end{pmatrix}$$

- Agora vamos ver o vetor dual, que se transforma segundo a transformação "dual":

$$\partial'_{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\ \nu} \partial_{\nu}$$

- Note que, na notação matricial o **primeiro** índice é o das linhas, o **segundo** é o das colunas. Mas se na notação tensorial o índice de cima é de linhas, e em baixo é de colunas, como operar na matriz $\Lambda_{\mu}^{\ \nu}$?

- Primeiro, lembre-se que na notação "tensorial" (em que apenas lidamos com índices), **não há ambiguidade**. Em dúvida, retorne à notação tensorial!

- Para proceder com a analogia, vamos lembrar em matrizes, o **transposto** troca linhas ↔ colunas.

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

$$\partial'_\mu = \Lambda_\mu^{\ \nu}\partial_\nu \ \leftrightarrow \ (\partial'_0\,,\,\partial'_1\,,\,\partial'_2\,,\,\partial'_3) \ = \ (\partial_0\,,\,\partial_1\,,\,\partial_2\,,\,\partial_3)\cdot\begin{pmatrix} \Lambda_0^{\ 0} & \Lambda_0^{\ 1} & \Lambda_0^{\ 2} & \Lambda_0^{\ 3} \\ \Lambda_1^{\ 0} & \Lambda_1^{\ 1} & \Lambda_1^{\ 2} & \Lambda_1^{\ 3} \\ \Lambda_2^{\ 0} & \Lambda_2^{\ 1} & \Lambda_2^{\ 2} & \Lambda_2^{\ 3} \\ \Lambda_3^{\ 0} & \Lambda_3^{\ 1} & \Lambda_3^{\ 2} & \Lambda_3^{\ 3} \end{pmatrix}^{\mathrm{tr}}$$

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- Usando o transposto, agora podemos escrever:

- $\partial'_\mu = \partial'_\nu \Lambda_\mu^{\ \nu}$, o que em notação matricial é $\partial'_\mu = \partial_\nu (\Lambda_\mu^{\ \nu})^{\mathrm{tr}} \leftrightarrow \partial' = \partial \cdot \Lambda^{\mathrm{tr}}(\mathrm{dual})$

$$\partial'_\mu = \Lambda_\mu^{\ \nu} \partial_\nu \leftrightarrow (\partial'_0 , \partial'_1 , \partial'_2 , \partial'_3) = (\partial_0 , \partial_1 , \partial_2 , \partial_3) \cdot \begin{pmatrix} \Lambda_0^{\ 0} & \Lambda_0^{\ 1} & \Lambda_0^{\ 2} & \Lambda_0^{\ 3} \\ \Lambda_1^{\ 0} & \Lambda_1^{\ 1} & \Lambda_1^{\ 2} & \Lambda_1^{\ 3} \\ \Lambda_2^{\ 0} & \Lambda_2^{\ 1} & \Lambda_2^{\ 2} & \Lambda_2^{\ 3} \\ \Lambda_3^{\ 0} & \Lambda_3^{\ 1} & \Lambda_3^{\ 2} & \Lambda_3^{\ 3} \end{pmatrix}^{\mathrm{tr}}$$

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- Usando o transposto, agora podemos escrever:

- $\partial'_\mu = \partial'_\nu \Lambda_\mu^{\ \nu}$, o que em notação matricial é $\partial'_\mu = \partial_\nu (\Lambda_\mu^{\ \nu})^{\mathrm{tr}} \leftrightarrow \partial' = \partial \cdot \Lambda^{\mathrm{tr}}(\mathrm{dual})$

$$\partial'_\mu = \Lambda_\mu^{\ \nu} \partial_\nu \leftrightarrow (\partial'_0 , \partial'_1 , \partial'_2 , \partial'_3) = (\partial_0 , \partial_1 , \partial_2 , \partial_3) \cdot \begin{pmatrix} \Lambda_0^{\ 0} & \Lambda_0^{\ 1} & \Lambda_0^{\ 2} & \Lambda_0^{\ 3} \\ \Lambda_1^{\ 0} & \Lambda_1^{\ 1} & \Lambda_1^{\ 2} & \Lambda_1^{\ 3} \\ \Lambda_2^{\ 0} & \Lambda_2^{\ 1} & \Lambda_2^{\ 2} & \Lambda_2^{\ 3} \\ \Lambda_3^{\ 0} & \Lambda_3^{\ 1} & \Lambda_3^{\ 2} & \Lambda_3^{\ 3} \end{pmatrix}^{\mathrm{tr}}$$

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- Usando o transposto, agora podemos escrever:

- $\partial'_\mu = \partial'_\nu \Lambda_\mu^{\ \nu}$, o que em notação matricial é $\partial'_\mu = \partial_\nu (\Lambda_\mu^{\ \nu})^{\mathrm{tr}} \leftrightarrow \partial' = \partial \cdot \Lambda^{\mathrm{tr}}(\mathrm{dual})$

$$\partial'_\mu = \Lambda_\mu^{\ \nu} \partial_\nu \leftrightarrow (\partial'_0 , \partial'_1 , \partial'_2 , \partial'_3) = (\partial_0 , \partial_1 , \partial_2 , \partial_3) \cdot \begin{pmatrix} \Lambda_0^{\ 0} & \Lambda_0^{\ 1} & \Lambda_0^{\ 2} & \Lambda_0^{\ 3} \\ \Lambda_1^{\ 0} & \Lambda_1^{\ 1} & \Lambda_1^{\ 2} & \Lambda_1^{\ 3} \\ \Lambda_2^{\ 0} & \Lambda_2^{\ 1} & \Lambda_2^{\ 2} & \Lambda_2^{\ 3} \\ \Lambda_3^{\ 0} & \Lambda_3^{\ 1} & \Lambda_3^{\ 2} & \Lambda_3^{\ 3} \end{pmatrix}^{\mathrm{tr}}$$

- Isso também pode ser escrito como:

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- Usando o transposto, agora podemos escrever:

- $\partial'_\mu = \partial'_\nu \Lambda_\mu^{\ \nu}$, o que em notação matricial é $\partial'_\mu = \partial_\nu (\Lambda_\mu^{\ \nu})^{\mathrm{tr}} \leftrightarrow \partial' = \partial \cdot \Lambda^{\mathrm{tr}}(\mathrm{dual})$

$$\partial'_\mu = \Lambda_\mu^{\ \nu}\partial_\nu \leftrightarrow (\partial'_0 , \partial'_1 , \partial'_2 , \partial'_3) = (\partial_0 , \partial_1 , \partial_2 , \partial_3) \cdot \begin{pmatrix} \Lambda_0^{\ 0} & \Lambda_0^{\ 1} & \Lambda_0^{\ 2} & \Lambda_0^{\ 3} \\ \Lambda_1^{\ 0} & \Lambda_1^{\ 1} & \Lambda_1^{\ 2} & \Lambda_1^{\ 3} \\ \Lambda_2^{\ 0} & \Lambda_2^{\ 1} & \Lambda_2^{\ 2} & \Lambda_2^{\ 3} \\ \Lambda_3^{\ 0} & \Lambda_3^{\ 1} & \Lambda_3^{\ 2} & \Lambda_3^{\ 3} \end{pmatrix}^{\mathrm{tr}}$$

- Isso também pode ser escrito como:

$$\partial'_\mu = (\partial'_0 , \partial'_1 , \partial'_2 , \partial'_3) = (\partial_0 , \partial_1 , \partial_2 , \partial_3) \cdot \begin{pmatrix} \Lambda_0^{\ 0} & \Lambda_1^{\ 0} & \Lambda_2^{\ 0} & \Lambda_3^{\ 0} \\ \Lambda_0^{\ 1} & \Lambda_1^{\ 1} & \Lambda_2^{\ 1} & \Lambda_3^{\ 1} \\ \Lambda_0^{\ 2} & \Lambda_1^{\ 2} & \Lambda_2^{\ 2} & \Lambda_3^{\ 2} \\ \Lambda_0^{\ 3} & \Lambda_1^{\ 3} & \Lambda_2^{\ 3} & \Lambda_3^{\ 3} \end{pmatrix}$$

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- Mais alguns exemplos dessa analogia:

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- Mais alguns exemplos dessa analogia:

(a) Duas transformações de Lorentz:

$$dr''^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu}\, dr'^{\nu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu}\, \tilde{\Lambda}^{\nu}_{\ \alpha}\, dr^{\alpha} \quad \leftrightarrow \quad dr'' = \Lambda \cdot dr' = \Lambda \cdot \tilde{\Lambda} \cdot dr$$

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- Mais alguns exemplos dessa analogia:

(a) Duas transformações de Lorentz:

$$dr''^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu}\, dr'^{\nu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu}\, \tilde{\Lambda}^{\nu}_{\ \alpha}\, dr^{\alpha} \quad \leftrightarrow \quad dr'' = \Lambda \cdot dr' = \Lambda \cdot \tilde{\Lambda} \cdot dr$$

(b) Transformação de Lorentz do dual:

$$\partial'_{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\ \nu}\partial_{\nu} \quad \leftrightarrow \quad \partial' = \partial \cdot \Lambda^{\mathrm{tr}}(\mathrm{dual})$$

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- Mais alguns exemplos dessa analogia:

(a) Duas transformações de Lorentz:

$$dr^{''\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu}\, dr^{'\nu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu}\, \tilde{\Lambda}^{\nu}_{\ \alpha}\, dr^{\alpha} \quad \leftrightarrow \quad dr'' = \Lambda \cdot dr' = \Lambda \cdot \tilde{\Lambda} \cdot dr$$

(b) Transformação de Lorentz do dual:

$$\partial'_{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\ \nu} \partial_{\nu} \quad \leftrightarrow \quad \partial' = \partial \cdot \Lambda^{\mathrm{tr}} (\text{dual})$$

(c) Princípio da Invariância de Lorentz:

$$\Lambda^{\mu}_{\ \sigma}\, \eta_{\mu\nu}\, \Lambda^{\nu}_{\ \alpha} = \eta_{\sigma\alpha} \quad \leftrightarrow \quad \Lambda^{\mathrm{tr}} \cdot \eta \cdot \Lambda = \eta$$

DINÂMICA RELATIVÍSTICA E FORÇA

DINÂMICA RELATIVÍSTICA E FORÇA

- Na mecânica não-relativística a lei de movimento é dada por:

$$\overrightarrow{F} = m\,\overrightarrow{a}$$

DINÂMICA RELATIVÍSTICA E FORÇA

- Na mecânica não-relativística a lei de movimento é dada por:

$$\overrightarrow{F} = m\,\overrightarrow{a}$$

- Mas e na relatividade? Assim como temos $U^\mu = \dfrac{d\,r^\mu}{d\tau}$, podemos definir a mudança desse estado de movimento em termos do mesmo tempo próprio, e escrever:

$$f^\mu = \frac{d\,P^\mu}{d\tau}$$

DINÂMICA RELATIVÍSTICA E FORÇA

- Na mecânica não-relativística a lei de movimento é dada por:

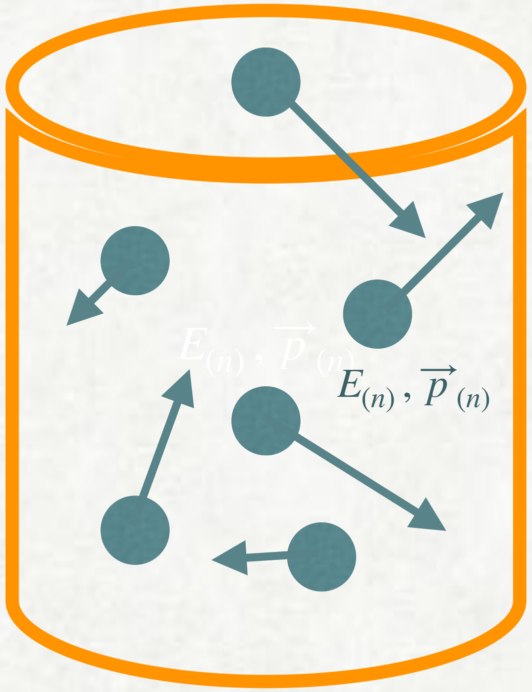
$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

- Mas e na relatividade? Assim como temos $U^\mu = \dfrac{d\,r^\mu}{d\tau}$, podemos definir a mudança desse estado de movimento em termos do mesmo tempo próprio, e escrever:

$$f^\mu = \frac{d\,P^\mu}{d\tau}$$

- <u>**Exercício**</u>: mostre que $||f \cdot P|| = \eta_{\mu\nu}\, f^\mu\, P^\nu = 0$. Interprete a equação resultante em termos de conceitos familiares da mecânica não-relativística. (Ou seja: o que significa, fisicamente, essa equação?)

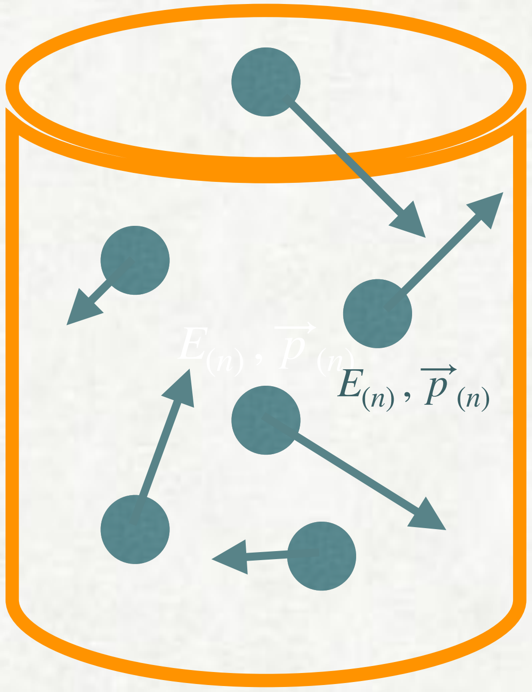
DINÂMICA RELATIVÍSTICA E FORÇA



DINÂMICA RELATIVÍSTICA E FORÇA

- Conservação de 4-momento

$$P^{\mu}_{\text{tot}} = \sum_{n} P^{\mu}_{(n)}$$

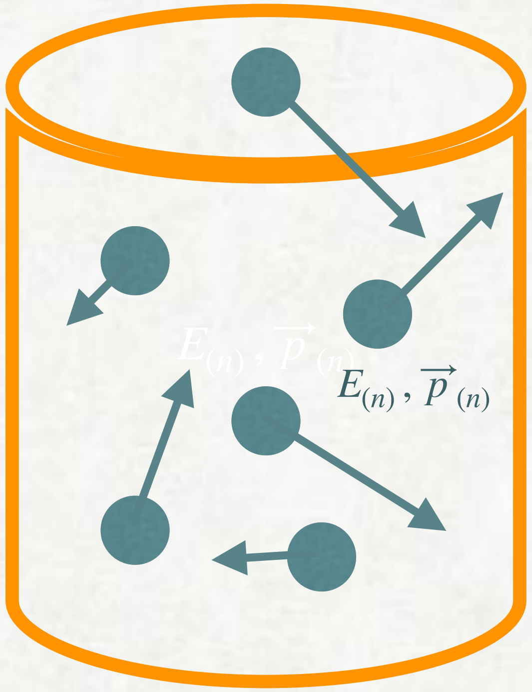


DINÂMICA RELATIVÍSTICA E FORÇA

- Conservação de 4-momento

$$P^{\mu}_{\mathrm{tot}} = \sum_{n} P^{\mu}_{(n)}$$

☑ Conservação de energia



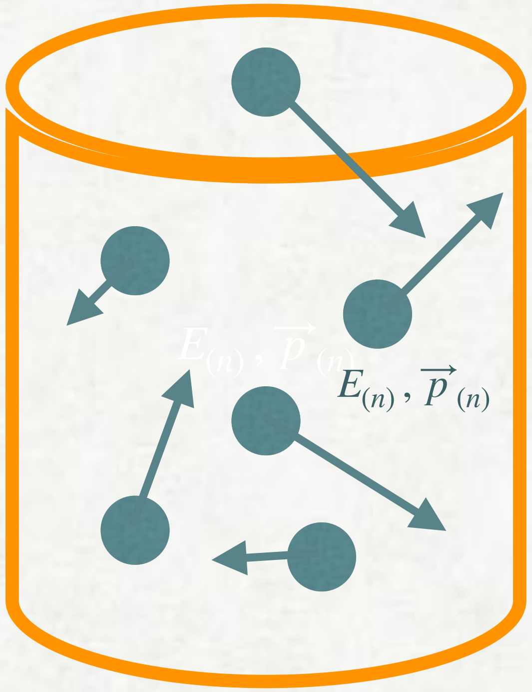
DINÂMICA RELATIVÍSTICA E FORÇA

- Conservação de 4-momento

$$P^{\mu}_{\text{tot}} = \sum_{n} P^{\mu}_{(n)}$$

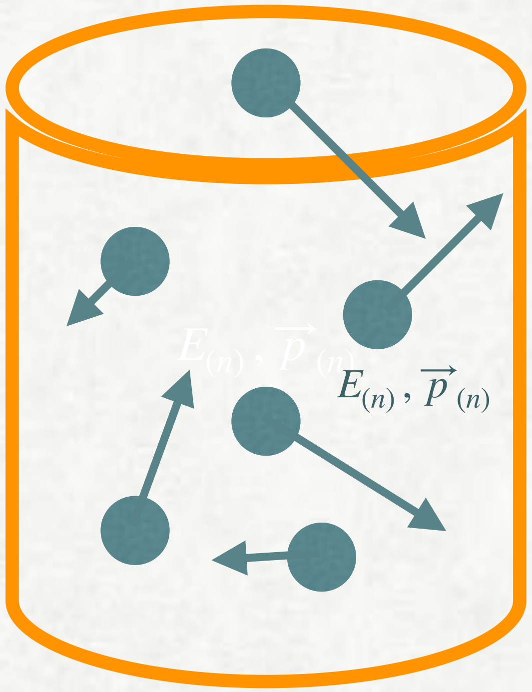
☑ Conservação de energia

☑ Conservação de momento



DINÂMICA RELATIVÍSTICA E FORÇA

- Conservação de 4-momento



$$P^{\mu}_{\text{tot}} = \sum_n P^{\mu}_{(n)}$$

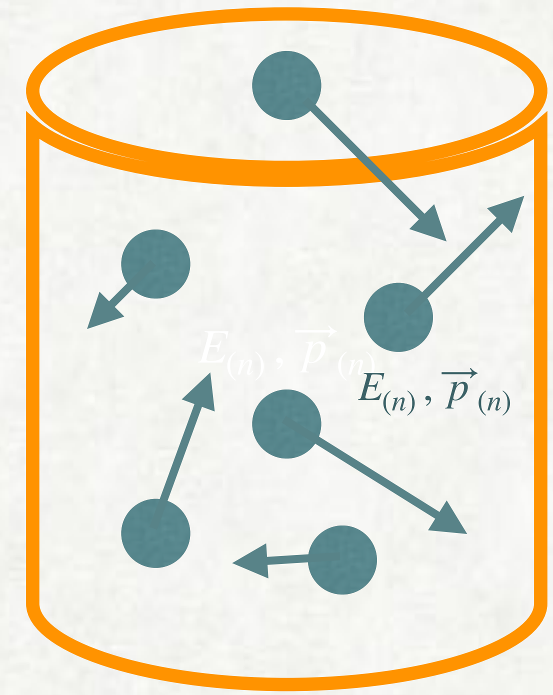
☑ Conservação de energia

☑ Conservação de momento

- Note que não há um invariante associado com a "massa total" do sistema! A noção do Centro de Massa, de fato, é bastante mais complexa na Relatividade!

DINÂMICA RELATIVÍSTICA E FORÇA

- Conservação de 4-momento



$$P^{\mu}_{\text{tot}} = \sum_{n} P^{\mu}_{(n)}$$

☑ Conservação de energia

☑ Conservação de momento

- Note que não há um invariante associado com a “massa total” do sistema! A noção do Centro de Massa, de fato, é bastante mais complexa na Relatividade!

DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

- Espalhamento Compton

DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

- Espalhamento Compton

- A energia do fóton incidente é $E = h\nu = |\overrightarrow{p}_f| c$
- $P^{\mu}_f = \dfrac{h\nu}{c}\{1, \hat{n}\}$, onde $\hat{n}$ é a direção de propagação do foton incidente
- $P'^{\mu}_f = \dfrac{h\nu'}{c}\{1, \hat{n}'\}$, onde $\hat{n}'$ é a direção de propagação do foton emergente

DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

- Espalhamento Compton

DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

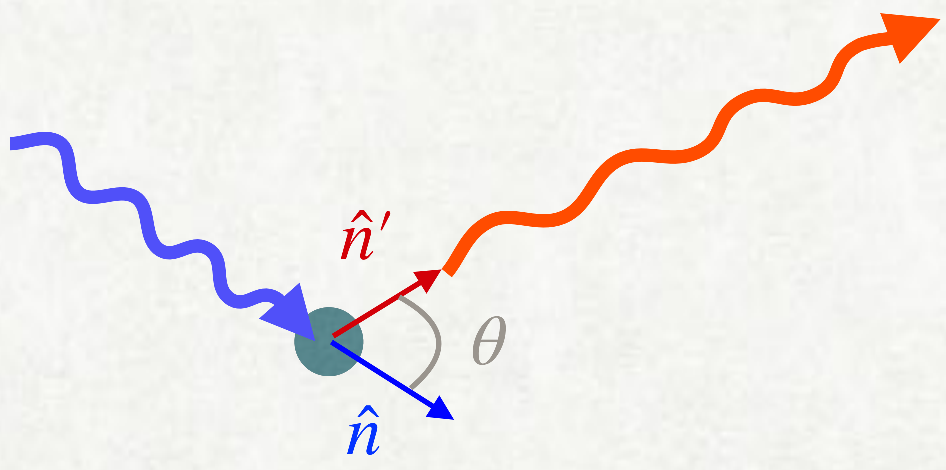
- Espalhamento Compton

- Pergunta: qual a relação entre o ângulo de espalhamento e a mudança na frequência do fóton?

- Conservação de 4- momento: $P_f^\mu + P_e^\mu = P_f^{'\mu} + P_e^{'\mu}$

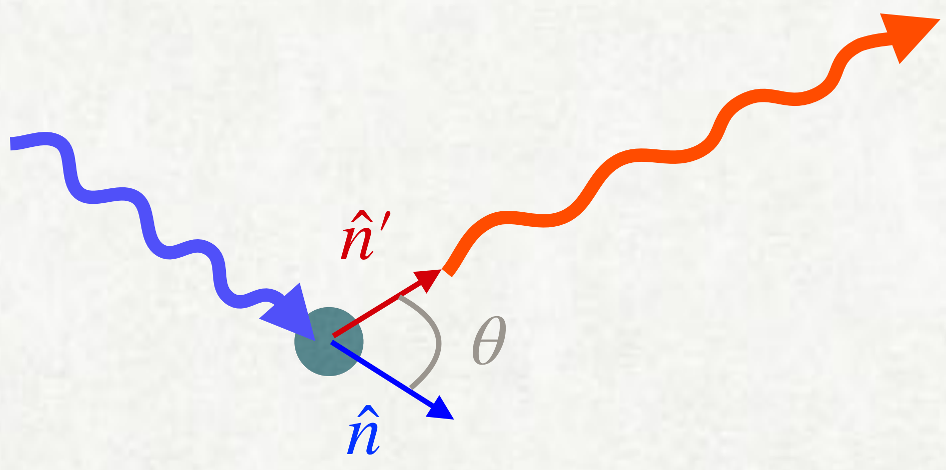
- Ou seja, $P_f^\mu + P_e^\mu - P_f^{'\mu} = P_e^{'\mu}$

DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES



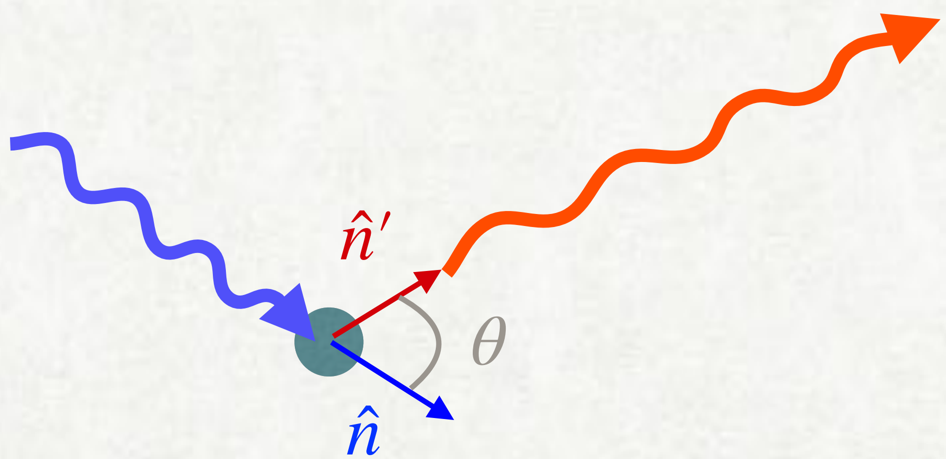
DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

- Espalhamento Compton



DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

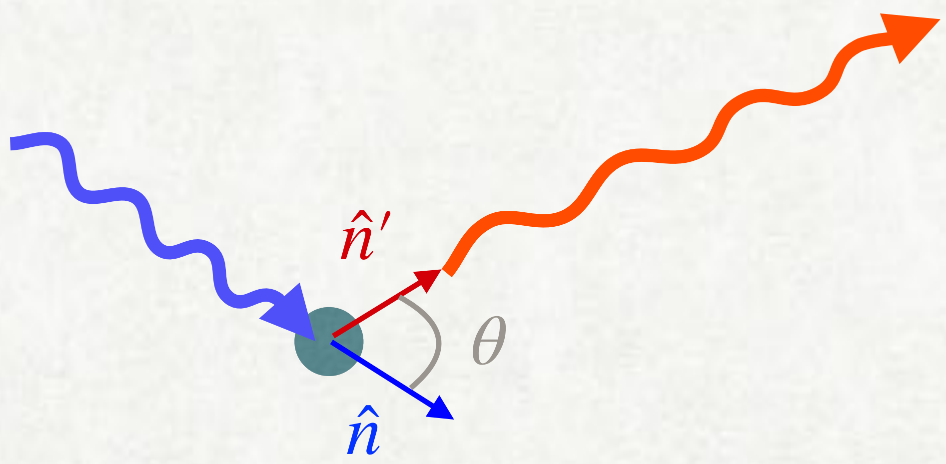
- Espalhamento Compton



- Vamos tomar a norma de ambos os lados dessa expressão:

DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

- Espalhamento Compton

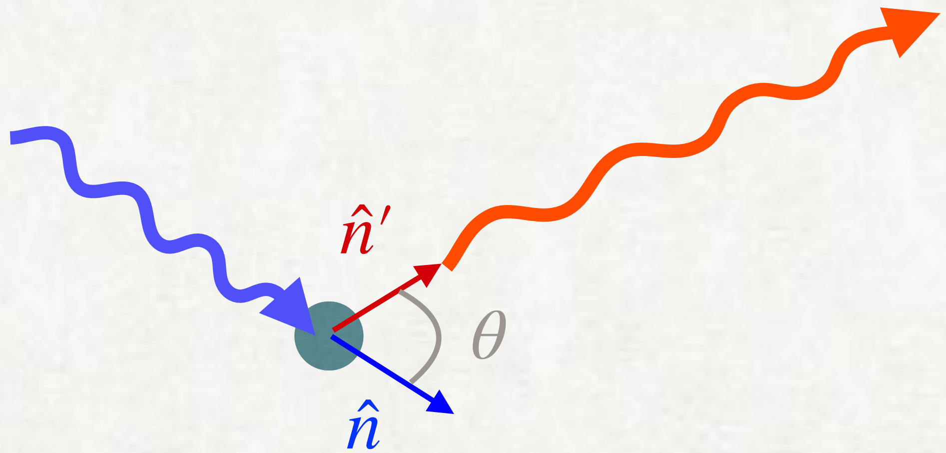


- Vamos tomar a norma de ambos os lados dessa expressão:

- $||P_f^\mu + P_e^\mu - P_f^{'\mu}||^2 = ||P_e^{'\mu}||^2$

DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

- Espalhamento Compton



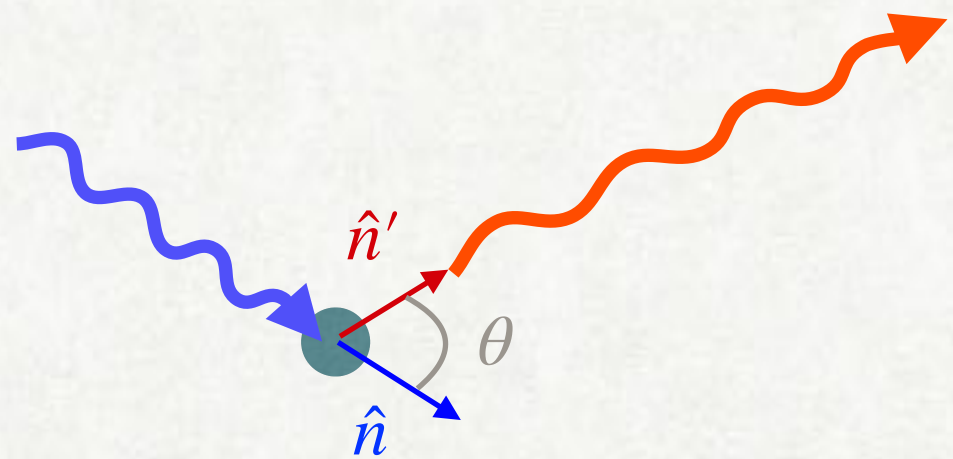
- Vamos tomar a norma de ambos os lados dessa expressão:

- $||P_f^\mu + P_e^\mu - P_f^{\prime\mu}||^2 = ||P_e^{\prime\mu}||^2$

➡ $||P_f^\mu||^2 + ||P_e^\mu||^2 + ||P_f^{\prime\mu}||^2 + 2||P_f^\mu P_e^\mu|| - 2||P_f^\mu P_f^{\prime\mu}|| - 2||P_e^\mu P_f^{\prime\mu}|| = ||P_e^{\prime\mu}||^2$

DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

- Espalhamento Compton



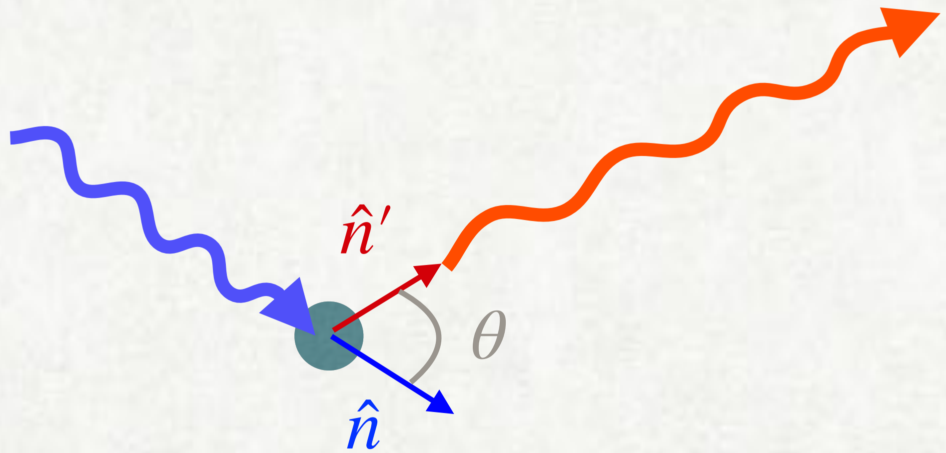
- Vamos tomar a norma de ambos os lados dessa expressão:

- $||P_f^\mu + P_e^\mu - P_f^{'\mu}||^2 = ||P_e^{'\mu}||^2$

➡ $\underbrace{||\cancel{P_f^\mu}||^2}_{=0} + ||P_e^\mu||^2 + \underbrace{||\cancel{P_f^{'\mu}}||^2}_{=0} + 2||P_f^\mu P_e^\mu|| - 2||P_f^\mu P_f^{'\mu}|| - 2||P_e^\mu P_f^{'\mu}|| = ||P_e^{'\mu}||^2$

DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

- Espalhamento Compton



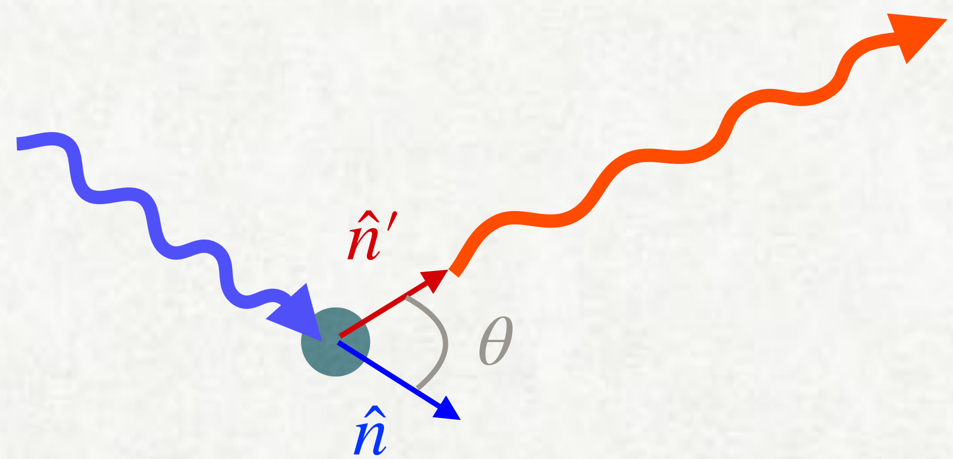
- Vamos tomar a norma de ambos os lados dessa expressão:

- $||P_f^\mu + P_e^\mu - P_f^{'\mu}||^2 = ||P_e^{'\mu}||^2$

➡ $\underbrace{||\cancel{P_f^\mu}||^2}_{=0} + ||\cancel{P_e^\mu}||^2 + \underbrace{||\cancel{P_f^{'\mu}}||^2}_{=0} + 2||P_f^\mu P_e^\mu|| - 2||P_f^\mu P_f^{'\mu}|| - 2||P_e^\mu P_f^{'\mu}|| = ||\cancel{P_e^{'\mu}}||^2$

DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

- Espalhamento Compton



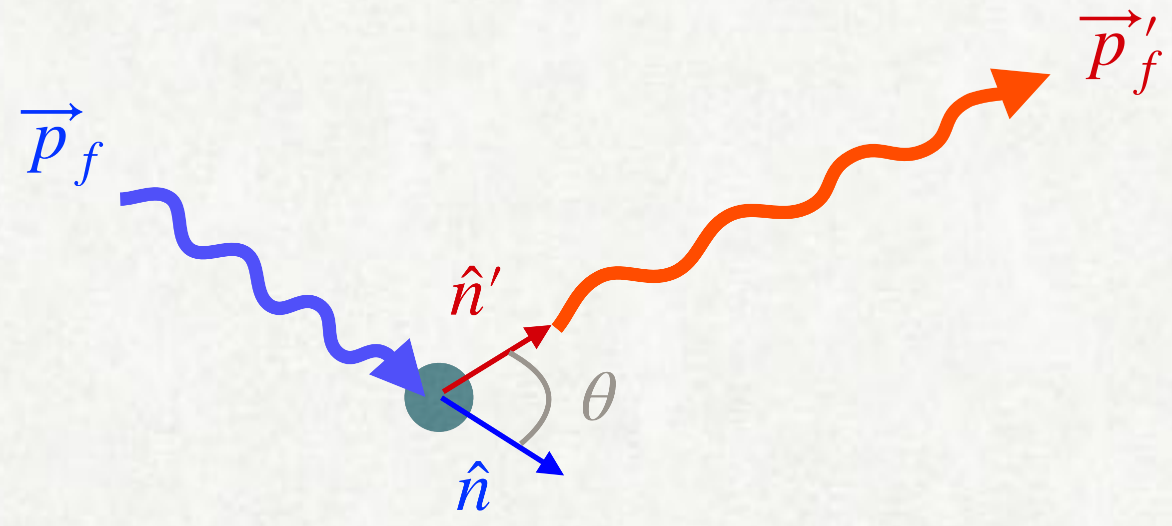
- Vamos tomar a norma de ambos os lados dessa expressão:

- $||P_f^\mu + P_e^\mu - P_f^{'\mu}||^2 = ||P_e^{'\mu}||^2$

➡ $\underbrace{||\cancel{P_f^\mu}||^2}_{=0} + ||\cancel{P_e^\mu}||^2 + \underbrace{||\cancel{P_f^{'\mu}}||^2}_{=0} + 2||P_f^\mu P_e^\mu|| - 2||P_f^\mu P_f^{'\mu}|| - 2||P_e^\mu P_f^{'\mu}|| = ||\cancel{P_e^{'\mu}}||^2$

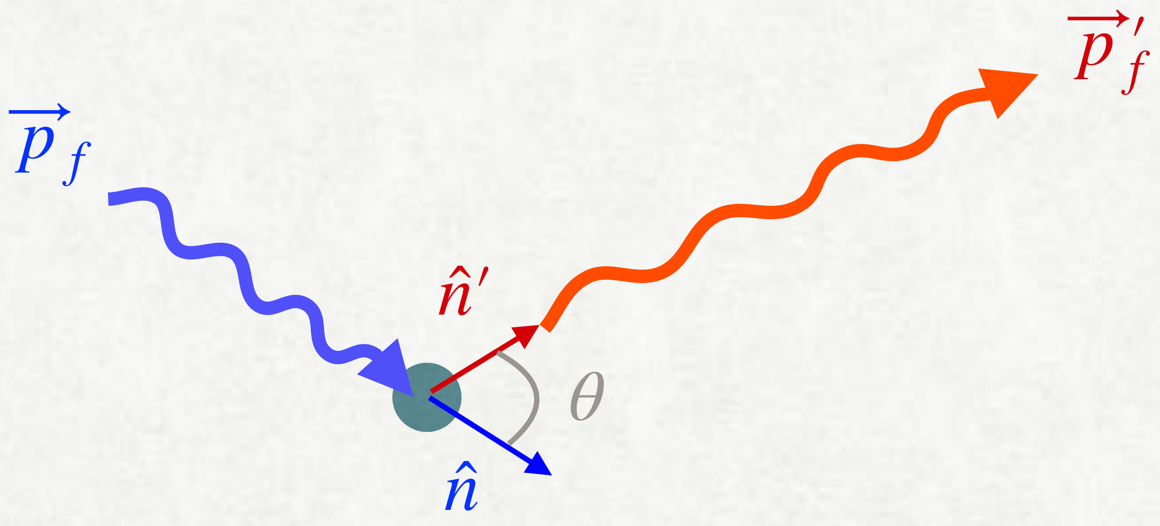
➡ $||P_e^\mu(P_f^\mu - P_f^{'\mu})|| = ||P_f^\mu P_f^{'\mu}||$

DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES



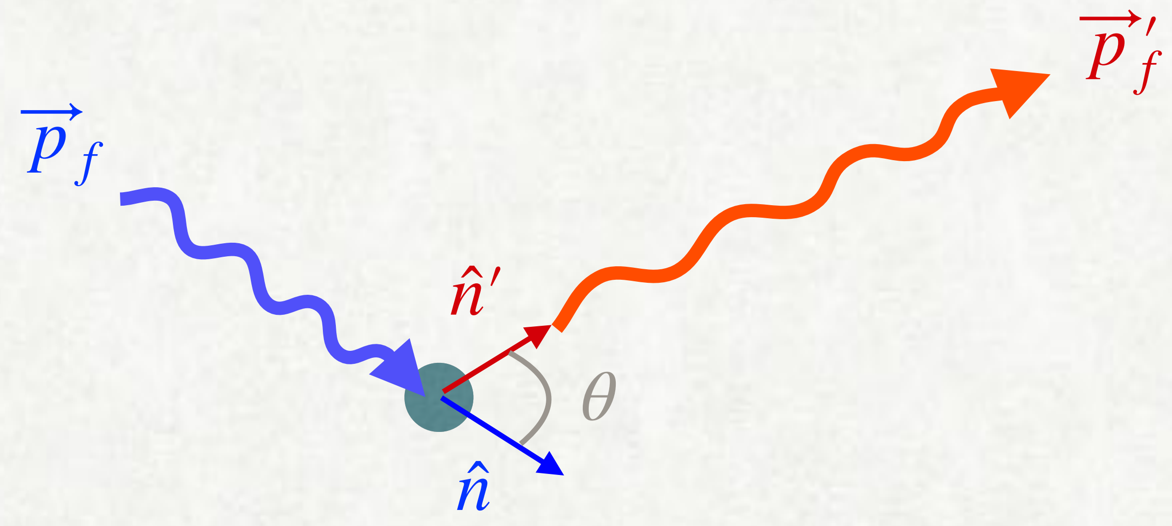
DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

- Espalhamento Compton



DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

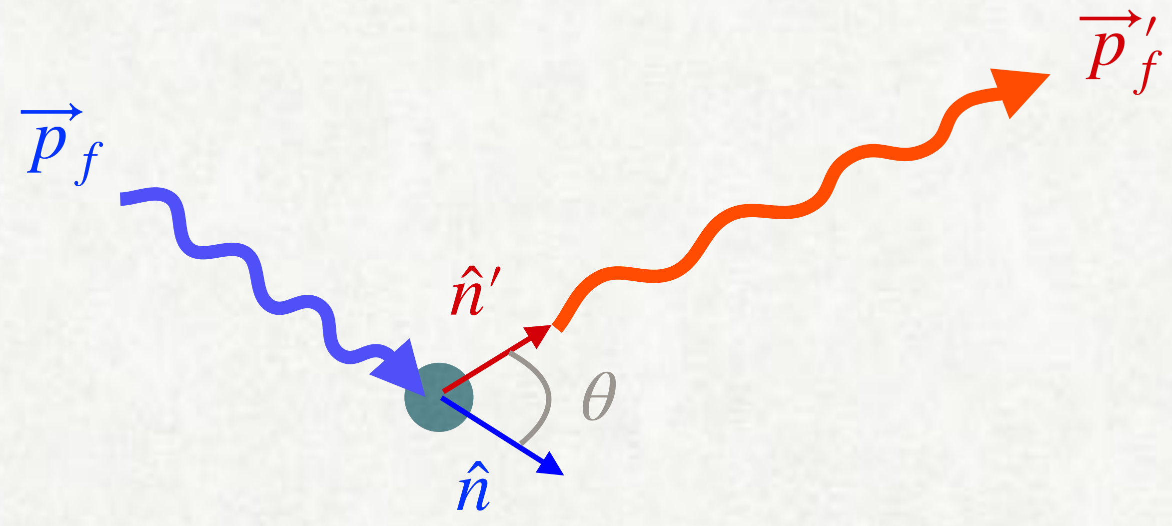
- Espalhamento Compton



- Agora vamos abrir essa última expressão, $||P_e^\mu(P_f^\mu - P_f^{'\mu})|| = ||P_f^\mu P_f^{'\mu}||$

DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

- Espalhamento Compton

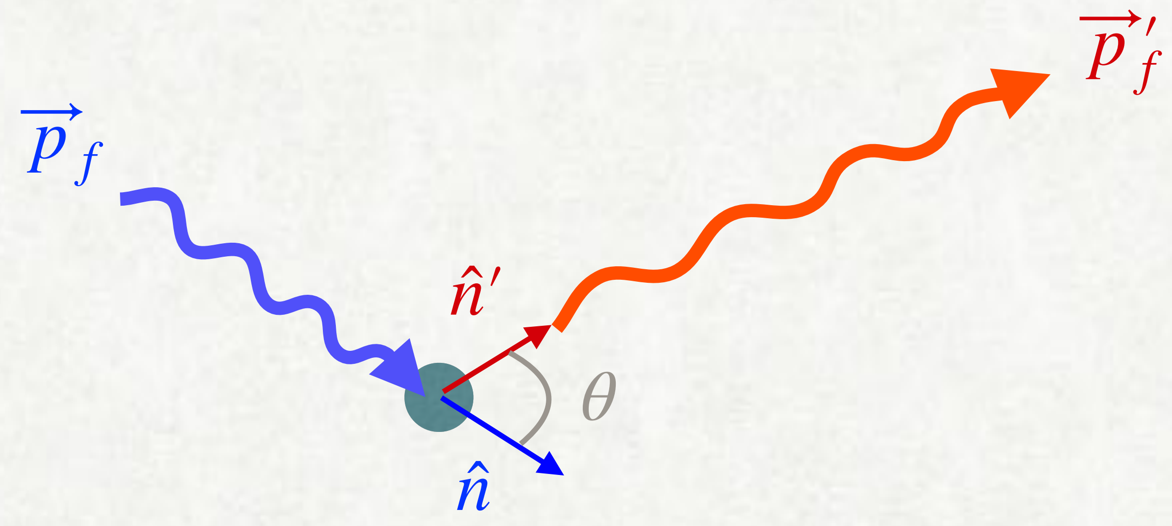


- Agora vamos abrir essa última expressão, $||P_e^{\mu}(P_f^{\mu} - P_f^{'\mu})|| = ||P_f^{\mu} P_f^{'\mu}||$

➡ $P_e^0(P_f^0 - P_f^{'0}) + \overrightarrow{p}_e \cdot (\overrightarrow{p}_f - \overrightarrow{p}'_f) = P_f^0 P_f^{'0} - \overrightarrow{p}_f \cdot \overrightarrow{p}'_f$

DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

- Espalhamento Compton



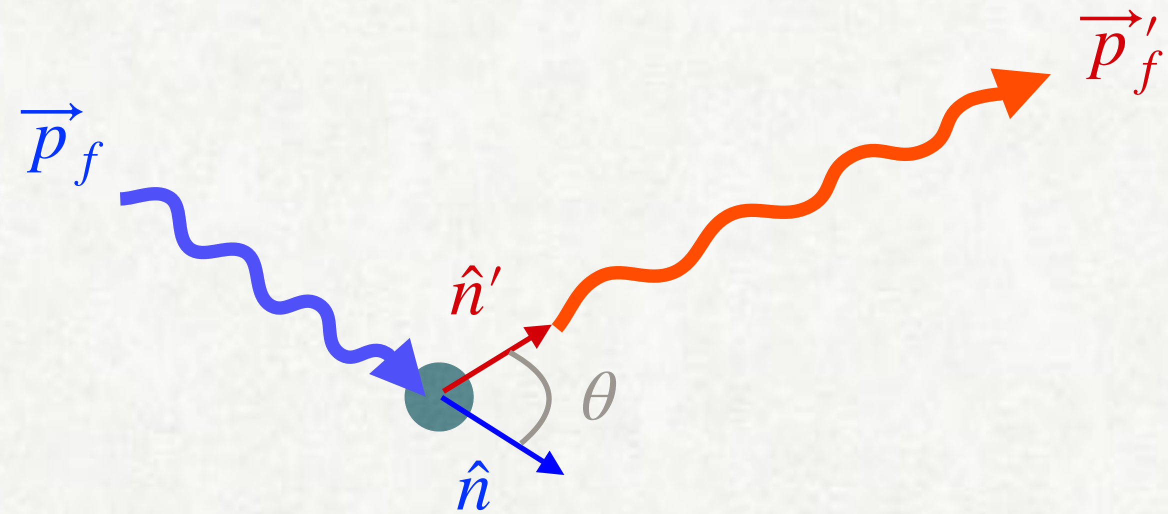
- Agora vamos abrir essa última expressão, $||P_e^\mu(P_f^\mu - P_f^{'\mu})|| = ||P_f^\mu P_f^{'\mu}||$

➡ $P_e^0(P_f^0 - P_f^{'0}) + \overrightarrow{p}_e \cdot (\overrightarrow{p}_f - \overrightarrow{p}'_f) = P_f^0 P_f^{'0} - \overrightarrow{p}_f \cdot \overrightarrow{p}'_f$

- Note que $P_e^0 = E_e/c = m_e c$, $P_f^0 = E_f/c = h\nu/c$, etc

DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

- Espalhamento Compton



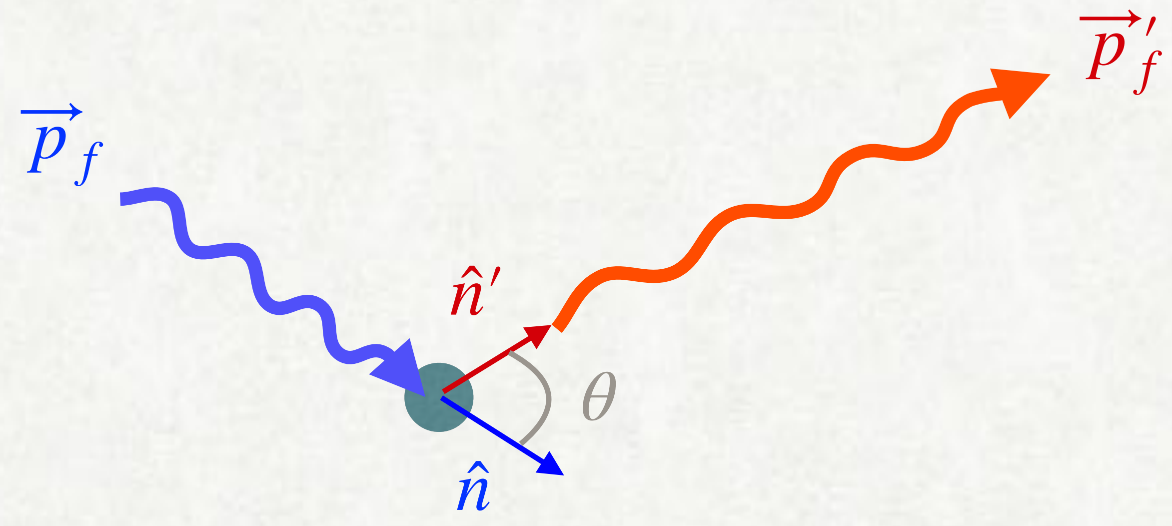
- Agora vamos abrir essa última expressão, $||P_e^\mu(P_f^\mu - P_f^{'\mu})|| = ||P_f^\mu P_f^{'\mu}||$

➡ $P_e^0(P_f^0 - P_f^{'0}) + \underbrace{\cancel{\overrightarrow{p}_e}}_{=0} \cdot (\overrightarrow{p}_f - \overrightarrow{p}'_f) = P_f^0 P_f^{'0} - \overrightarrow{p}_f \cdot \overrightarrow{p}'_f$

- Note que $P_e^0 = E_e/c = m_e c$, $P_f^0 = E_f/c = h\nu/c$, etc

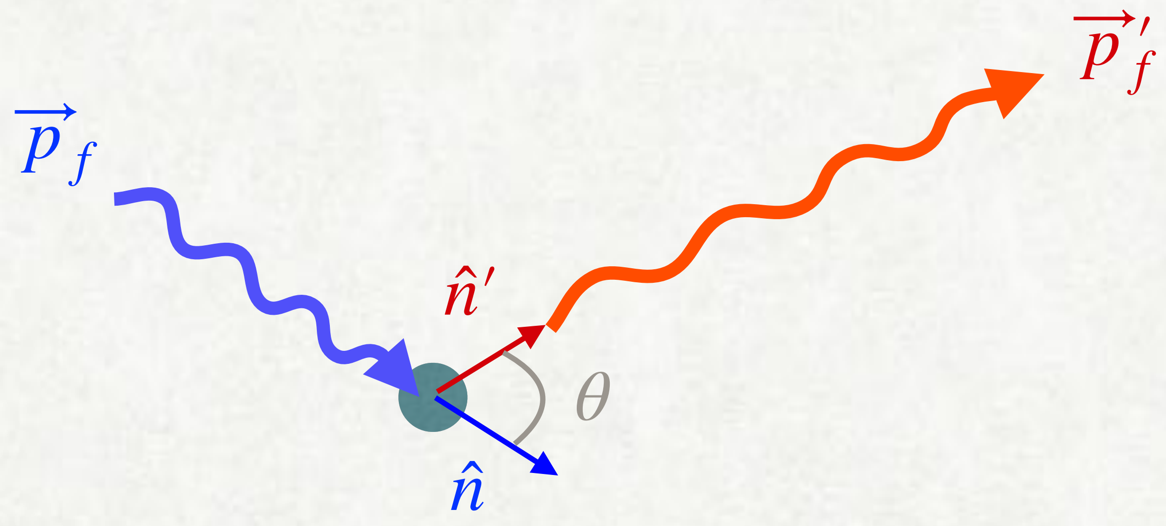
➡ $m_e c^2 \times (h\nu - h\nu') = h\nu \times h\nu' - (h\nu\hat{n}) \cdot (h\nu'\hat{n}')$

DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES



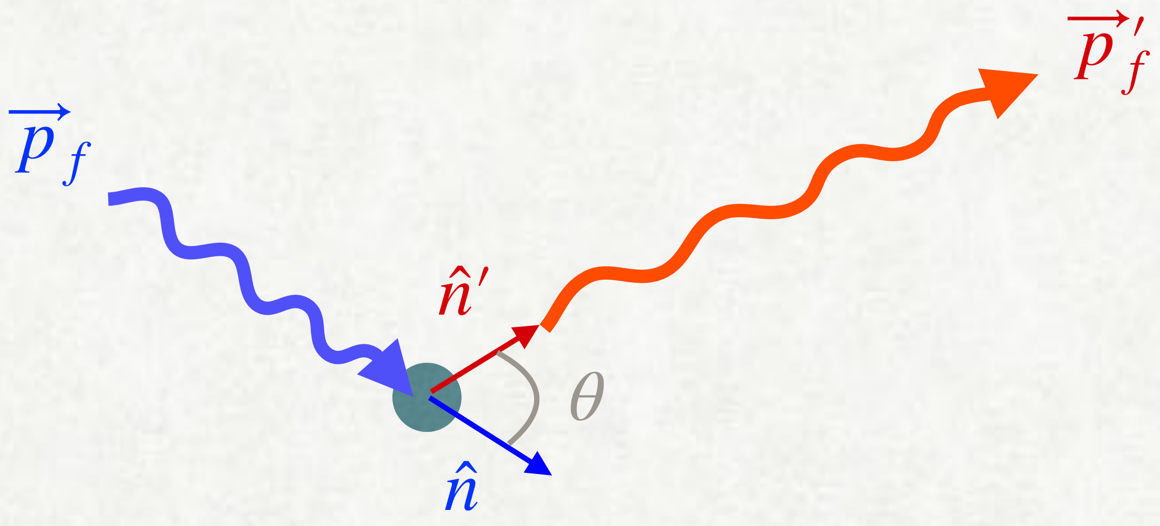
DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

- Espalhamento Compton



DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

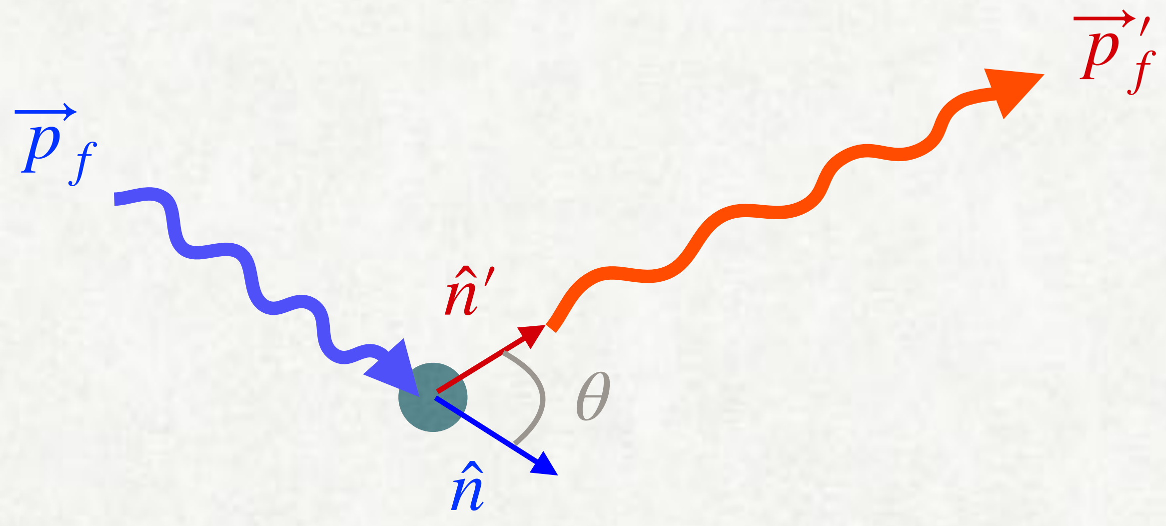
- Espalhamento Compton



- Ou seja, obtemos que

DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

- Espalhamento Compton

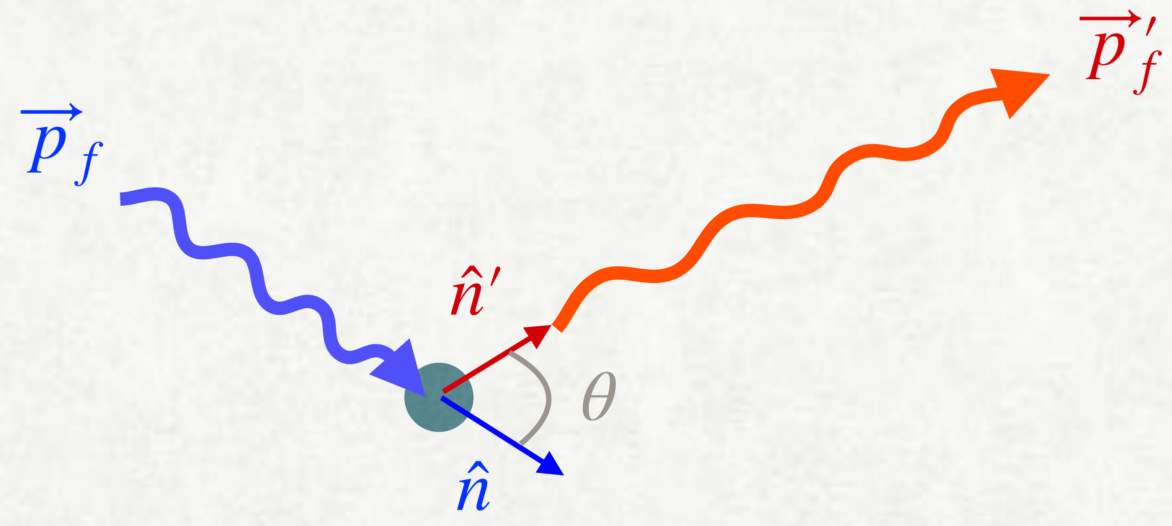


- Ou seja, obtemos que

➡ $$\frac{\nu - \nu'}{\nu\nu'} = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$$

DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

- Espalhamento Compton



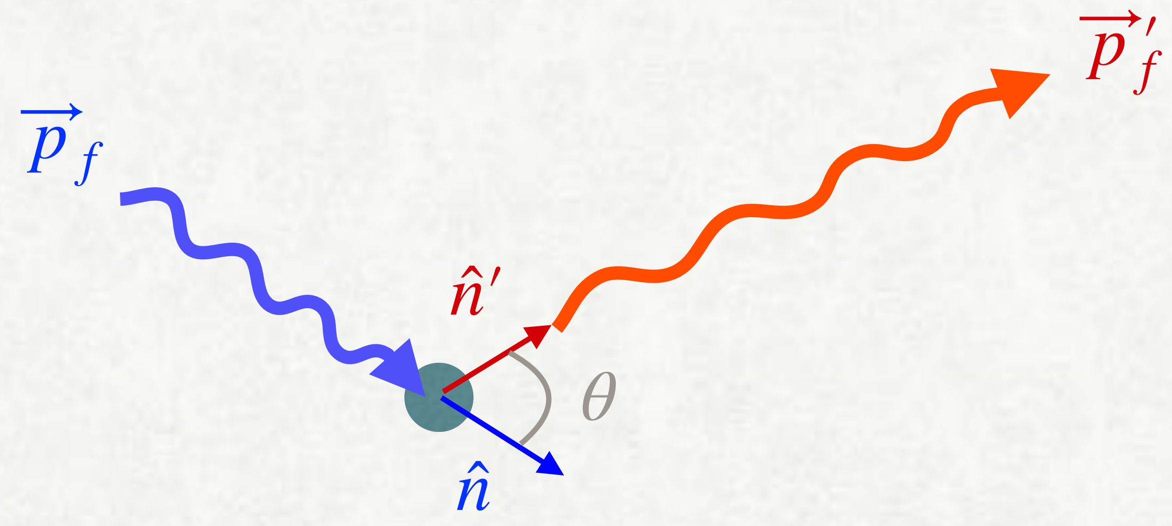
- Ou seja, obtemos que

➡ $$\frac{\nu - \nu'}{\nu\nu'} = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$$

- Isso é geralmente usando $\nu = c/\lambda$, como:

DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

- Espalhamento Compton



- Ou seja, obtemos que

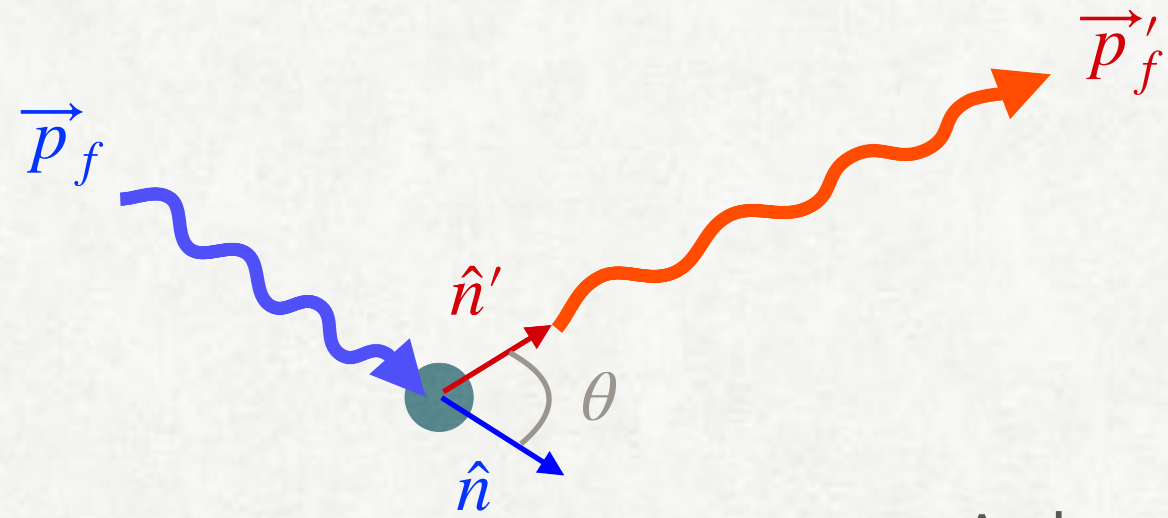
➡ $$\frac{\nu - \nu'}{\nu\nu'} = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$$

- Isso é geralmente usando $\nu = c/\lambda$, como:

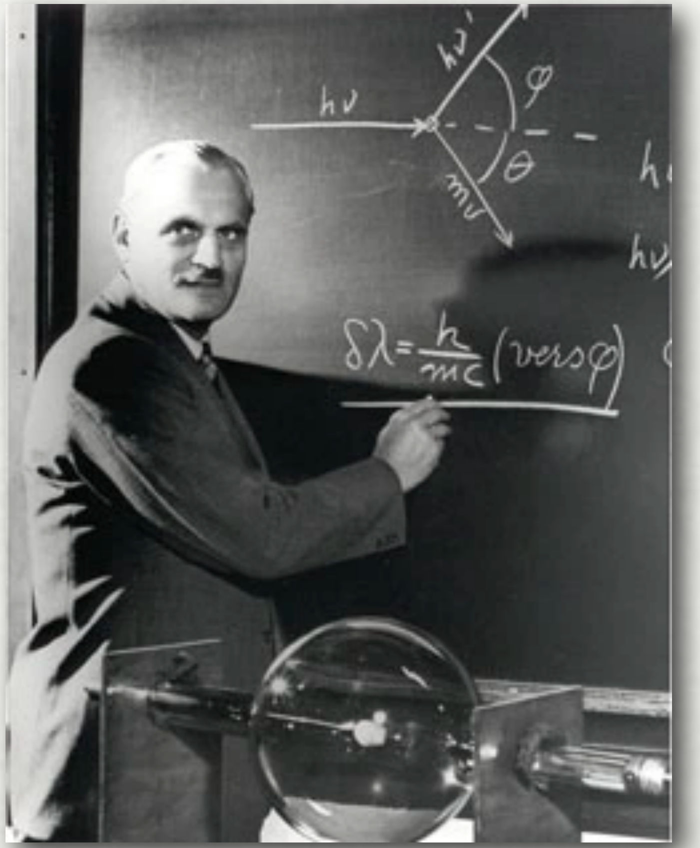
➡ $$\lambda' - \lambda = \frac{2h}{m_e c}\,\mathrm{sen}^2\,\theta$$

DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

- Espalhamento Compton



Arthur Compton



- Ou seja, obtemos que

➡ $$\frac{\nu - \nu'}{\nu\nu'} = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$$

- Isso é geralmente usando $\nu = c/\lambda$, como:

➡ $$\lambda' - \lambda = \frac{2h}{m_e c}\,\mathrm{sen}^2\,\theta$$

VETORES E TENSORES DE MINKOWSKI

VETORES E TENSORES DE MINKOWSKI

- Já vimos aqui alguns 4-vetores: dr^μ , U^μ , P^μ , ∂_μ

VETORES E TENSORES DE MINKOWSKI

- Já vimos aqui alguns 4-vetores: dr^μ , U^μ , P^μ , ∂_μ

- Podemos montar um escalar da combinação de um vetor e um vetor dual:

  $||P||^2 = P_\mu P^\mu$, ou $a = \partial_\mu V^\mu$, ou mesmo $b = A^\mu \, \partial_\mu \phi$.

VETORES E TENSORES DE MINKOWSKI

- Já vimos aqui alguns 4-vetores: dr^μ , U^μ , P^μ , ∂_μ
- Podemos montar um escalar da combinação de um vetor e um vetor dual:

  $||P||^2 = P_\mu P^\mu$, ou $a = \partial_\mu V^\mu$, ou mesmo $b = A^\mu \, \partial_\mu \phi$.
- Note que escalares não se transformam sob Lorentz, $a \to a' = a$, etc.

VETORES E TENSORES DE MINKOWSKI

- Já vimos aqui alguns 4-vetores: dr^μ , U^μ , P^μ , ∂_μ

- Podemos montar um escalar da combinação de um vetor e um vetor dual:

  $||P||^2 = P_\mu P^\mu$, ou $a = \partial_\mu V^\mu$, ou mesmo $b = A^\mu \, \partial_\mu \phi$.

- Note que escalares não se transformam sob Lorentz, $a \to a' = a$, etc.

- Mas podemos também pensar em objetos do tipo:

VETORES E TENSORES DE MINKOWSKI

- Já vimos aqui alguns 4-vetores: dr^μ , U^μ , P^μ , ∂_μ

- Podemos montar um escalar da combinação de um vetor e um vetor dual:

  $||P||^2 = P_\mu P^\mu$, ou $a = \partial_\mu V^\mu$, ou mesmo $b = A^\mu \partial_\mu \phi$.

- Note que escalares não se transformam sob Lorentz, $a \to a' = a$, etc.

- Mas podemos também pensar em objetos do tipo:

  $\partial_\mu V_\nu$

VETORES E TENSORES DE MINKOWSKI

VETORES E TENSORES DE MINKOWSKI

- Mas como um objeto desses, $\partial_\mu V_\nu$, se comporta sob uma transformação de Lorentz?

VETORES E TENSORES DE MINKOWSKI

- Mas como um objeto desses, $\partial_\mu V_\nu$, se comporta sob uma transformação de Lorentz?

- Basta lembrar que:

$\partial_\mu \to \partial'_\mu = \Lambda_\mu^{\ \alpha} \partial_\alpha$ e $V_\nu \to V'_\nu = \Lambda_\nu^{\ \beta} V_\beta$

VETORES E TENSORES DE MINKOWSKI

- Mas como um objeto desses, $\partial_\mu V_\nu$, se comporta sob uma transformação de Lorentz?

- Basta lembrar que:

$$\partial_\mu \to \partial'_\mu = \Lambda_\mu{}^\alpha \partial_\alpha \;\text{ e }\; V_\nu \to V'_\nu = \Lambda_\nu{}^\beta V_\beta$$

- Portanto, temos que:

$$\partial_\mu V_\nu \to \partial'_\mu V'_\nu = (\Lambda_\mu{}^\alpha \partial_\alpha)(\Lambda_\nu{}^\beta V_\beta) = \Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda_\nu{}^\beta \, \partial_\alpha V_\beta$$

VETORES E TENSORES DE MINKOWSKI

- Mas como um objeto desses, $\partial_\mu V_\nu$, se comporta sob uma transformação de Lorentz?

- Basta lembrar que:

$$\partial_\mu \to \partial'_\mu = \Lambda_\mu^{\ \alpha} \partial_\alpha \ \text{ e } \ V_\nu \to V'_\nu = \Lambda_\nu^{\ \beta} V_\beta$$

- Portanto, temos que:

$$\partial_\mu V_\nu \to \partial'_\mu V'_\nu = (\Lambda_\mu^{\ \alpha} \partial_\alpha)(\Lambda_\nu^{\ \beta} V_\beta) = \Lambda_\mu^{\ \alpha} \Lambda_\nu^{\ \beta} \partial_\alpha V_\beta$$

- Ou seja, se chamamos esse objeto de $T_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu$, temos:

$$T_{\mu\nu} \to T'_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^{\ \alpha} \Lambda_\nu^{\ \beta} T_{\alpha\beta}$$

VETORES E TENSORES DE MINKOWSKI

VETORES E TENSORES DE MINKOWSKI

- Do mesmo modo, podemos inventar um objeto $S^{\mu\nu} = U^{\mu}P^{\nu}$, e esse objeto se transforma como:

$$S^{\mu\nu} \to S^{'\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}S^{\alpha\beta}$$

VETORES E TENSORES DE MINKOWSKI

- Do mesmo modo, podemos inventar um objeto $S^{\mu\nu} = U^{\mu}P^{\nu}$, e esse objeto se transforma como:

$$S^{\mu\nu} \rightarrow S'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}S^{\alpha\beta}$$

- É claro que podemos continuar com isso até cansar! O ponto é que objetos que se transformam desse modo (as matrizes Λ) são chamados de **tensores de Minkowski**. Sob transformações de coordenadas os tensores se transformam de um modo que preserva escalares, por exemplo:

$$q = T_{\mu\nu}S^{\mu\nu} \rightarrow q' = T'_{\mu\nu}S'^{\mu\nu} \overset{!}{=} q$$

VETORES E TENSORES DE MINKOWSKI

- Do mesmo modo, podemos inventar um objeto $S^{\mu\nu} = U^{\mu}P^{\nu}$, e esse objeto se transforma como:

$$S^{\mu\nu} \rightarrow S'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}\, S^{\alpha\beta}$$

- É claro que podemos continuar com isso até cansar! O ponto é que objetos que se transformam desse modo (as matrizes Λ) são chamados de **tensores de Minkowski**. Sob transformações de coordenadas os tensores se transformam de um modo que preserva escalares, por exemplo:

$$q = T_{\mu\nu}S^{\mu\nu} \rightarrow q' = T'_{\mu\nu}S'^{\mu\nu} \overset{!}{=} q$$

- A demonstração disso é "fácil":

$$q' = (\Lambda_{\mu}^{\alpha}\Lambda_{\nu}^{\beta}T_{\alpha\beta})\,(\Lambda_{\sigma}^{\mu}\Lambda_{\lambda}^{\nu}S^{\sigma\lambda})$$

VETORES E TENSORES DE MINKOWSKI

- Do mesmo modo, podemos inventar um objeto $S^{\mu\nu} = U^\mu P^\nu$, e esse objeto se transforma como:

$$S^{\mu\nu} \to S'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta S^{\alpha\beta}$$

- É claro que podemos continuar com isso até cansar! O ponto é que objetos que se transformam desse modo (as matrizes Λ) são chamados de **tensores de Minkowski**. Sob transformações de coordenadas os tensores se transformam de um modo que preserva escalares, por exemplo:

$$q = T_{\mu\nu} S^{\mu\nu} \to q' = T'_{\mu\nu} S'^{\mu\nu} \stackrel{!}{=} q$$

- A demonstração disso é "fácil":

$$q' = (\Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta T_{\alpha\beta})\,(\Lambda^\mu_\sigma \Lambda^\nu_\lambda S^{\sigma\lambda})$$

- Mas note que $\Lambda_\mu^\alpha = (\Lambda^\mu_\alpha)^{-1}$, portanto $q' = (\Lambda^\mu_\alpha)^{-1} \Lambda^\mu_\sigma \, (\Lambda^\nu_\beta)^{-1} \Lambda^\nu_\lambda \, T_{\alpha\beta} \, S^{\sigma\lambda}$

$$\Rightarrow \quad q' = \delta^\alpha_\sigma \, \delta^\beta_\lambda T_{\alpha\beta} \, S^{\sigma\lambda} \; = \; T_{\sigma\lambda} \, S^{\sigma\lambda} \stackrel{!}{=} q$$

ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE

ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE

- Vamos agora falar de uma área da Física que já "nasceu"relativística, mesmo que isso não tenha sido reconhecido pelos seus descobridores. Estamos falando, claro, do Eletromagnetismo.

ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE

- Vamos agora falar de uma área da Física que já "nasceu"relativística, mesmo que isso não tenha sido reconhecido pelos seus descobridores. Estamos falando, claro, do Eletromagnetismo.

- No vácuo, as equações de Maxwell são (em unidades Gaussianas):

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \partial_t \vec{E} = \vec{J}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho_q$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE

ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE

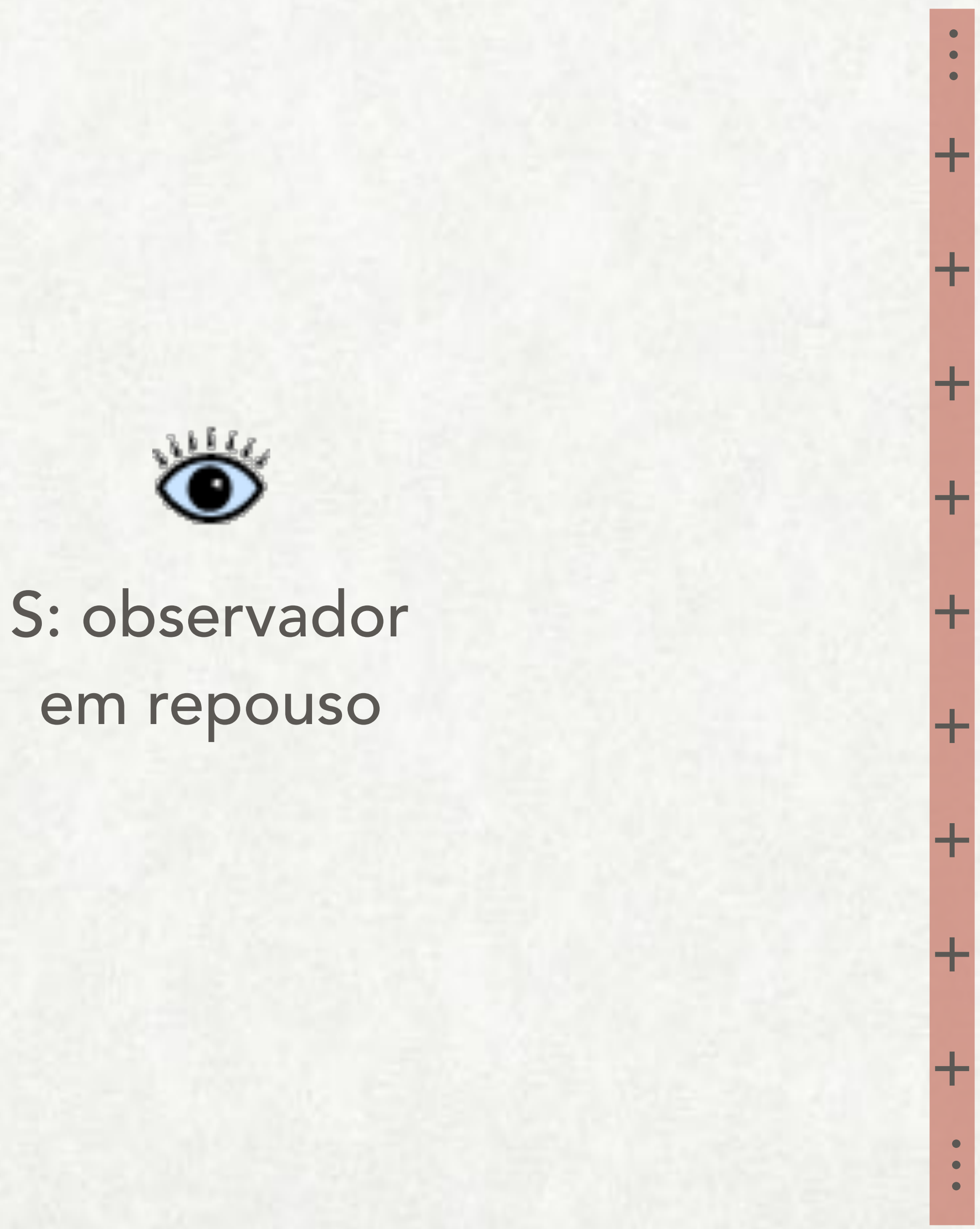
- No Eletromagnetismo os campos elétrico e magnético são ligados, mas nos acostumamos a pensar que cada um guarda informações distintas: um nos dá a resposta à distribuição de cargas, outro nos dá a resposta à distribuição de correntes.

ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE

- No Eletromagnetismo os campos elétrico e magnético são ligados, mas nos acostumamos a pensar que cada um guarda informações distintas: um nos dá a resposta à distribuição de cargas, outro nos dá a resposta à distribuição de correntes.

- O exemplo a seguir mostra que isso não pode ser bem assim.

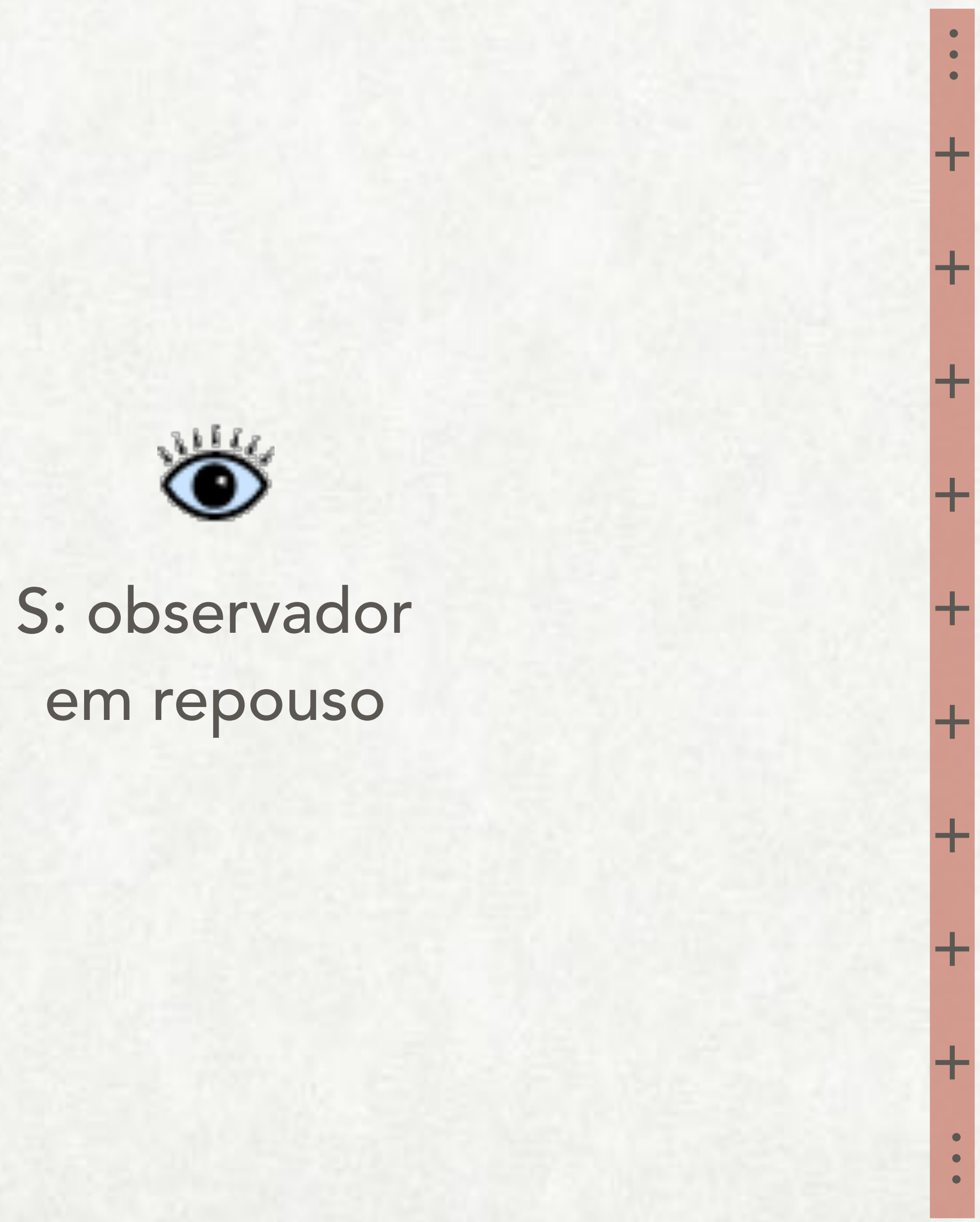
ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE



$$\rho_q = \lambda \delta(x)\delta(y) \qquad \lambda = \frac{dq}{dz}$$

ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE

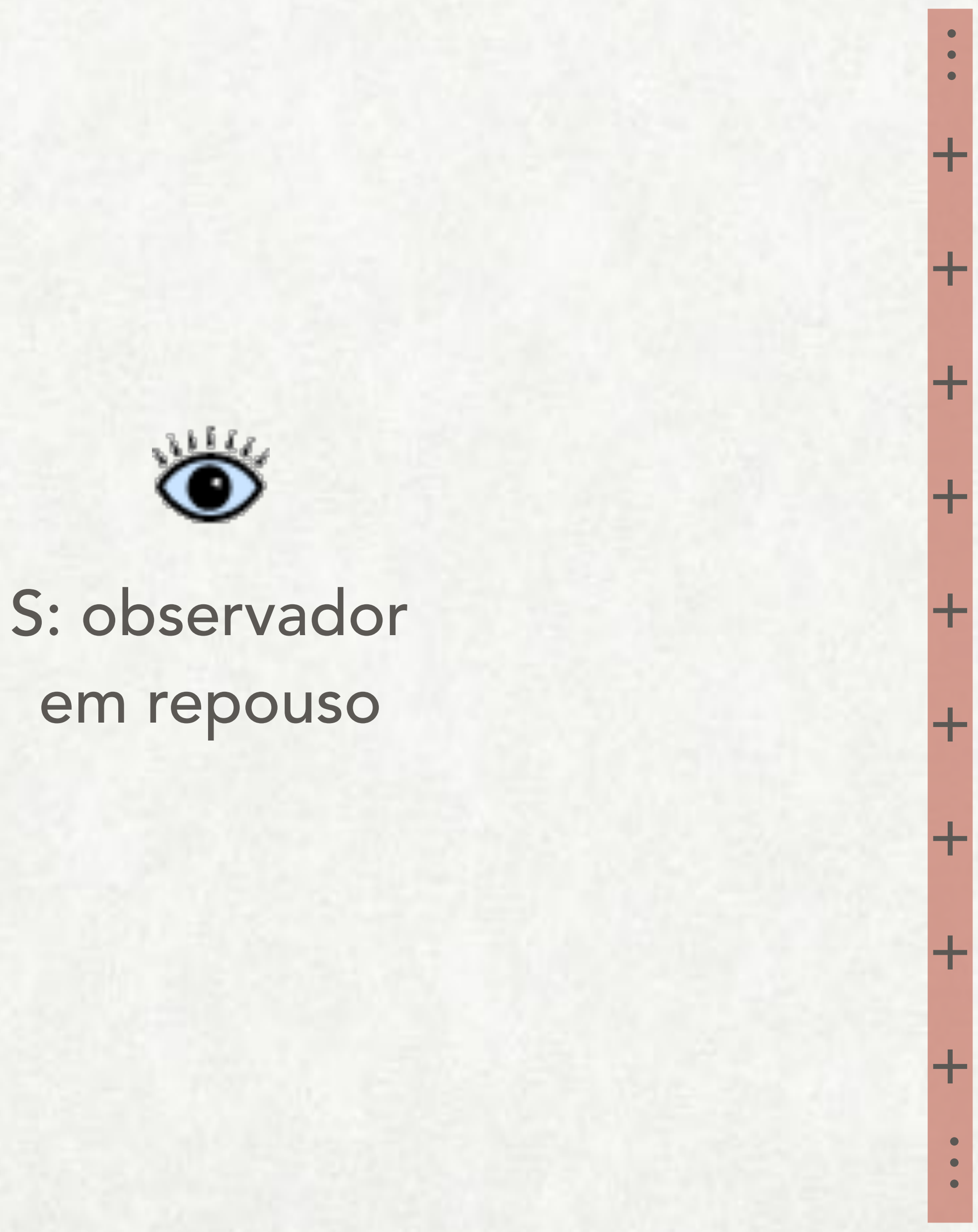
- Considere um fio infinito com densidade linear de carga constante:



$$\rho_q = \lambda \delta(x)\delta(y) \qquad \lambda = \frac{dq}{dz}$$

ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE

- Considere um fio infinito com densidade linear de carga constante:



$$\rho_q = \lambda \delta(x)\delta(y) \qquad \lambda = \frac{dq}{dz}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho_q \quad \Rightarrow \quad \int d\vec{S} \cdot \vec{E} = q_V$$

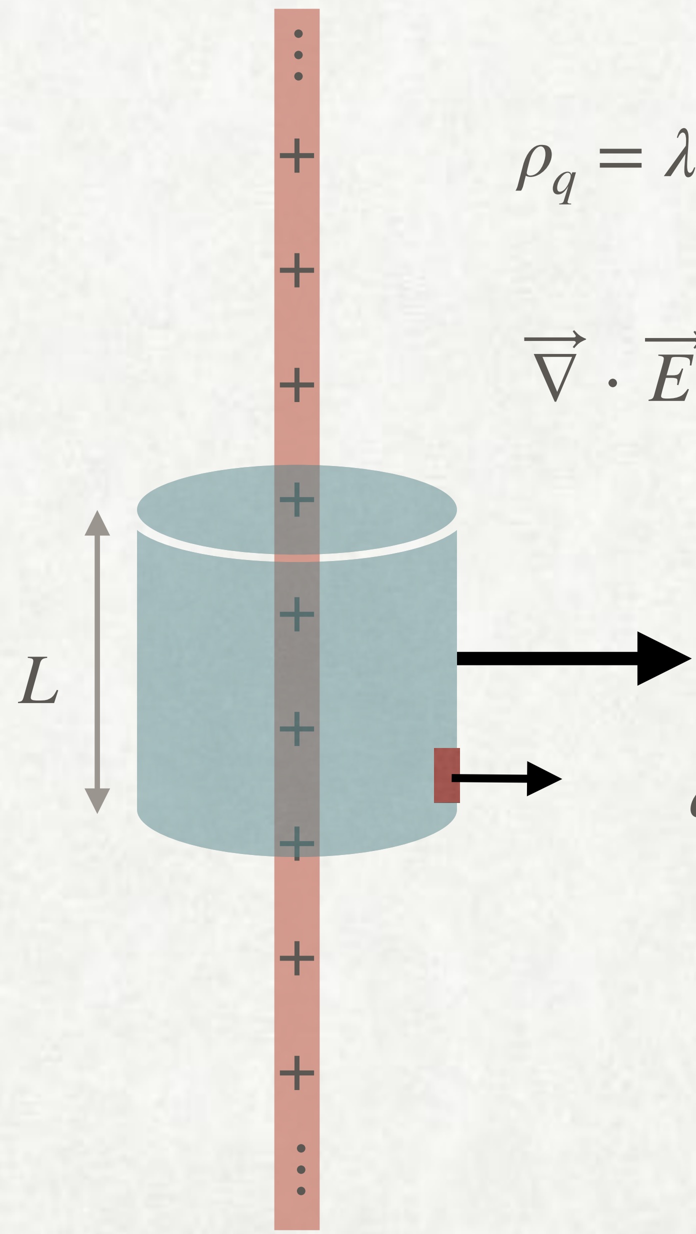
ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE

- Considere um fio infinito com densidade linear de carga constante:

$$\rho_q = \lambda\delta(x)\delta(y) \qquad \lambda = \frac{dq}{dz}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho_q \quad \Rightarrow \quad \int d\vec{S} \cdot \vec{E} = q_V$$

S: observador em repouso



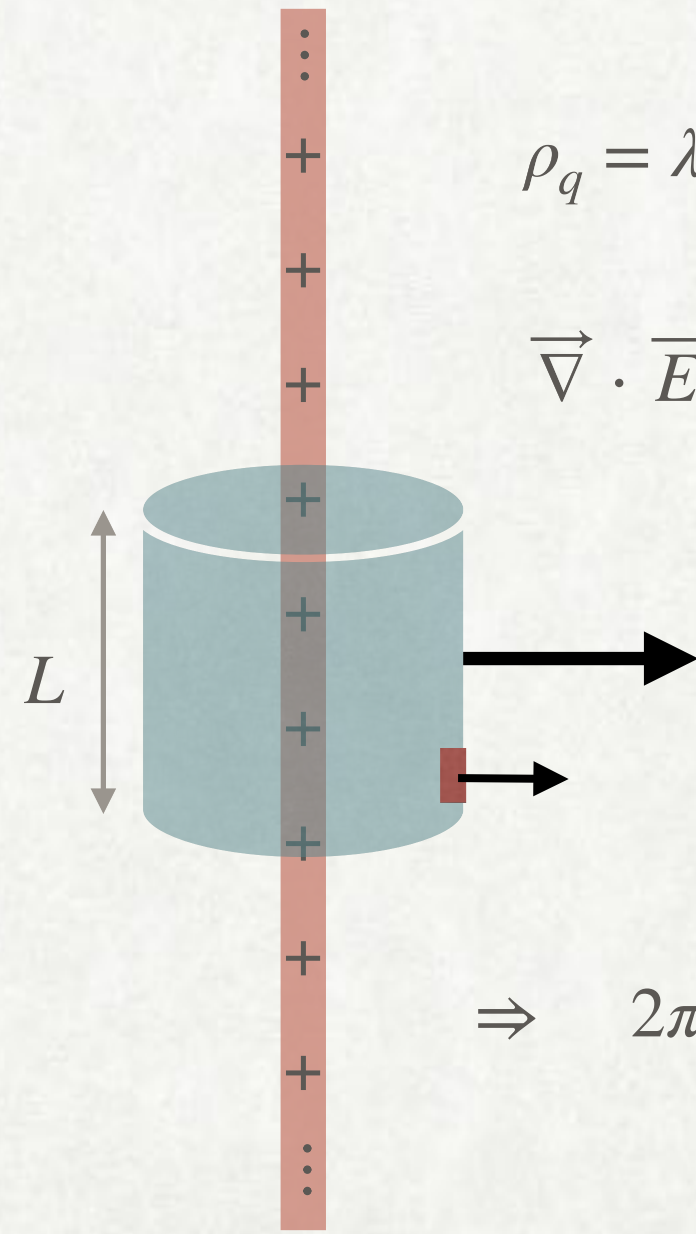
$$\vec{E} = E_\rho \, \hat{\rho}$$

$$d\vec{S} = 2\pi\rho \, dz \, \hat{\rho}$$

ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE

- Considere um fio infinito com densidade linear de carga constante:

S: observador em repouso



$$\rho_q = \lambda \delta(x) \delta(y) \qquad \lambda = \frac{dq}{dz}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho_q \quad \Rightarrow \quad \int d\vec{S} \cdot \vec{E} = q_V$$

$$\vec{E} = E_\rho \, \hat{\rho}$$

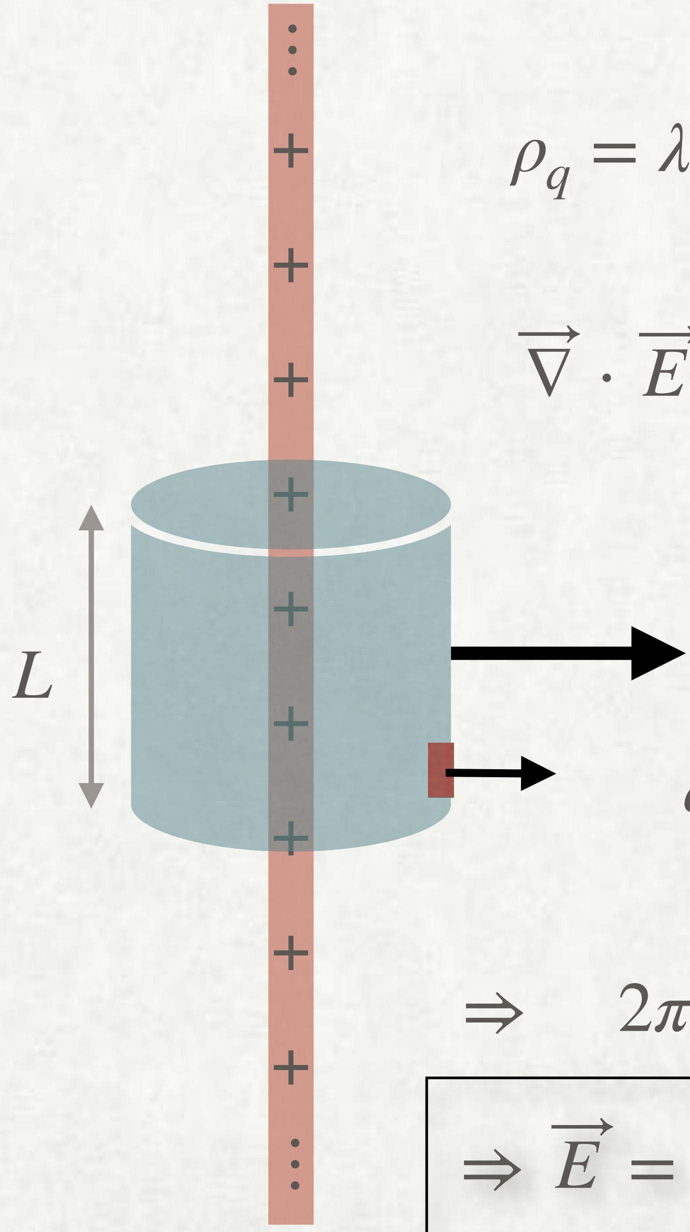
$$d\vec{S} = 2\pi \rho \, dz \, \hat{\rho}$$

$$\Rightarrow \quad 2\pi \rho L E_\rho = \lambda L$$

ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE

- Considere um fio infinito com densidade linear de carga constante:

S: observador em repouso



$$\rho_q = \lambda \delta(x)\delta(y) \qquad \lambda = \frac{dq}{dz}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho_q \quad \Rightarrow \quad \int d\vec{S} \cdot \vec{E} = q_V$$

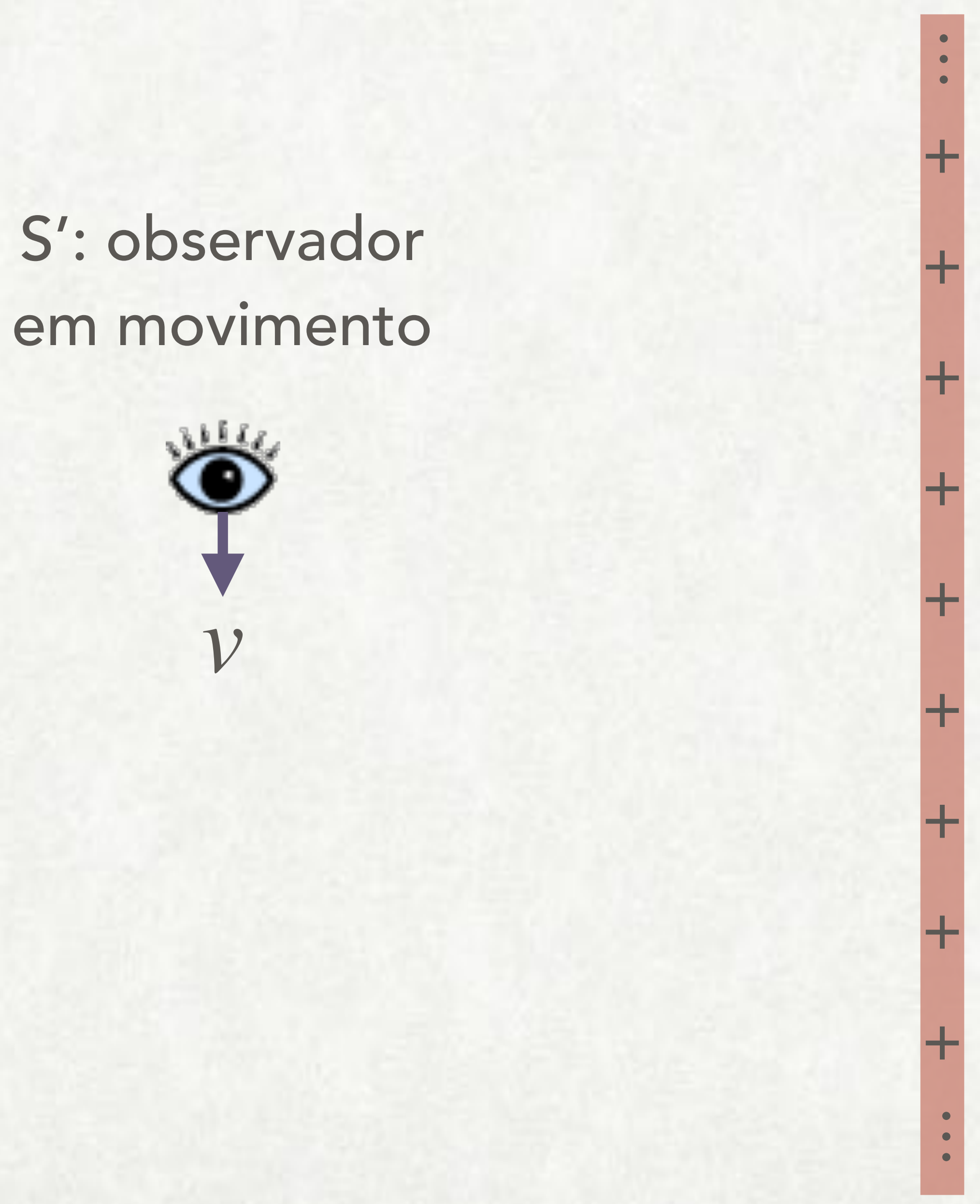
$$\vec{E} = E_\rho \, \hat{\rho}$$

$$d\vec{S} = 2\pi\rho \, dz \, \hat{\rho}$$

$$\Rightarrow \quad 2\pi \rho \, L \, E_\rho = \lambda \, L$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi \rho} \hat{\rho}}$$

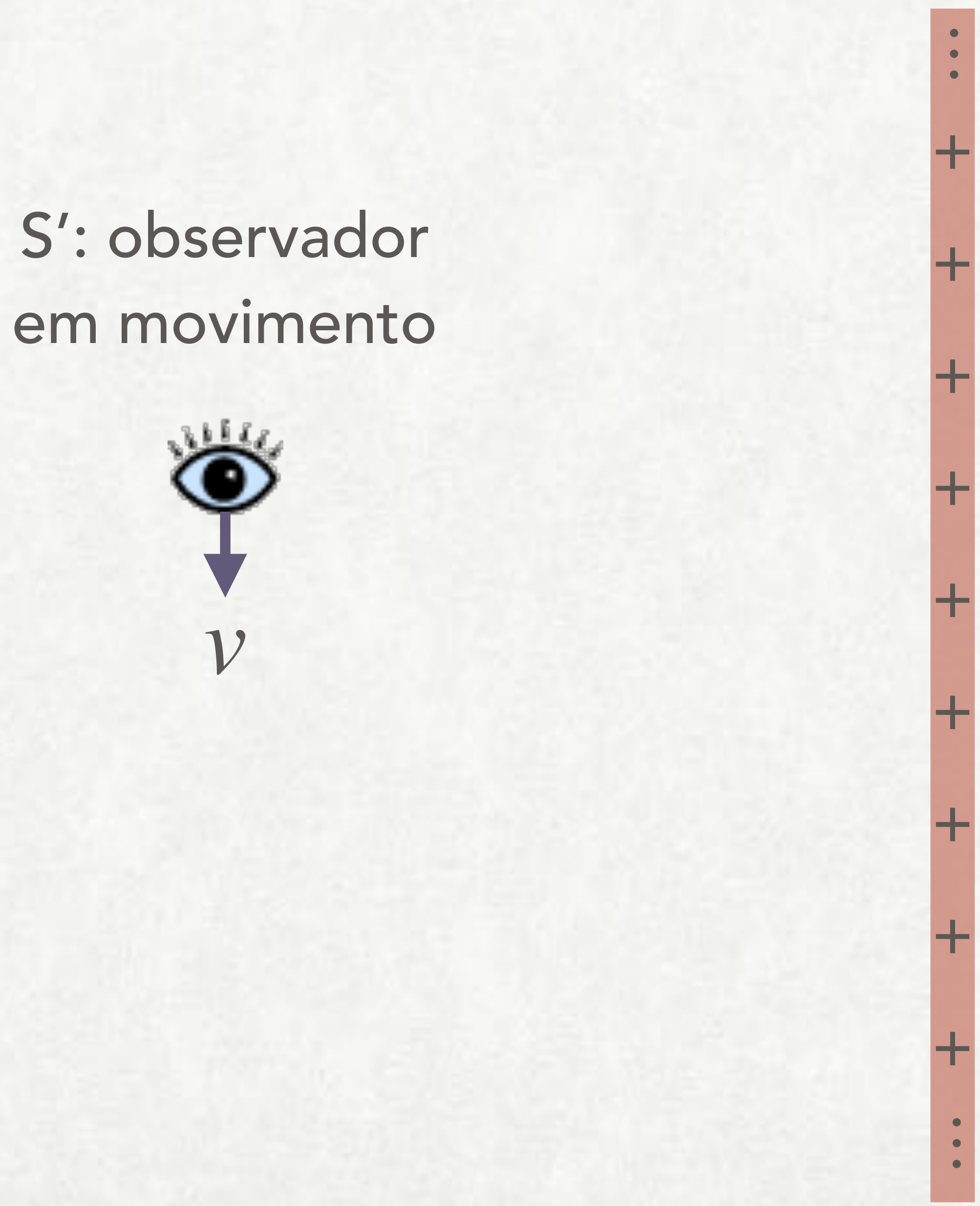
ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE



* Note que as direções x, y , ou ρ, φ , não são afetadas pela transformação

ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE

- Agora, esse mesmo fio infinito é observado por um sujeito em movimento:



* Note que as direções x, y , ou ρ, φ , não são afetadas pela transformação

ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE

Observador S'

* Note que as direções x, y , ou ρ, φ , não são afetadas pela transformação

ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE

- No referencial S’, o fio infinito não só está carregado, como leva uma corrente:

* Note que as direções x, y , ou ρ, φ , não são afetadas pela transformação

ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE

- No referencial S', o fio infinito não só está carregado, como leva uma corrente:

$$\rho'_q = \lambda' \delta(x)\delta(y) \qquad \lambda' = \frac{dq}{dz'}$$

$$\vec{J}\,' = \lambda'\, v\, \delta(x)\delta(y)\, \hat{z} \qquad I' = \lambda'\, v$$

* Note que as direções x, y , ou ρ, φ , não são afetadas pela transformação

ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE

- No referencial S', o fio infinito não só está carregado, como leva uma corrente:

Observador S'

$$\rho'_q = \lambda' \delta(x)\delta(y) \qquad \lambda' = \frac{dq}{dz'}$$

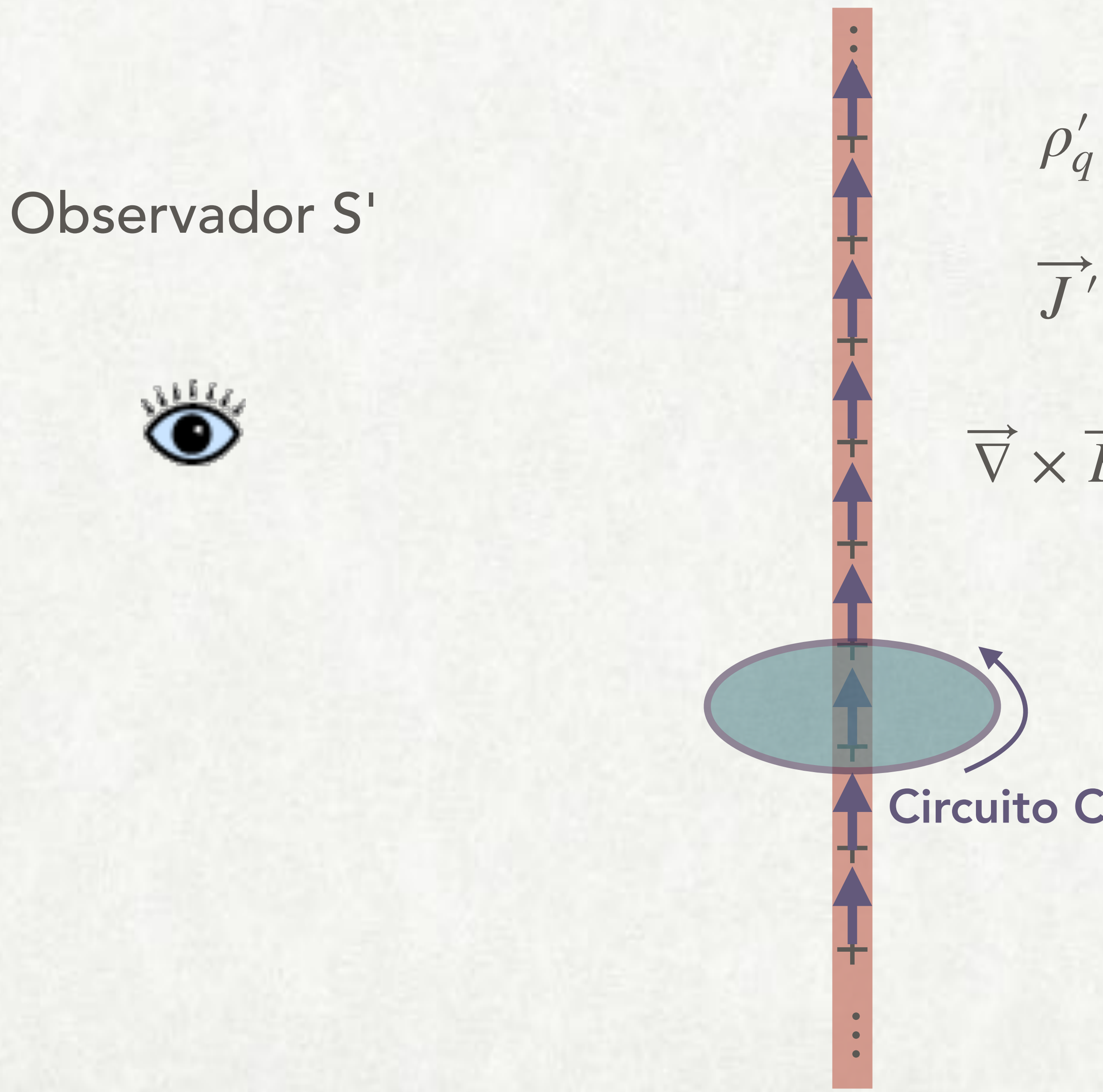
$$\vec{J}' = \lambda' v\, \delta(x)\delta(y)\,\hat{z} \qquad I' = \lambda' v$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}' = \vec{J}' \quad \Rightarrow \quad \int_C d\vec{l} \cdot \vec{B}' = I_{\vec{S}(C)} = I'$$

* Note que as direções x, y , ou ρ, φ , não são afetadas pela transformação

ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE

- No referencial S', o fio infinito não só está carregado, como leva uma corrente:



$$\rho'_q = \lambda'\delta(x)\delta(y) \qquad \lambda' = \frac{dq}{dz'}$$

$$\vec{J}' = \lambda' v\, \delta(x)\delta(y)\, \hat{z} \qquad I' = \lambda' v$$

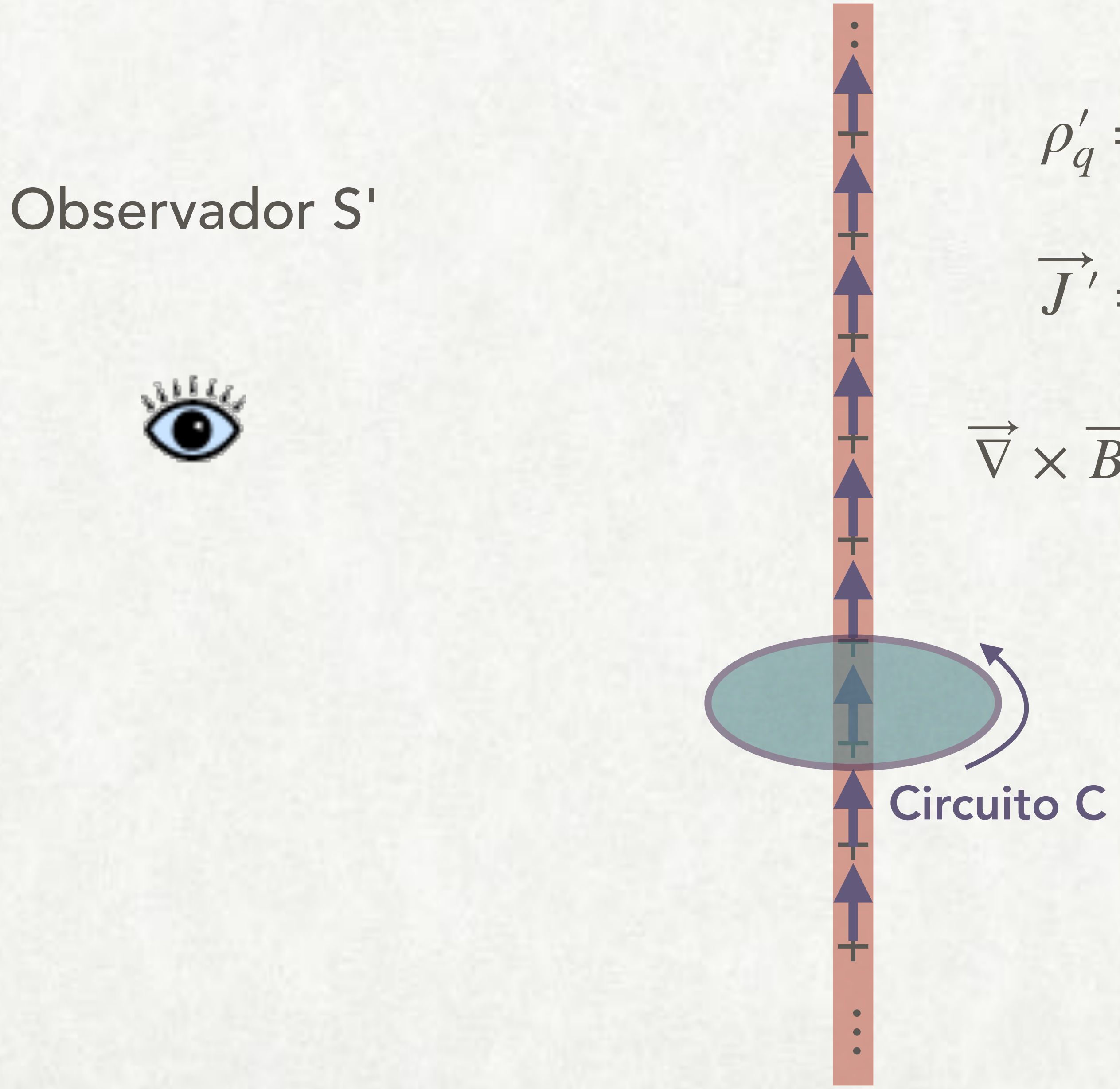
$$\vec{\nabla} \times \vec{B}' = \vec{J}' \quad \Rightarrow \quad \int_C d\vec{l} \cdot \vec{B}' = I_{\vec{S}(C)} = I'$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{B}' = \frac{I'}{2\pi\rho}\,\hat{\varphi}}$$

* Note que as direções x, y , ou ρ, φ , não são afetadas pela transformação

ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE

- No referencial S', o fio infinito não só está carregado, como leva uma corrente:



$$\rho'_q = \lambda'\delta(x)\delta(y) \qquad \lambda' = \frac{dq}{dz'}$$

$$\vec{J}' = \lambda' v\,\delta(x)\delta(y)\,\hat{z} \qquad I' = \lambda' v$$

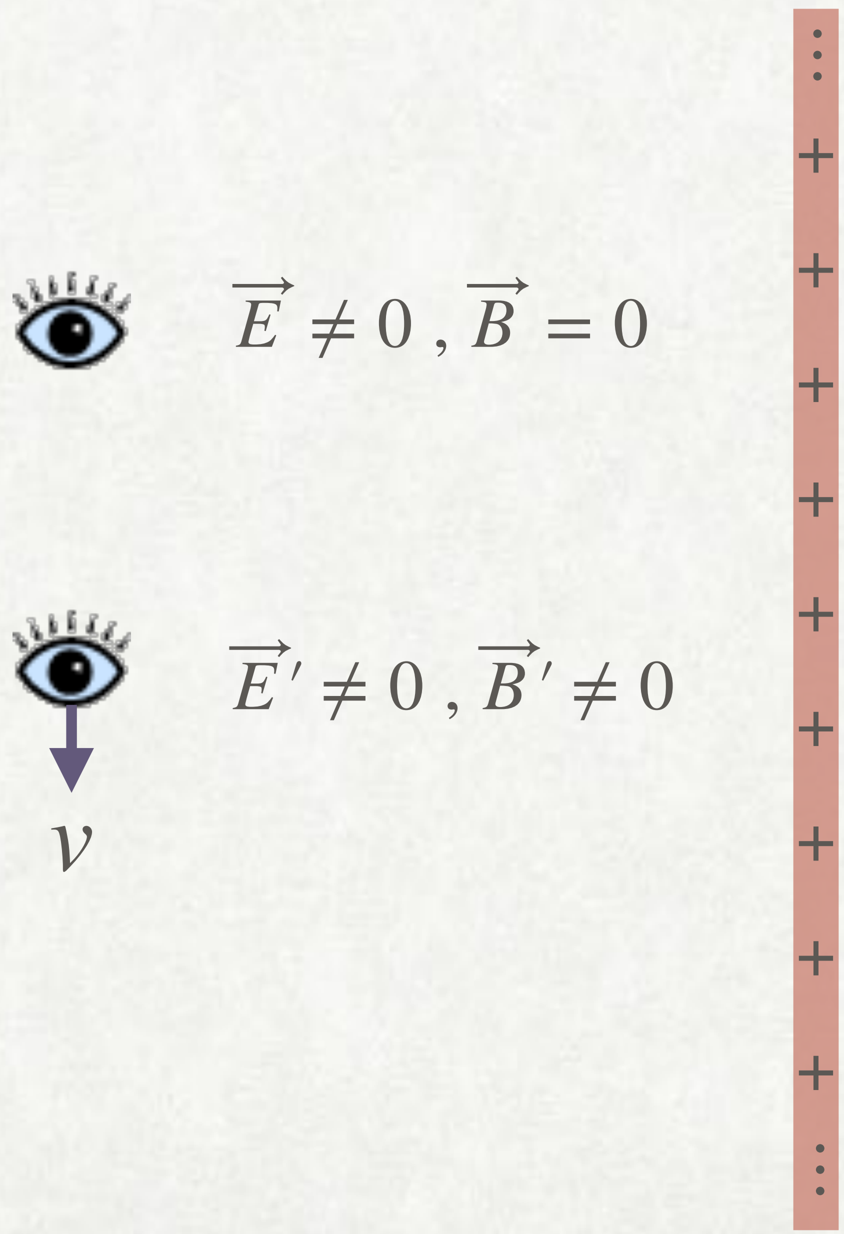
$$\vec{\nabla} \times \vec{B}' = \vec{J}' \quad \Rightarrow \quad \int_C d\vec{l} \cdot \vec{B}' = I_{\vec{S}(C)} = I'$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{B}' = \frac{I'}{2\pi\rho}\,\hat{\varphi}}$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{E}' = \frac{\lambda'}{2\pi\rho}\,\hat{\rho}}$$

* Note que as direções x, y , ou ρ, φ , não são afetadas pela transformação

ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE

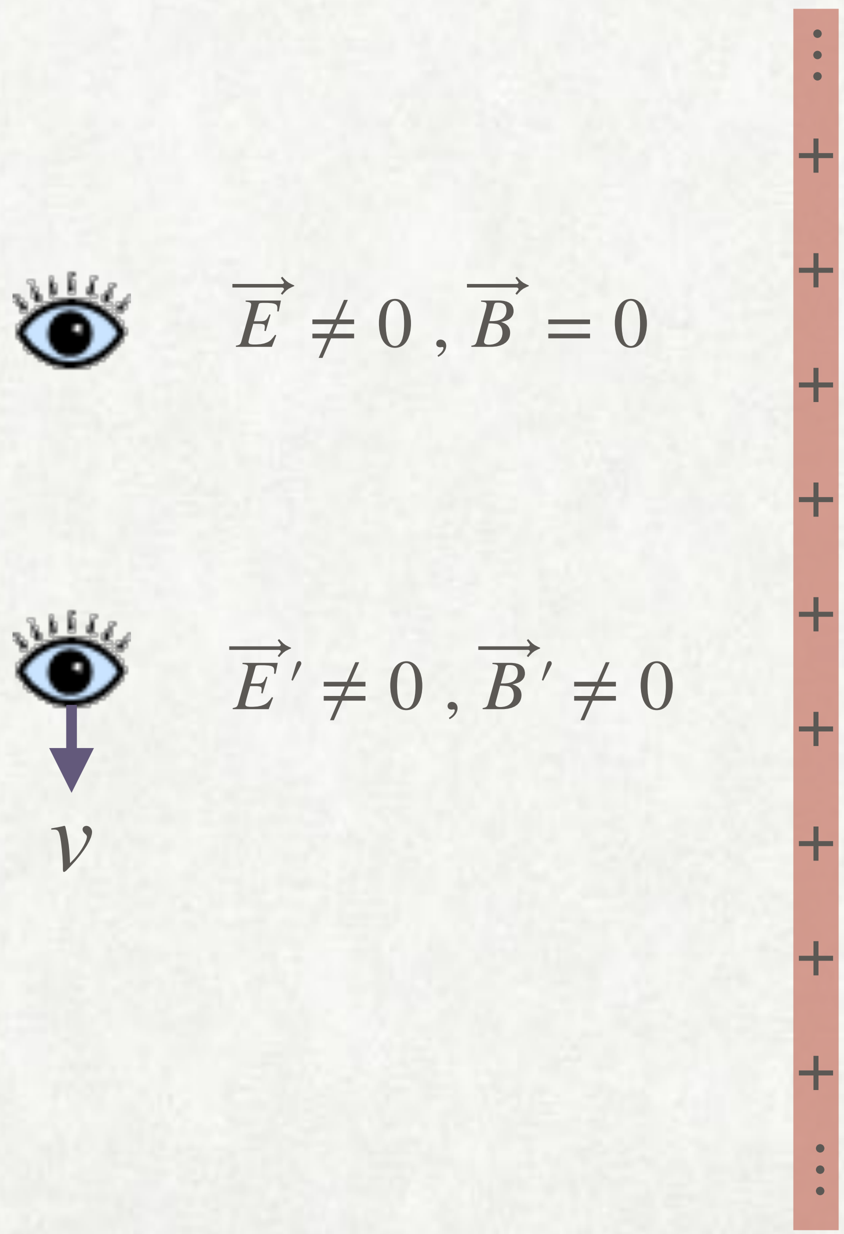


Mas se esses campos físicos são vetores, como explicar essa transformação, que gera um campo magnético do "nada"?

Suponha que o observador S′ não sabe o que está causando os campos $\vec{E}'$ e $\vec{B}'$: ele ainda assim deveria poder calcular esses campos simplesmente sabendo que no referencial S observam-se campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$!

ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE

- Mas de fato, qual a diferença entre os dois referenciais?



Mas se esses campos físicos são vetores, como explicar essa transformação, que gera um campo magnético do "nada"?
Suponha que o observador S′ não sabe o que está causando os campos $\vec{E}'$ e $\vec{B}'$: ele ainda assim deveria poder calcular esses campos simplesmente sabendo que no referencial S observam-se campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$!