INTRODUÇÃO À
RELATIVIDADE

AULA 5/6/7 - 16/03/2020

Regras de etiqueta para aulas online:

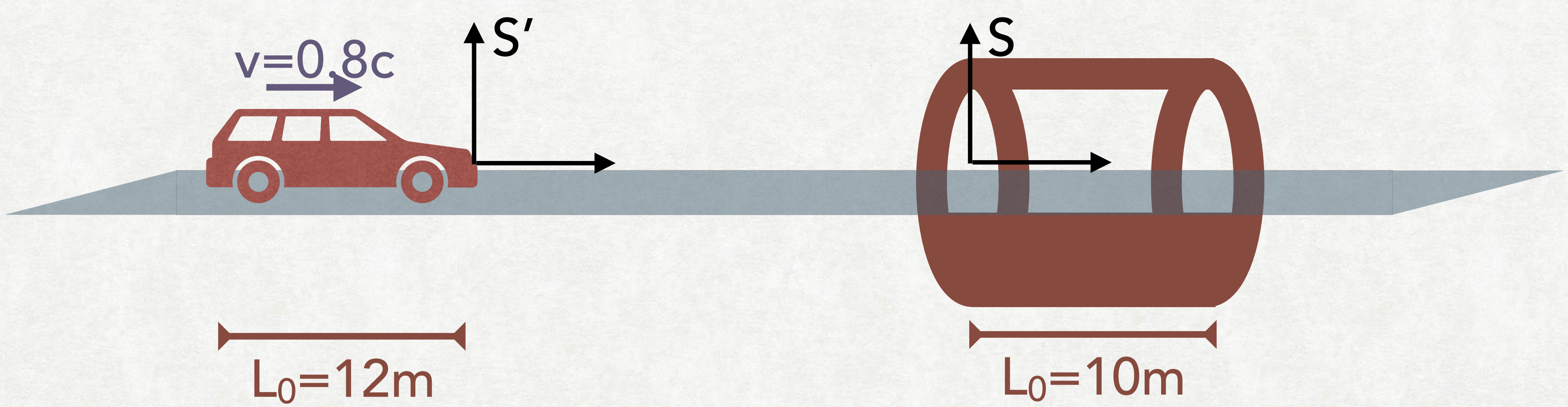
- Deixe seu microfone no **mudo**
- Levante a mão para fazer uma pergunta (se eu estiver distraído, ligue rapidamente o seu microfone e chame a minha atenção)
- Caso a minha conexão falhe , **todos** devem sair da aula e retornar somente após **10 minutos**
- Se você não conseguir se conectar a uma aula por qualquer motivo, não se preocupe: as aulas ficarão gravadas , e os slides serão disponibilizados no site da disciplina
- Se você tiver dificuldade para se conectar durante essas semanas e meses mais difíceis, entre em contato comigo que vamos tentar **encontrar uma solução!**

AULA 5/6/7 - 16/03/2020

- Primeira aula totalmente online!
- Exercícios e exemplos
- Dinâmica relativística

EXEMPLO 1
CONTRAÇÃO DO ESPAÇO

- Um carro tem comprimento próprio de 12m, e viaja a uma velocidade de 4/5 da velocidade da luz. A uma certa altura o carro entra num pequeno túnel, cujo comprimento próprio é de 10m. Para responder as perguntas seguintes, vamos chamar o referencial de um observador na entrada do túnel de S, tal que a entrada do túnel está na posição x=0 e o final do túnel em x=10m. Vamos chamar o referencial do motorista do carro de S′, e colocar o ponto x′=0 na parte dianteira do carro, e assim a traseira do carro fica no ponto x′= - 12m .



EXEMPLO 1
CONTRAÇÃO DO ESPAÇO

- Evento 1: o carro começa a entrar no túnel

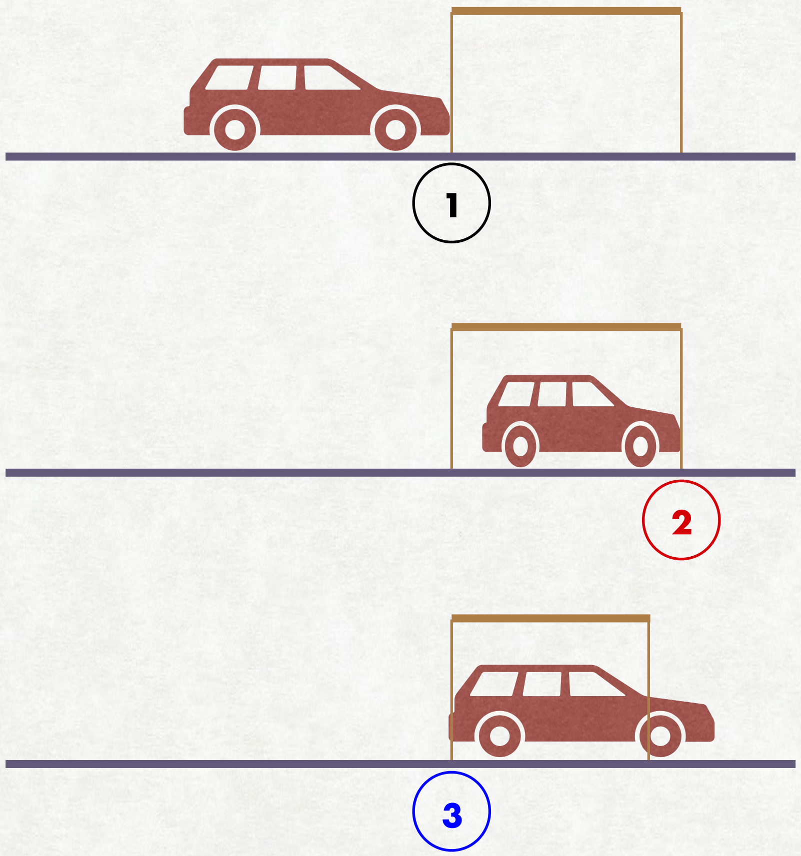
  Ref. S e S′: $x_1 = x_1' = 0$, $ct_1 = ct_1' = 0$

- Evento 2: o carro começa a sair do túnel

  Ref. S: x_2=10m, ct_2 = 10 m/(v/c) = 12.5 m

- Evento 3: a *traseira* do carro entra no túnel

  Ref. S′: x_3'=-12m , ct_3'= 12m/(v/c) = 15 m



EXEMPLO 1
CONTRAÇÃO DO ESPAÇO

- **Evento 1**: o carro começa a entrar no túnel

  Ref. S e S': $x_1 = x_1' = 0$, $ct_1 = ct_1' = 0$

- **Evento 2**: o carro começa a sair do túnel

  Ref. S: $x_2 = 10\text{m}$, $ct_2 = 10\ \text{m}/(v/c) = 12.5\ \text{m}$

- **Evento 3**: a *traseira* do carro entra no túnel

  Ref. S': $x_3' = -12\text{m}$, $ct_3' = 12\text{m}/(v/c) = 15\ \text{m}$

EXEMPLO 1
CONTRAÇÃO DO ESPAÇO

- **Evento 1**: o carro começa a entrar no túnel

  Ref. S e S′: $x_1 = x_1' = 0$, $ct_1 = ct_1' = 0$

- **Evento 2**: o carro começa a sair do túnel

  Ref. S: $x_2 = 10$m, ct_2 = 10 m/(v/c) = 12.5 m

- **Evento 3**: a *traseira* do carro entra no túnel

  Ref. S′: $x_3' = -12$m , ct_3'= 12m/(v/c) = 15 m

Note que $\beta = \frac{4}{5}$, $\gamma = \frac{5}{3}$

- Evento 2 no Ref. S′:

  $$x_2' = \gamma \times (10m - 4/5 \times 12m) = 0\ (!!!)\,,$$
  $$ct_2' = \gamma \times (12.5m - 4/5 \times 10m) = 7.5\,m$$

- Evento 3 no Ref S:

  $$x_3 = \gamma(-12m + 4/5 \times 15m) = 0\ (!!!)$$
  $$ct_3 = \gamma(15m + 4/5 \times (-12m)) = 9m$$

EXEMPLO 1
CONTRAÇÃO DO ESPAÇO

- **Evento 1**: o carro começa a entrar no túnel

  Ref. S e S′: $x_1 = x_1' = 0$, $ct_1 = ct_1' = 0$

- **Evento 2**: o carro começa a sair do túnel

  Ref. S: x_2=10m, ct_2 = 10 m/(v/c) = $\boxed{12.5\text{ m}}$

- **Evento 3**: a *traseira* do carro entra no túnel

  Ref. S′: x_3'=-12m , ct_3'= 12m/(v/c) = $\boxed{15\text{ m}}$

Note que $\beta = \frac{4}{5}$, $\gamma = \frac{5}{3}$

- Evento 2 no Ref. S′:

$$x_2' = \gamma \times (10m - 4/5 \times 12m) = 0\ (!!!)\,,$$
$$ct_2' = \gamma \times (12.5m - 4/5 \times 10m) = \boxed{7.5\,m}$$

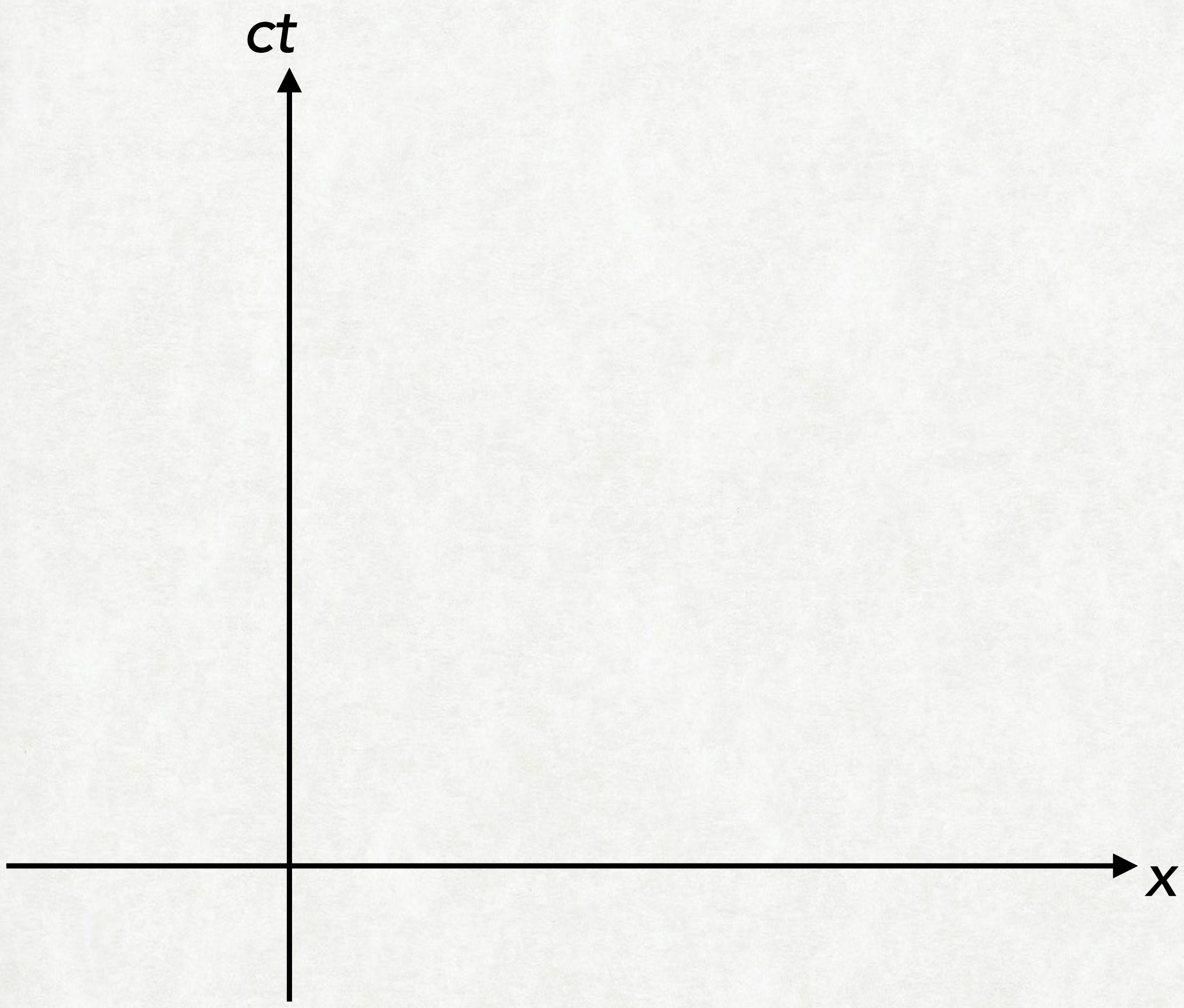
- Evento 3 no Ref S:

$$x_3 = \gamma(-12m + 4/5 \times 15m) = 0\ (!!!)$$
$$ct_3 = \gamma(15m + 4/5 \times (-12m)) = \boxed{9m}$$

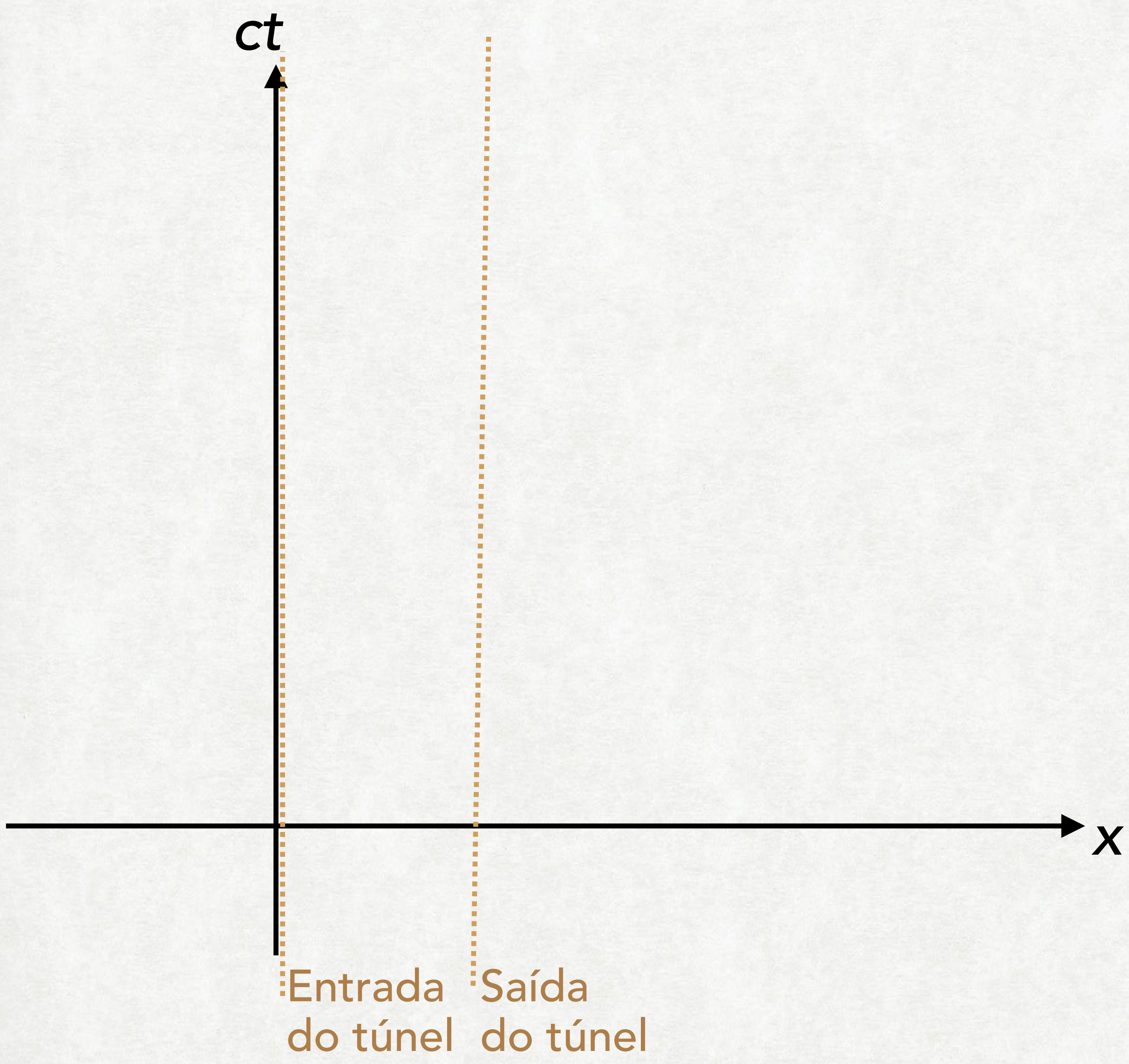
No Ref. S, o evento **3** (ct_3=9m) ocorre antes do evento **2** (ct_2=12.5m)

No Ref. S′, o evento **2** (ct_2'=7.5m) ocorre antes do evento **3** (ct_3'=15m)

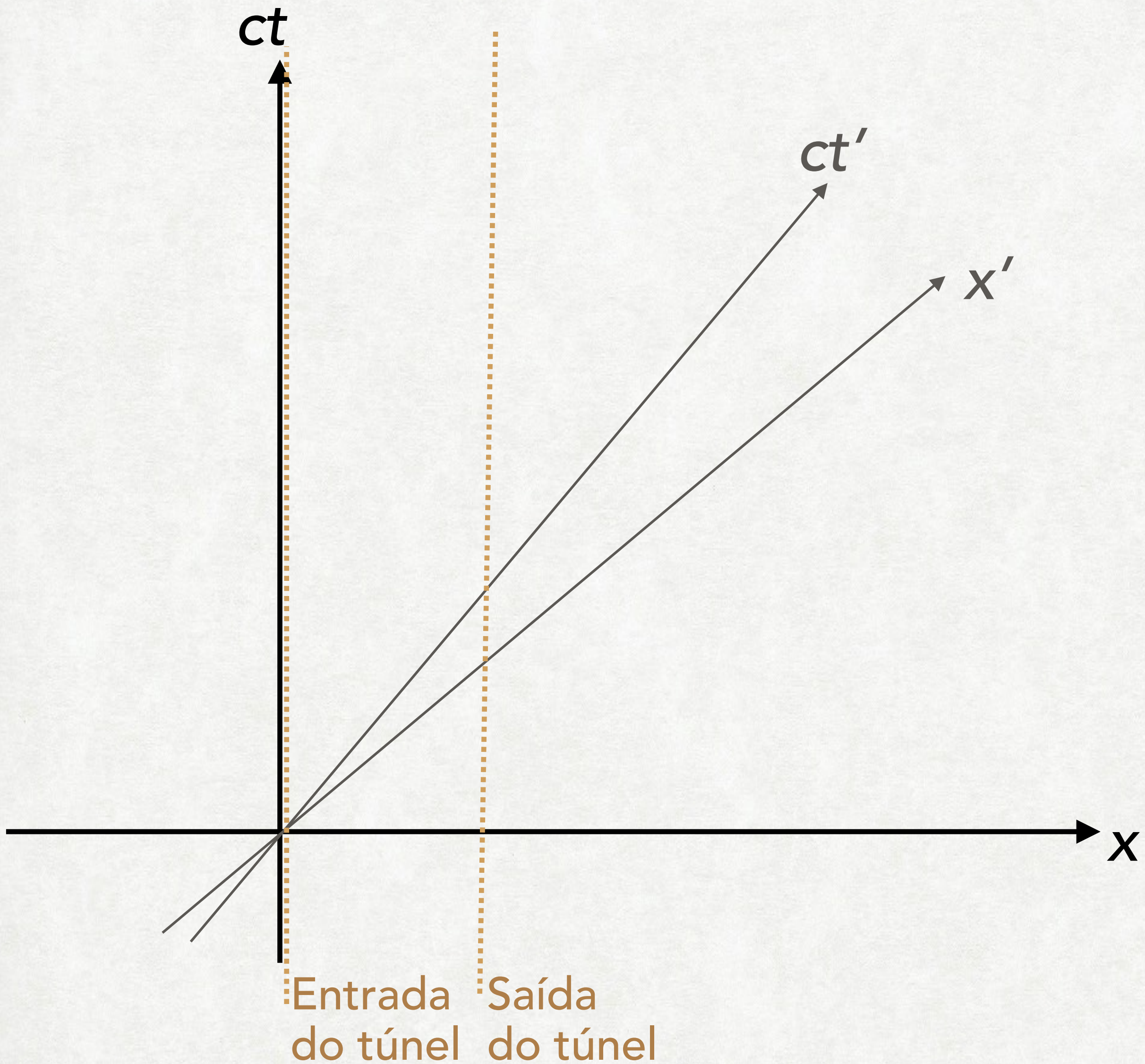
EXEMPLO 1
CONTRAÇÃO DO ESPAÇO



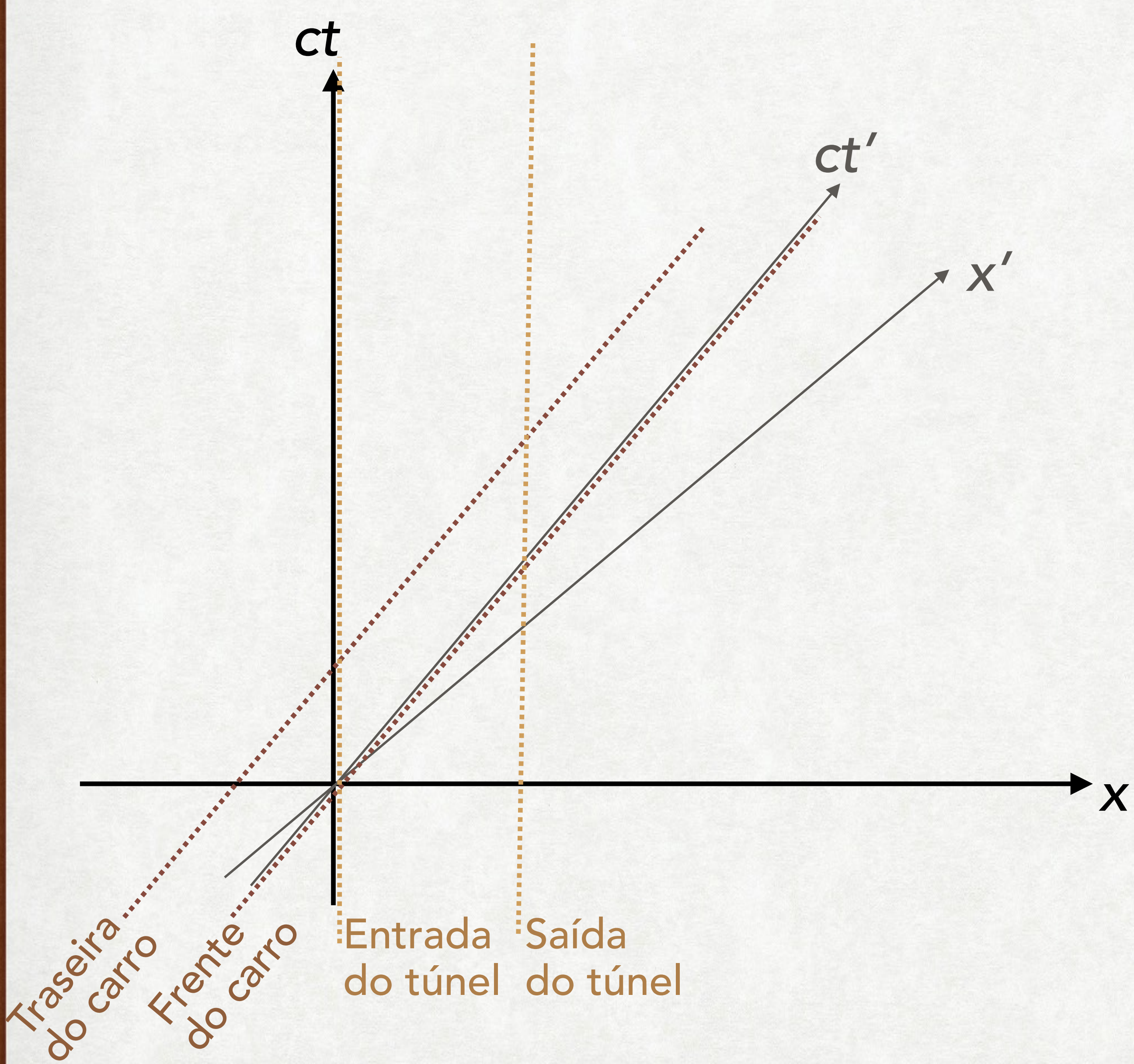
EXEMPLO 1
CONTRAÇÃO DO ESPAÇO



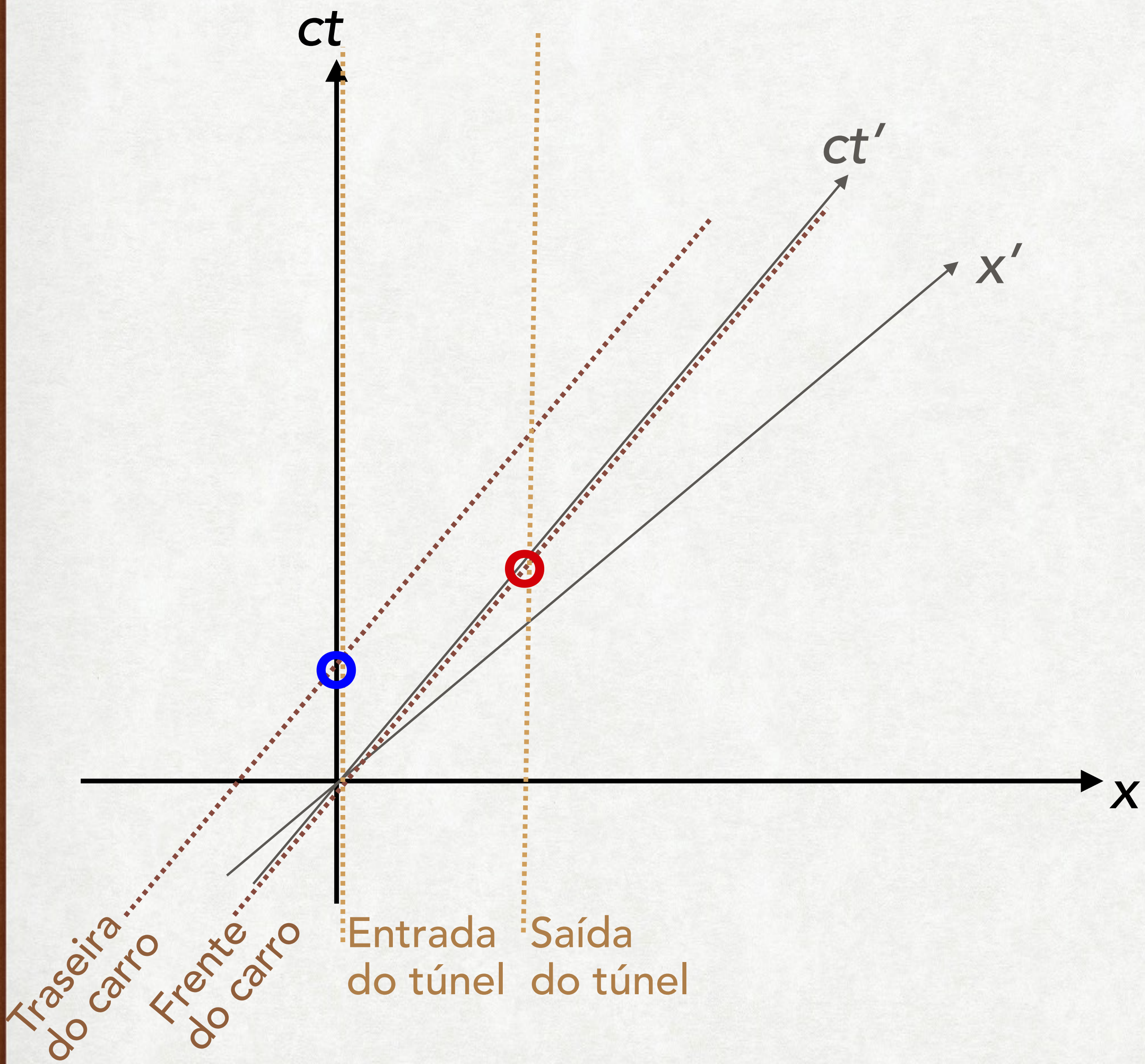
EXEMPLO 1
CONTRAÇÃO DO ESPAÇO



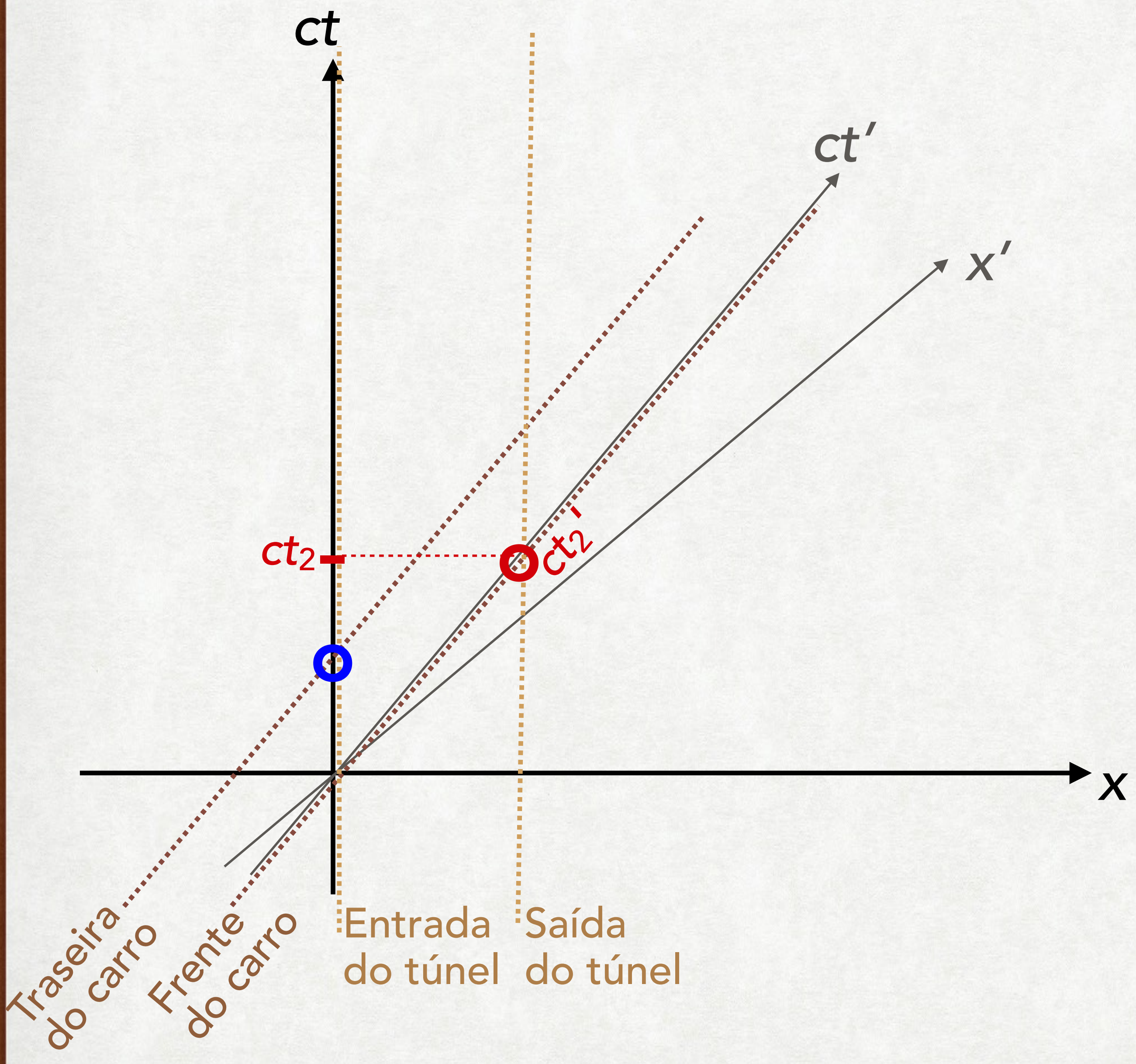
EXEMPLO 1
CONTRAÇÃO DO ESPAÇO



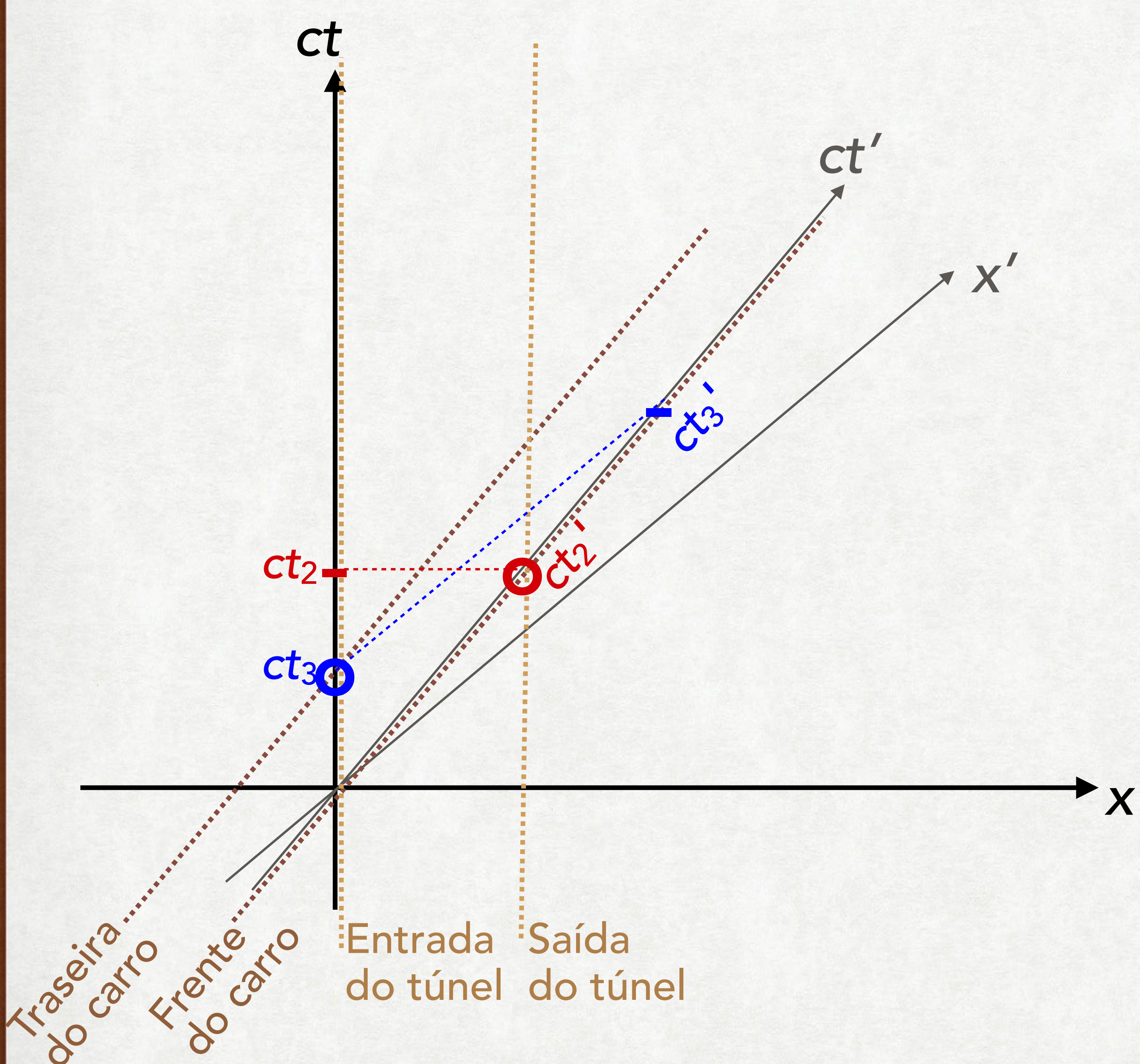
EXEMPLO 1
CONTRAÇÃO DO ESPAÇO



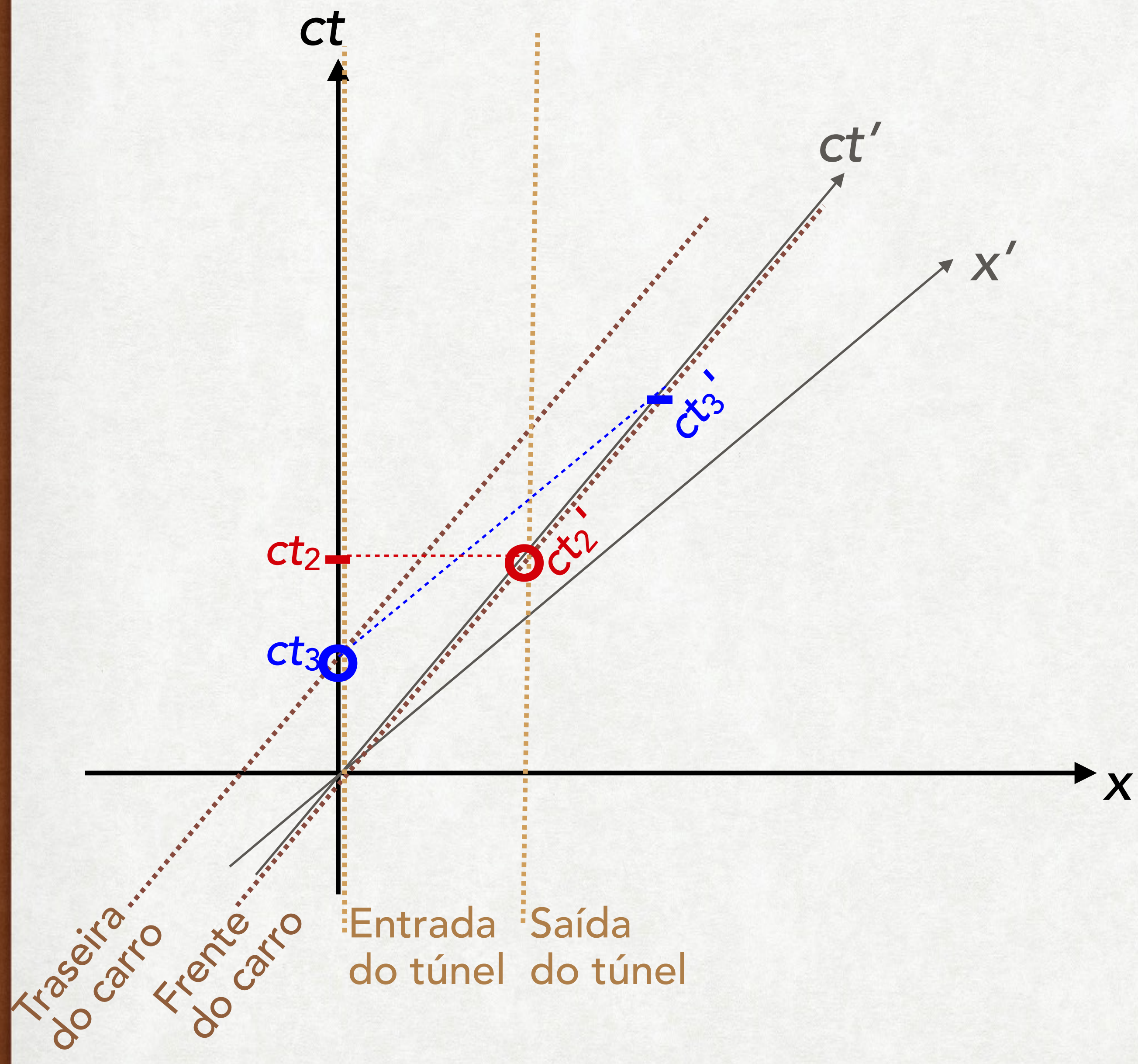
EXEMPLO 1
CONTRAÇÃO DO ESPAÇO

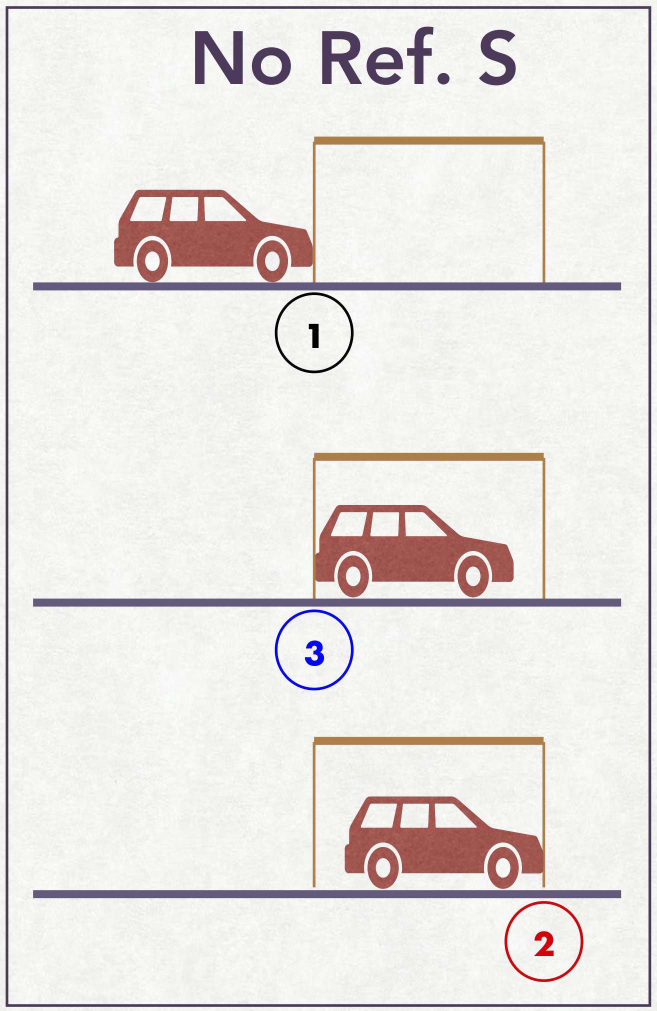


EXEMPLO 1
CONTRAÇÃO DO ESPAÇO

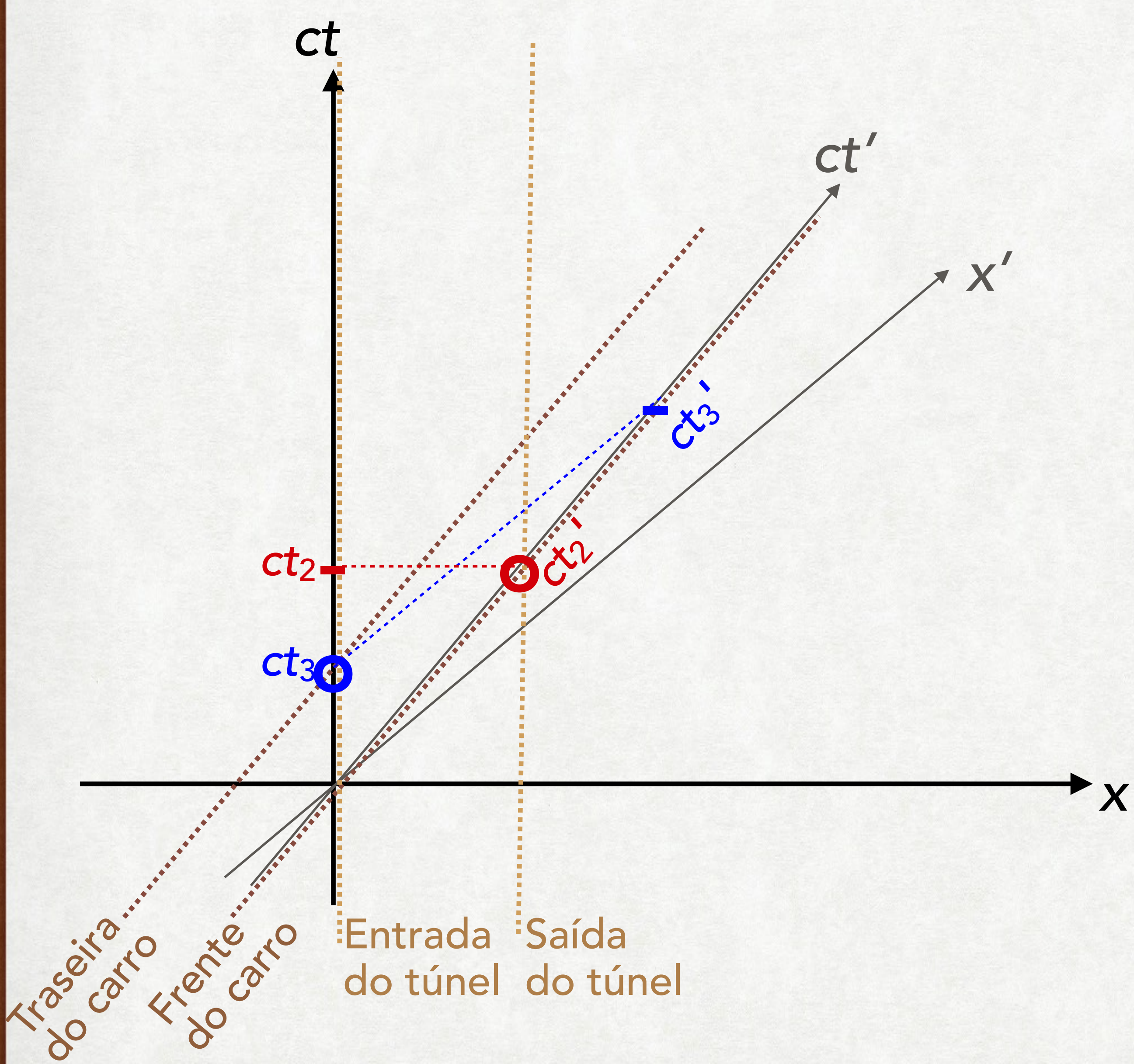


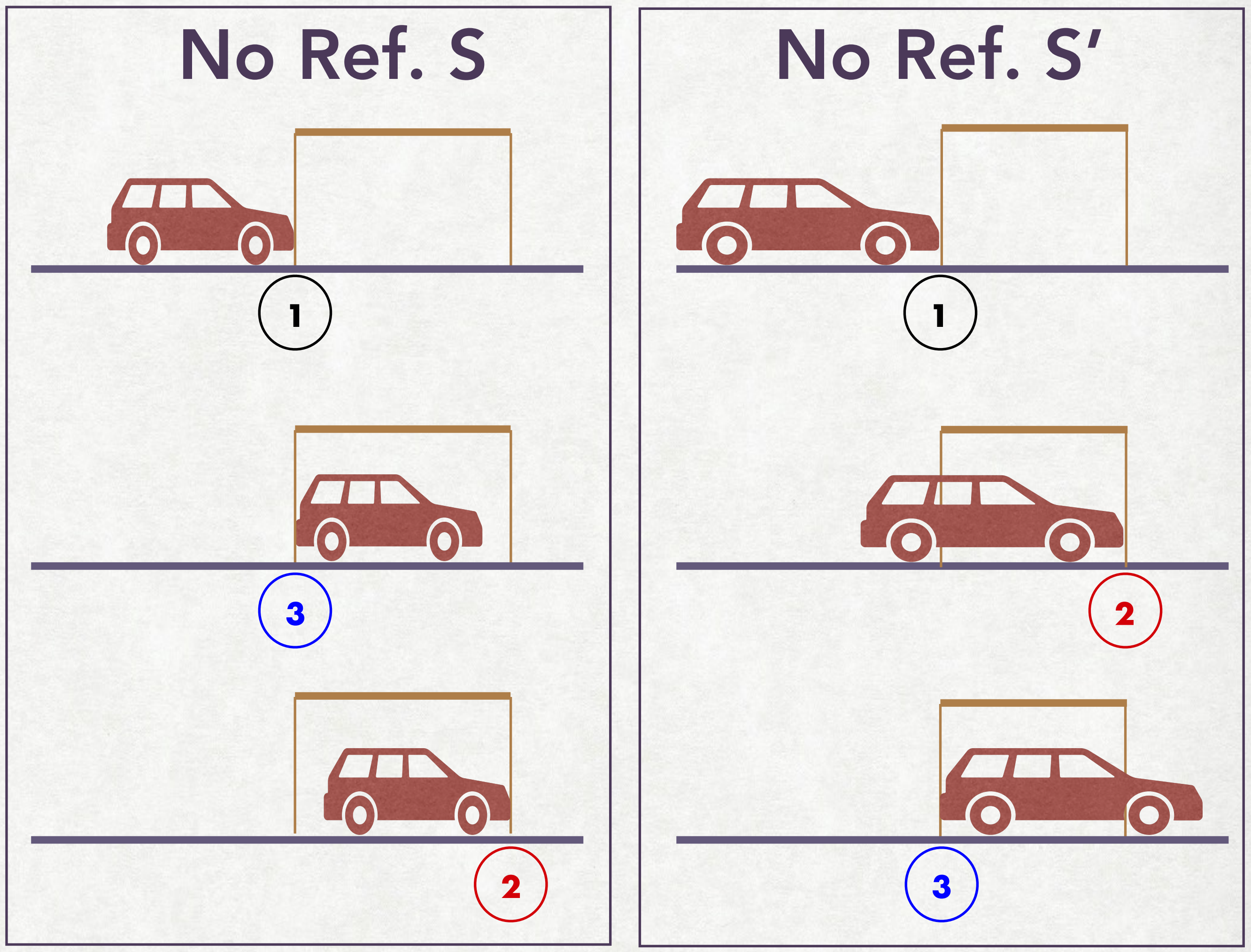
EXEMPLO 1
CONTRAÇÃO DO ESPAÇO





EXEMPLO 1
CONTRAÇÃO DO ESPAÇO





EXEMPLO 2
4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

EXEMPLO 2
4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- 4-vetores no espaço de Minkowski são objetos que se transformam segundo a mesma transformação de Lorentz que se aplica para o primeiro “vetor" que encontramos — aqueles que correspondem a intervalos entre eventos:

$$dr^{\mu} \quad \longrightarrow \quad dr^{'\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu} dr^{\nu}$$

EXEMPLO 2
4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- 4-vetores no espaço de Minkowski são objetos que se transformam segundo a mesma transformação de Lorentz que se aplica para o primeiro “vetor" que encontramos — aqueles que correspondem a intervalos entre eventos:

$$dr^{\mu} \quad \longrightarrow \quad dr^{'\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu} dr^{\nu}$$

- Um 4-vetor de Minkowski (V) é um objeto que se comporta do mesmo modo:

$$V^{\mu} \quad \longrightarrow \quad V^{'\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu} V^{\nu}$$

EXEMPLO 2
4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- 4-vetores no espaço de Minkowski são objetos que se transformam segundo a mesma transformação de Lorentz que se aplica para o primeiro “vetor" que encontramos — aqueles que correspondem a intervalos entre eventos:

$$dr^{\mu} \quad \longrightarrow \quad dr^{'\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu} dr^{\nu}$$

- Um 4-vetor de Minkowski (V) é um objeto que se comporta do mesmo modo:

$$V^{\mu} \quad \longrightarrow \quad V^{'\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu} V^{\nu}$$

- 4-vetores de Minkowski têm um módulo que é definido por meio de um produto escalar. Esse produto escalar é dado em termos de uma métrica (a métrica de Minkowski):

$$||V||^2 = \eta_{\mu\nu} V^{\mu} V^{\nu}$$

$$\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EXEMPLO 2

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

EXEMPLO 2
4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- Podemos escrever a norma de 4-vetores no espaço de Minkowski de um modo mais interessante se notarmos que:

$$V^\mu = \{V^0, V^1, V^2, V^3\}$$

$$V_\mu = \eta_{\mu\nu} V^\nu = \{-V^0, V^1, V^2, V^3\}$$

EXEMPLO 2
4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- Podemos escrever a norma de 4-vetores no espaço de Minkowski de um modo mais interessante se notarmos que:

$$V^\mu = \{V^0, V^1, V^2, V^3\}$$

$$V_\mu = \eta_{\mu\nu} V^\nu = \{-V^0, V^1, V^2, V^3\}$$

- Note que a operação é facilmente invertida:

$$V^\mu = \eta^{\mu\nu} V_\nu \quad , \quad \eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = diag(-1,1,1,1)$$

EXEMPLO 2
4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- Podemos escrever a norma de 4-vetores no espaço de Minkowski de um modo mais interessante se notarmos que:

$$V^\mu = \{V^0, V^1, V^2, V^3\}$$

$$V_\mu = \eta_{\mu\nu} V^\nu = \{-V^0, V^1, V^2, V^3\}$$

- Note que a operação é facilmente invertida:

$$V^\mu = \eta^{\mu\nu} V_\nu \quad , \quad \eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = diag(-1,1,1,1)$$

- Desse modo, o módulo desse 4-vetor fica:

$$||V||^2 = V^\mu \eta_{\mu\nu} V^\nu = V^\mu V_\mu = -(V^0)^2 + \overrightarrow{V}^2$$

EXEMPLO 2

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

EXEMPLO 2
4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- É interessante ver como esse "novo" objeto se comporta sob transformações de Lorentz:

$$V'_\mu = \eta_{\mu\nu} V'^{\nu} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\alpha V^\alpha = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\alpha \eta^{\alpha\beta} V_\beta$$

EXEMPLO 2
4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- É interessante ver como esse “novo" objeto se comporta sob transformações de Lorentz:

$$V'_\mu = \eta_{\mu\nu} V^{'\nu} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\alpha V^\alpha = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\alpha \eta^{\alpha\beta} V_\beta$$

- Agora, vamos nos lembrar que as transformações de Lorentz obedecem o princípio da… invariância de Lorentz!

$$\Lambda^\mu{}_\sigma \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\alpha = \eta_{\sigma\alpha}$$

EXEMPLO 2
4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- É interessante ver como esse “novo" objeto se comporta sob transformações de Lorentz:

$$V'_\mu = \eta_{\mu\nu} V'^{\nu} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}{}_{\alpha} V^{\alpha} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}{}_{\alpha} \eta^{\alpha\beta} V_\beta$$

- Agora, vamos nos lembrar que as transformações de Lorentz obedecem o princípio da… invariância de Lorentz!

$$\Lambda^{\mu}{}_{\sigma} \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}{}_{\alpha} = \eta_{\sigma\alpha}$$

- Podemos multiplicar a primeira equação acima por $\Lambda^{\mu}{}_{\sigma}$, levando a:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\sigma} V'_\mu = \Lambda^{\mu}{}_{\sigma} \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}{}_{\alpha} \eta^{\alpha\beta} V_\beta = \eta_{\sigma\alpha} \eta^{\alpha\beta} V_\beta = \delta^{\beta}_{\sigma} V_\beta = V_\sigma$$

EXEMPLO 2

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

EXEMPLO 2
4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- Ou seja, se por um lado temos que a transformação de Lorentz usual é

  $$V'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu} V^{\nu} ,$$

EXEMPLO 2
4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- Ou seja, se por um lado temos que a transformação de Lorentz usual é

$$V'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu} V^{\nu} \ ,$$

- por outro, vemos que a transformação desse mesmo 4-vetor usando a representação alternativa é:

$$\Lambda^{\mu}_{\ \nu} V'_{\mu} = V_{\nu} \quad \Longrightarrow \quad V'_{\mu} = (\Lambda^{\mu}_{\ \nu})^{-1} V_{\nu} = \Lambda_{\mu}^{\ \nu} V_{\nu}$$

EXEMPLO 2
4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- Ou seja, se por um lado temos que a transformação de Lorentz usual é

$$V'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu} V^{\nu} \ ,$$

- por outro, vemos que a transformação desse mesmo 4-vetor usando a representação alternativa é:

$$\Lambda^{\mu}_{\ \nu} V'_{\mu} = V_{\nu} \quad \Longrightarrow \quad V'_{\mu} = (\Lambda^{\mu}_{\ \nu})^{-1} V_{\nu} = \Lambda_{\mu}^{\ \nu} V_{\nu}$$

- onde (veja a página anterior) essa inversa da matriz Λ pode ser escrita facilmente como:

$$\Lambda_{\mu}^{\ \beta} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\ \alpha} \eta^{\alpha\beta}$$

EXEMPLO 2
4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- Vejamos isso na prática, no caso de um boost de Lorentz na direção x:

$$r^\mu = \{ct, x, y, z\} \quad \Rightarrow \quad r'^\mu = \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

- Esse mesmo vetor pode ser representado do modo alternativo:

$$r_\mu = \{-ct, x, y, z\} \quad \Rightarrow \quad r'_\mu = (-ct' \quad x') = (-ct \quad x) \begin{pmatrix} \gamma & +\gamma\beta \\ +\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}$$

- Vamos verificar que isso está correto:

$$r'_0 = -\,ct' = (-ct) \times \gamma + x \times \gamma\beta = -\,\gamma(ct - \beta\, x)$$

$$r'_1 = x' = (-ct) \times \gamma\beta + x \times \gamma = \gamma(x - \beta\, ct)$$

EXEMPLO 2

4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

EXEMPLO 2
4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- Portanto, encontramos que

$$r'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu}\, r^{\nu} \quad ,$$

$$r'_{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\ \nu}\, r_{\nu} \quad \text{onde} \quad \Lambda_{\mu}^{\ \beta} = \eta_{\mu\nu}\, \Lambda^{\nu}_{\ \alpha}\, \eta^{\alpha\beta}$$

EXEMPLO 2
4-VETORES NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

- Portanto, encontramos que

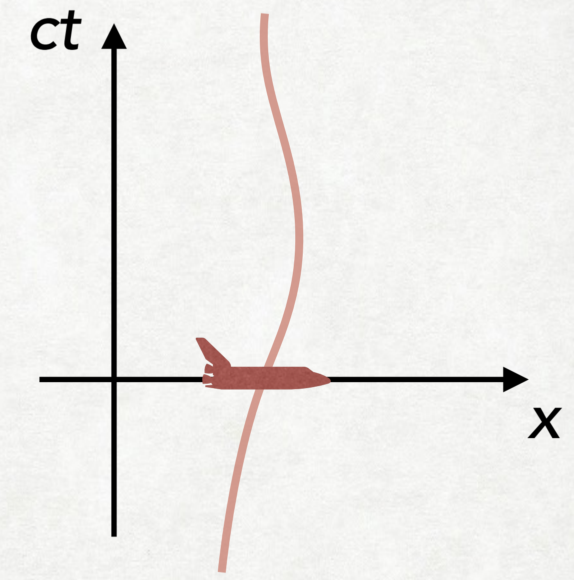
$$r'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu}\, r^{\nu} \quad ,$$

$$r'_{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\ \nu}\, r_{\nu} \quad \text{onde} \quad \Lambda_{\mu}^{\ \beta} = \eta_{\mu\nu}\, \Lambda^{\nu}_{\ \alpha}\, \eta^{\alpha\beta}$$

- Onde as matrizes de transformação são, nos dois casos:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Lambda_{\mu}{}^{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & +\gamma\beta & 0 & 0 \\ +\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4-VELOCIDADE E 4-MOMENTO

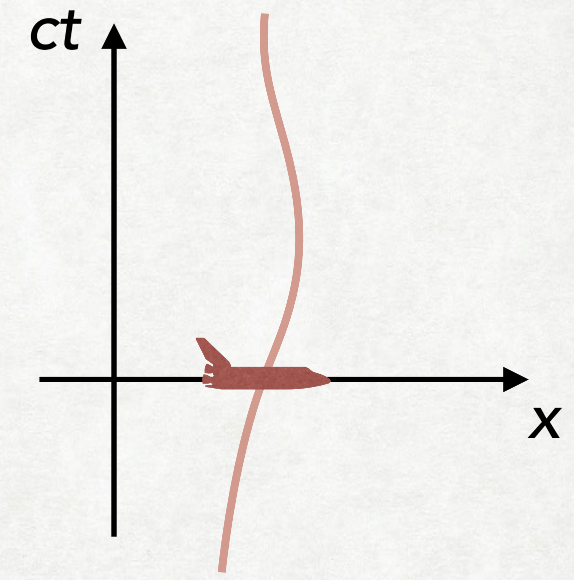


4-VELOCIDADE E 4-MOMENTO

- A 4-velocidade de um corpo em movimento é dada por:

$$U^\mu = \frac{d\,x^\mu}{d\tau} = \gamma\{c, V_x, V_y, V_z\} \quad ,$$

onde τ é o tempo próprio, $d\tau = dt/\gamma(V)$

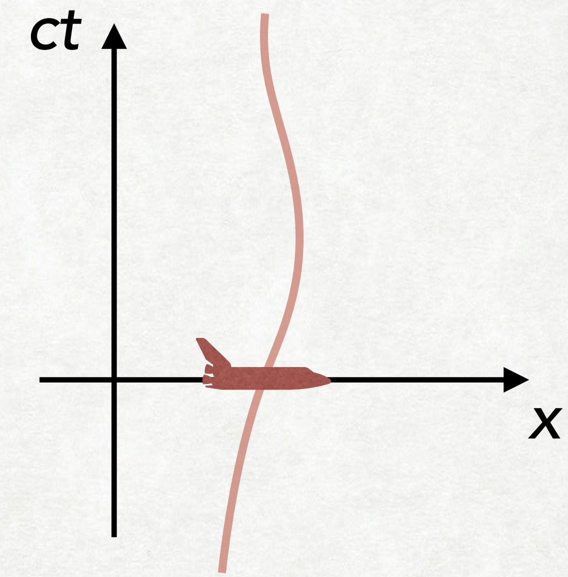


4-VELOCIDADE E 4-MOMENTO

- A 4-velocidade de um corpo em movimento é dada por:

$$U^\mu = \frac{d\,x^\mu}{d\tau} = \gamma\{c, V_x, V_y, V_z\} \quad ,$$

onde τ é o tempo próprio, $d\tau = dt/\gamma(V)$



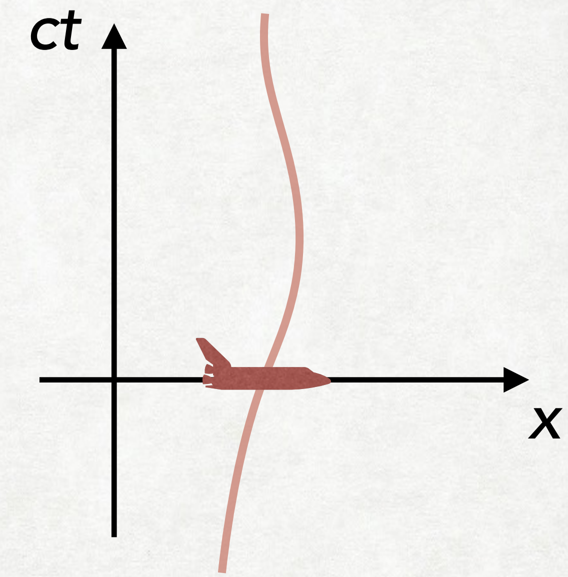
- Um corpo massivo possui igualmente um 4-momento:

4-VELOCIDADE E 4-MOMENTO

- A 4-velocidade de um corpo em movimento é dada por:

$$U^\mu = \frac{d\,x^\mu}{d\tau} = \gamma\{c, V_x, V_y, V_z\} \quad ,$$

onde τ é o tempo próprio, $d\tau = dt/\gamma(V)$



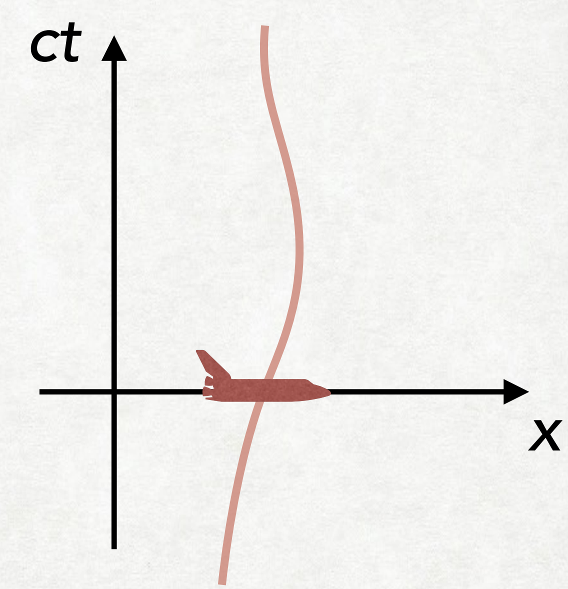
- Um corpo massivo possui igualmente um 4-momento:

$$P^\mu = m\,U^\mu = m\,\gamma\,\{c, \overrightarrow{V}\}$$

4-VELOCIDADE E 4-MOMENTO

- A 4-velocidade de um corpo em movimento é dada por:

$$U^\mu = \frac{d\,x^\mu}{d\tau} = \gamma\{c, V_x, V_y, V_z\} \quad ,$$



onde τ é o tempo próprio, $d\tau = dt/\gamma(V)$

- Um corpo massivo possui igualmente um 4-momento:

$$P^\mu = m\,U^\mu = m\,\gamma\,\{c, \vec{V}\}$$

- Essa componente "temporal" do momento é, naturalmente, a energia (a menos de um fator de *c*). De fato:

$$P^0 = m\,\gamma\,c \;= m\,c\left(1 + \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2} + \ldots\right) \qquad \gamma(V) = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

4-VELOCIDADE E 4-MOMENTO

4-VELOCIDADE E 4-MOMENTO

- Reconhecemos essa componente como energia:

$$P^0 \simeq \frac{1}{c}\left(m\,c^2 + \frac{1}{2}m\,V^2 + \dots\right)$$

4-VELOCIDADE E 4-MOMENTO

- Reconhecemos essa componente como energia:

$$P^0 \simeq \frac{1}{c}\left(\underbrace{m\,c^2}_{\text{ENERGIA DE REPOUSO}} + \underbrace{\frac{1}{2}m\,V^2}_{\text{ENERGIA CINÉTICA (Ñ-RELATIV.)}} + \ldots\right)$$

4-VELOCIDADE E 4-MOMENTO

- Reconhecemos essa componente como energia:

$$P^0 \simeq \frac{1}{c}\left(\underbrace{m\,c^2}_{\text{ENERGIA DE REPOUSO}} + \underbrace{\frac{1}{2} m\,V^2}_{\text{ENERGIA CINÉTICA (Ñ-RELATIV.)}} + \ldots\right)$$

- Portanto, a energia da partícula é $E = m\,\gamma(V)\,c^2$, e assim

$$P^\mu = \left\{\frac{E}{c}, \overrightarrow{p}\right\}$$

4-VELOCIDADE E 4-MOMENTO

4-VELOCIDADE E 4-MOMENTO

- Mas e se uma partícula (e.g., fóton) não tem massa?

4-VELOCIDADE E 4-MOMENTO

- Mas e se uma partícula (e.g., fóton) não tem massa?

- Suponhamos que tomamos o limite simples $m \to 0$, e assim

  $P^\mu \stackrel{?}{=} 0 \times U^\mu \stackrel{?}{=} 0$

4-VELOCIDADE E 4-MOMENTO

- Mas e se uma partícula (e.g., fóton) não tem massa?
- Suponhamos que tomamos o limite simples $m \to 0$, e assim

  $P^\mu \stackrel{?}{=} 0 \times U^\mu \stackrel{?}{=} 0$

- Claramente isso não funciona: que partícula é essa, que não tem massa, nem energia, nem momento???

4-VELOCIDADE E 4-MOMENTO

- Mas e se uma partícula (e.g., fóton) não tem massa?

- Suponhamos que tomamos o limite simples $m \to 0$, e assim

$$P^\mu \stackrel{?}{=} 0 \times U^\mu \stackrel{?}{=} 0$$

- Claramente isso não funciona: que partícula é essa, que não tem massa, nem energia, nem momento???

- Podemos pensar em tomar $m \to 0$ e $V \to c$ de tal modo que $\gamma(V) \to \infty$. Porém, temos de tomar cuidado para que $m\gamma \nrightarrow 0$ nem que $m\gamma \nrightarrow \infty$. Mas isso soa muito arbitrário: que "massa" é essa?

4-VELOCIDADE E 4-MOMENTO

- Mas e se uma partícula (e.g., fóton) não tem massa?

- Suponhamos que tomamos o limite simples $m \to 0$, e assim

  $P^\mu \stackrel{?}{=} 0 \times U^\mu \stackrel{?}{=} 0$

- Claramente isso não funciona: que partícula é essa, que não tem massa, nem energia, nem momento???

- Podemos pensar em tomar $m \to 0$ e $V \to c$ de tal modo que $\gamma(V) \to \infty$. Porém, temos de tomar cuidado para que $m\gamma \nrightarrow 0$ nem que $m\gamma \nrightarrow \infty$. Mas isso soa muito arbitrário: que “massa" é essa?

- De fato, não precisamos pensar em nenhum desses limites: basta lembrarmos que $||U^\mu||^2 = - c^2$ para ***qualquer partícula*** (com ou sem massa), e portanto $||P^\mu||^2 = - m^2c^2$.

4-VELOCIDADE E 4-MOMENTO

- Mas e se uma partícula (e.g., fóton) não tem massa?

- Suponhamos que tomamos o limite simples $m \to 0$, e assim

  $P^\mu \stackrel{?}{=} 0 \times U^\mu \stackrel{?}{=} 0$

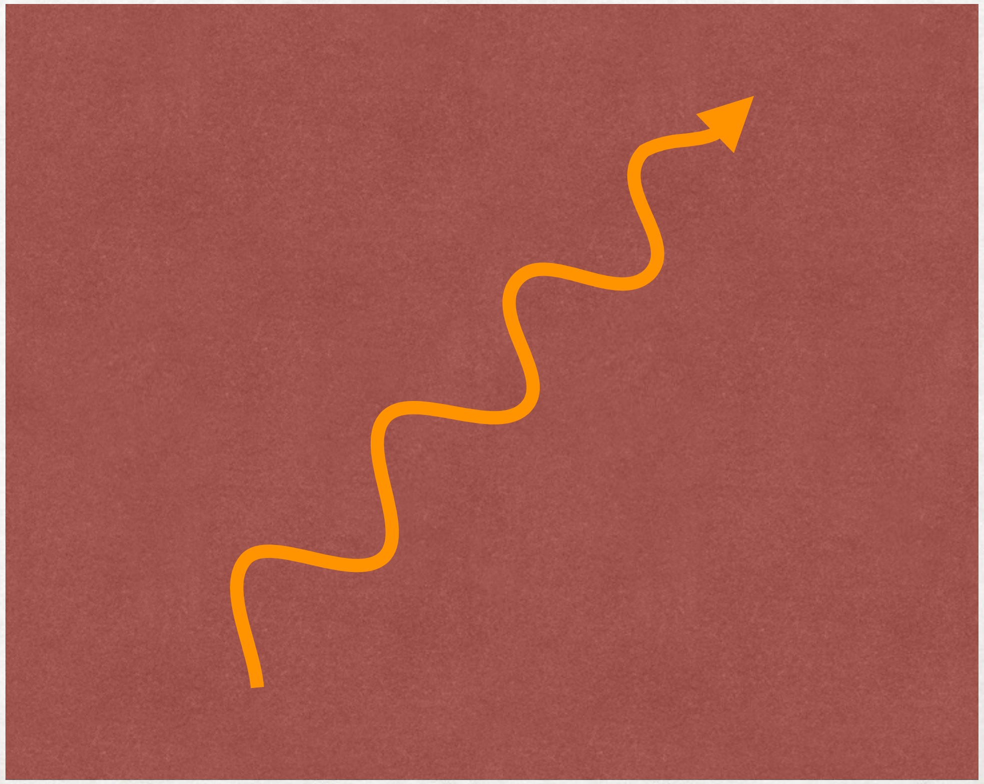
- Claramente isso não funciona: que partícula é essa, que não tem massa, nem energia, nem momento???

- Podemos pensar em tomar $m \to 0$ e $V \to c$ de tal modo que $\gamma(V) \to \infty$. Porém, temos de tomar cuidado para que $m\gamma \nrightarrow 0$ nem que $m\gamma \nrightarrow \infty$. Mas isso soa muito arbitrário: que "massa" é essa?

- De fato, não precisamos pensar em nenhum desses limites: basta lembrarmos que $||U^\mu||^2 = -c^2$ para ***qualquer partícula*** (com ou sem massa), e portanto $||P^\mu||^2 = -m^2c^2$.

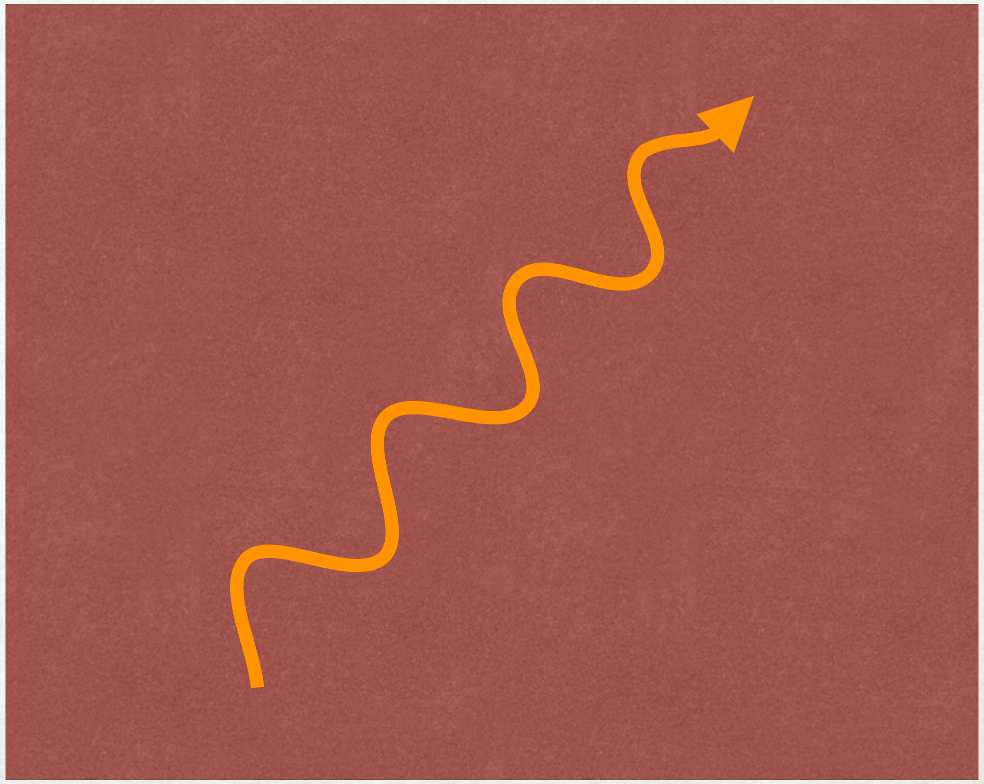
- Para raios de luz, claramente temos $m = 0$, portanto $||P^\mu_{\text{luz}}||^2 = 0$.

4-VELOCIDADE E 4-MOMENTO



4-VELOCIDADE E 4-MOMENTO

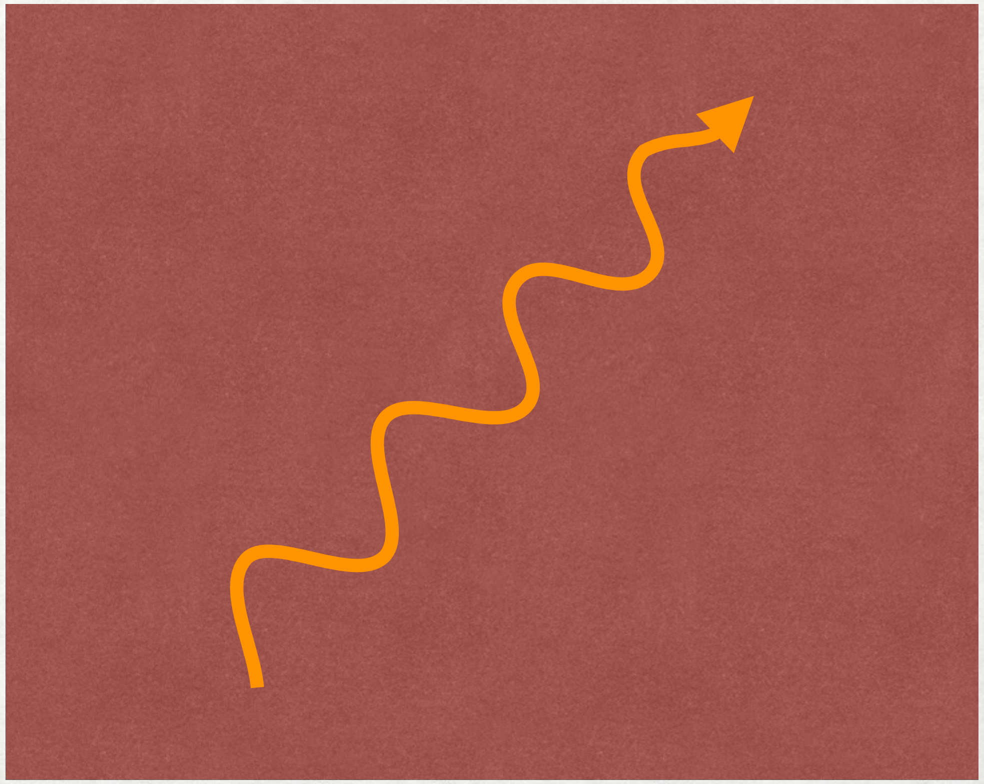
- Portanto, para raios de luz temos que



4-VELOCIDADE E 4-MOMENTO

- Portanto, para raios de luz temos que

$$0 = ||P^{\mu}_{\text{luz}}||^2 = -\frac{E^2_{\text{luz}}}{c^2} + \overrightarrow{p}^{\,2}_{\text{luz}}$$

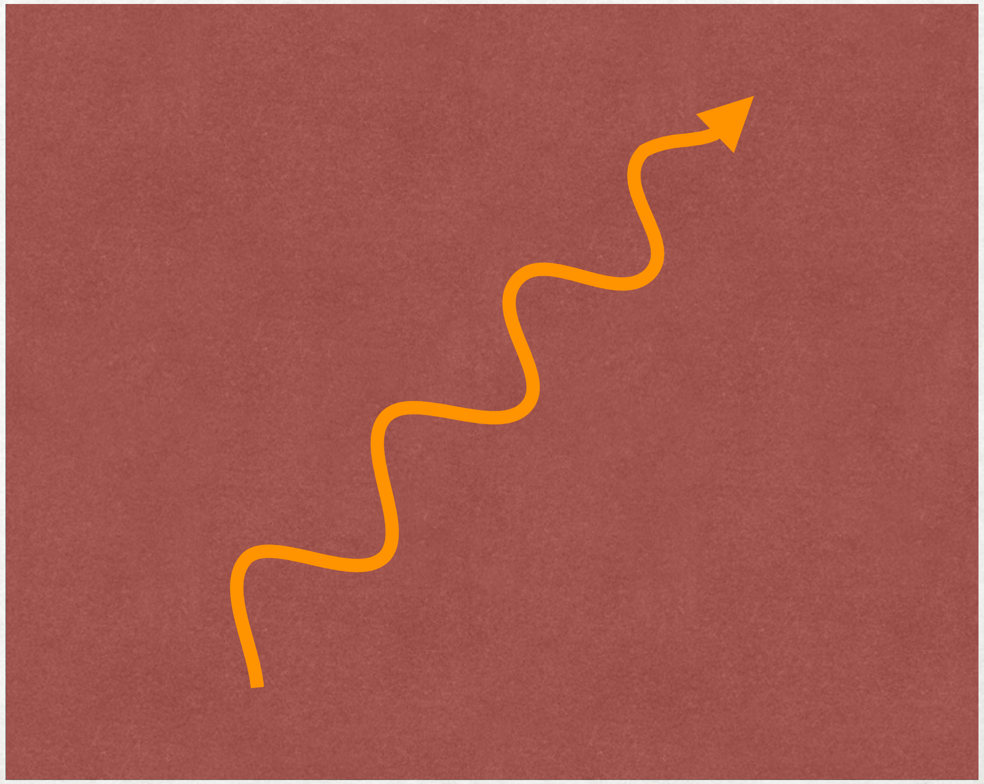


4-VELOCIDADE E 4-MOMENTO

- Portanto, para raios de luz temos que

$$0 = ||P^{\mu}_{\text{luz}}||^2 = -\frac{E^2_{\text{luz}}}{c^2} + \vec{p}^{\,2}_{\text{luz}}$$

- Ou seja, a energia da luz é vinculada a seu momento, $E_{\text{luz}} = \left| \vec{p}_{\text{luz}} \right| c$.



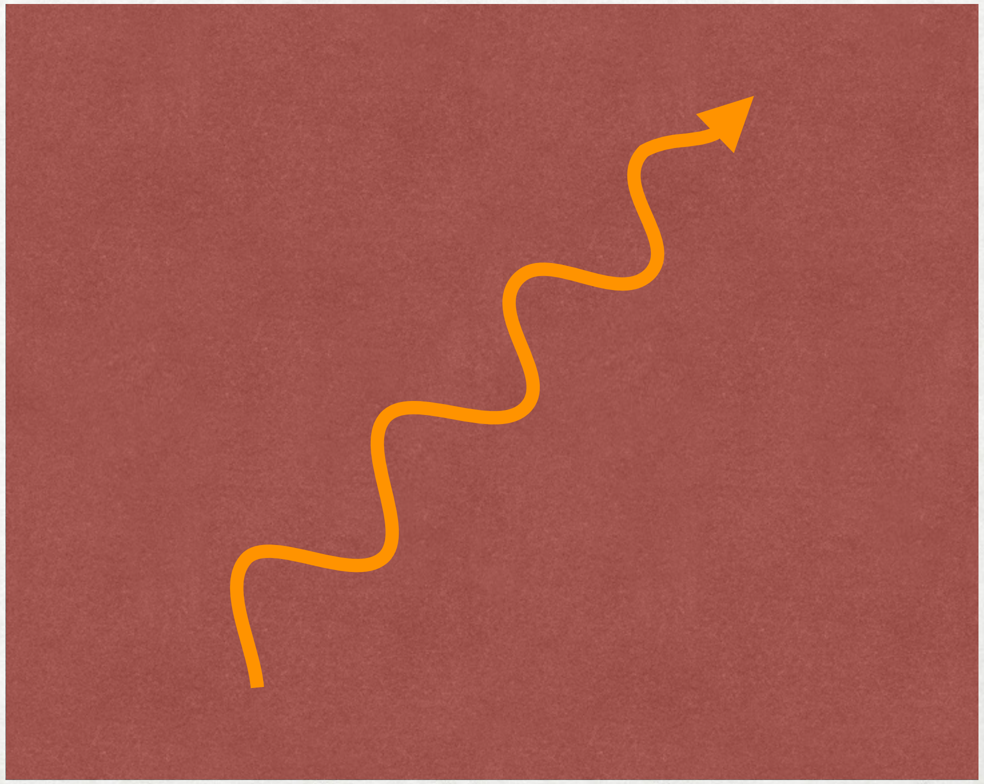
4-VELOCIDADE E 4-MOMENTO

- Portanto, para raios de luz temos que

$$0 = ||P^{\mu}_{\text{luz}}||^2 = -\frac{E^2_{\text{luz}}}{c^2} + \vec{p}^{\,2}_{\text{luz}}$$

- Ou seja, a energia da luz é vinculada a seu momento, $E_{\text{luz}} = \left| \vec{p}_{\text{luz}} \right| \, c \; .$

- A única propriedade de um raio



4-VELOCIDADE E 4-MOMENTO

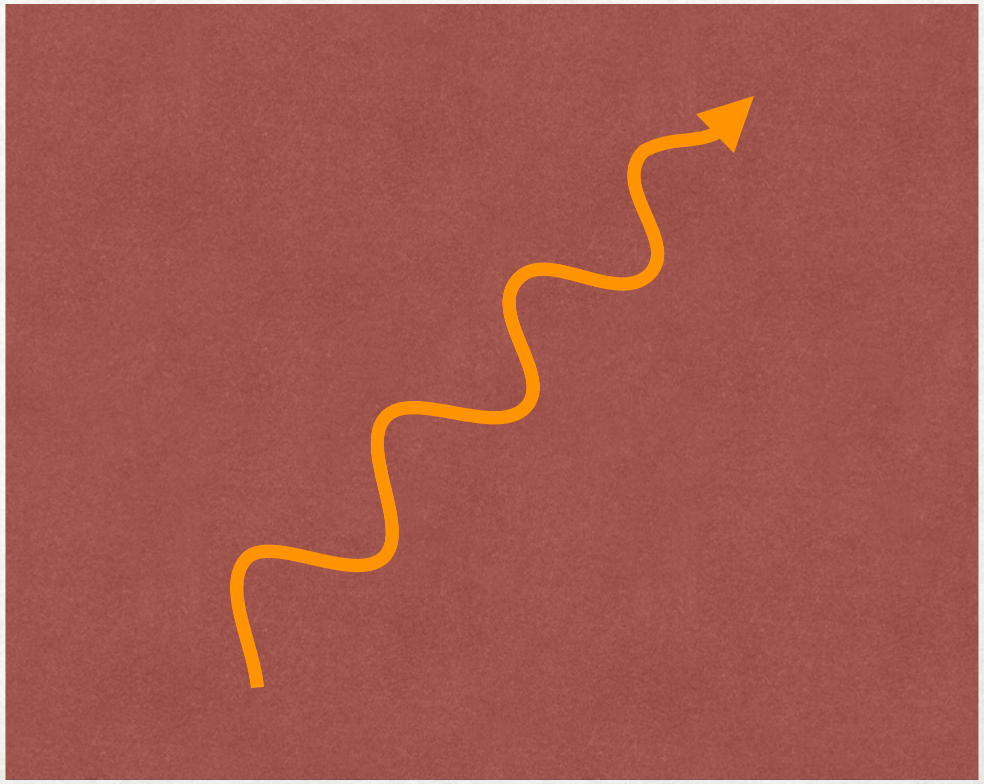
- Portanto, para raios de luz temos que

$$0 = ||P^{\mu}_{\text{luz}}||^2 = -\frac{E^2_{\text{luz}}}{c^2} + \vec{p}^{\,2}_{\text{luz}}$$

- Ou seja, a energia da luz é vinculada a seu momento, $E_{\text{luz}} = \left|\vec{p}_{\text{luz}}\right| c$.

- A única propriedade de um raio

de luz é sua ***energia*** e sua ***direção***



4-VELOCIDADE E 4-MOMENTO

- Portanto, para raios de luz temos que

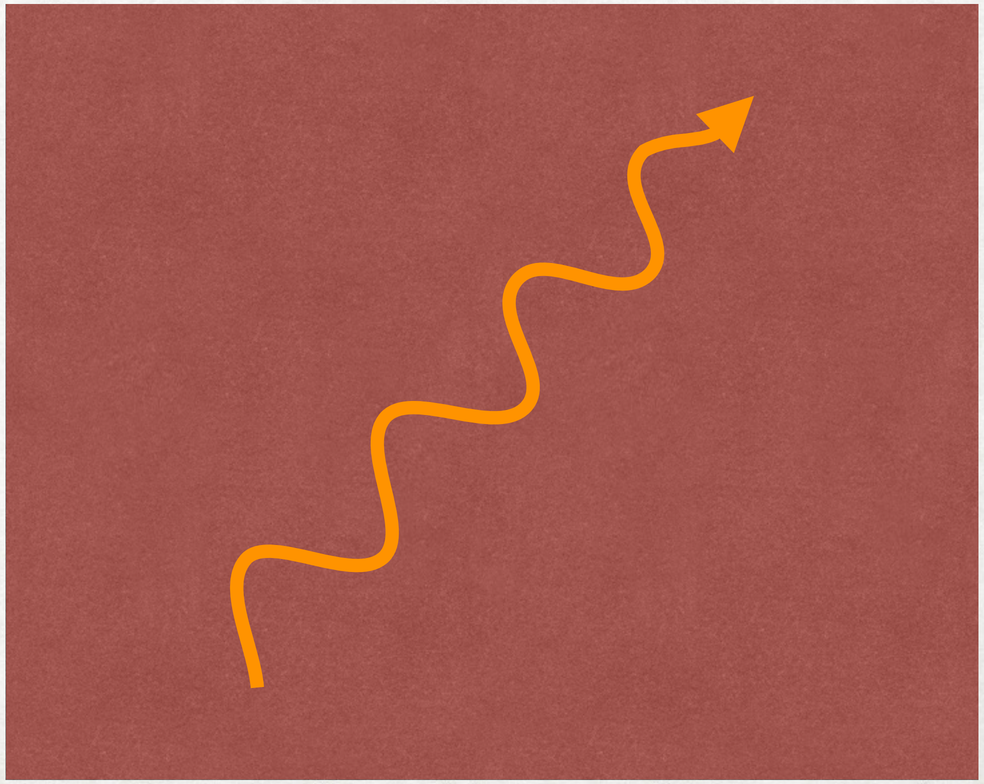
$$0 = ||P^{\mu}_{\text{luz}}||^2 = -\frac{E^2_{\text{luz}}}{c^2} + \vec{p}^{\,2}_{\text{luz}}$$

- Ou seja, a energia da luz é vinculada a seu momento, $E_{\text{luz}} = \left|\vec{p}_{\text{luz}}\right| c$.

- A única propriedade de um raio

de luz é sua ***energia*** e sua ***direção***

- Essas componentes são, claro,



4-VELOCIDADE E 4-MOMENTO

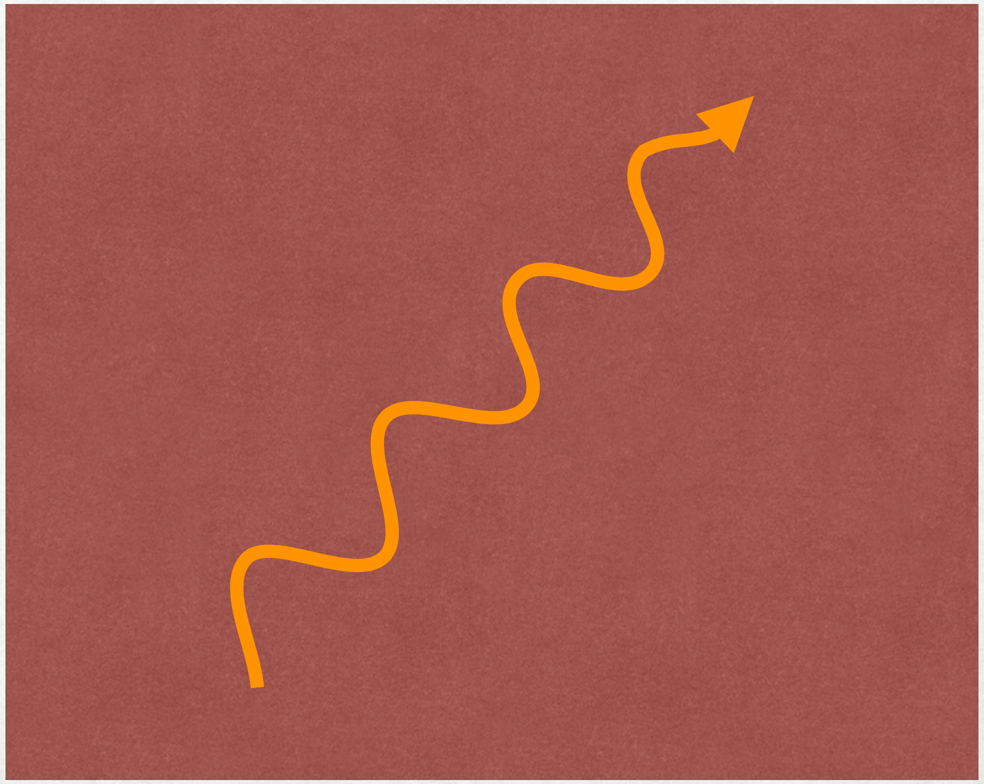
- Portanto, para raios de luz temos que

$$0 = ||P^{\mu}_{\text{luz}}||^2 = -\frac{E^2_{\text{luz}}}{c^2} + \vec{p}^{\,2}_{\text{luz}}$$

- Ou seja, a energia da luz é vinculada a seu momento, $E_{\text{luz}} = \left|\vec{p}_{\text{luz}}\right| c$.

- A única propriedade de um raio de luz é sua ***energia*** e sua ***direção***

- Essas componentes são, claro, diferentes dependendo do referencial!



DINÂMICA RELATIVÍSTICA E FORÇA

DINÂMICA RELATIVÍSTICA E FORÇA

- Na mecânica não-relativística a lei de movimento é dada por:

$$\overrightarrow{F} = m\,\overrightarrow{a}$$

DINÂMICA RELATIVÍSTICA E FORÇA

- Na mecânica não-relativística a lei de movimento é dada por:

$$\overrightarrow{F} = m\,\overrightarrow{a}$$

- Mas e na relatividade? Assim como temos $U^\mu = \dfrac{d\,r^\mu}{d\tau}$, podemos definir a mudança desse estado de movimento em termos do mesmo tempo próprio, e escrever:

$$f^\mu = \frac{d\,P^\mu}{d\tau}$$

DINÂMICA RELATIVÍSTICA E FORÇA

- Na mecânica não-relativística a lei de movimento é dada por:

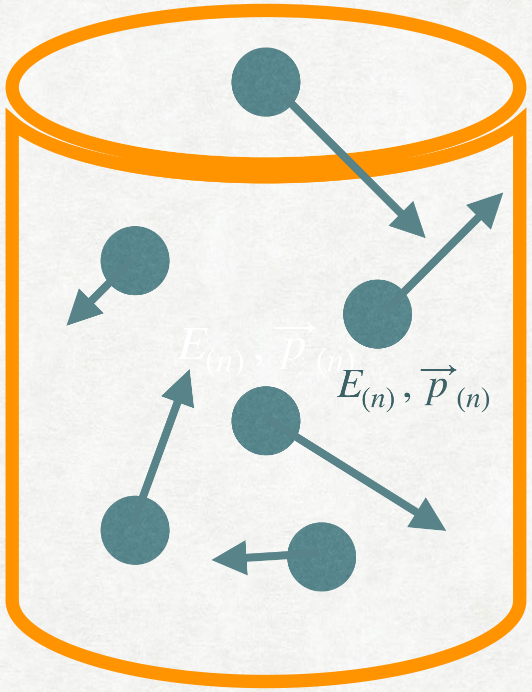
$$\overrightarrow{F} = m\,\overrightarrow{a}$$

- Mas e na relatividade? Assim como temos $U^\mu = \dfrac{d\,r^\mu}{d\tau}$, podemos definir a mudança desse estado de movimento em termos do mesmo tempo próprio, e escrever:

$$f^\mu = \frac{d\,P^\mu}{d\tau}$$

- **<u>Exercício</u>**: mostre que $f \cdot P = \eta_{\mu\nu}\, f^\mu\, P^\nu = 0$. Interprete a equação resultante em termos de conceitos familiares da mecânica não-relativística. (Ou seja: o que significa, fisicamente, essa equação?)

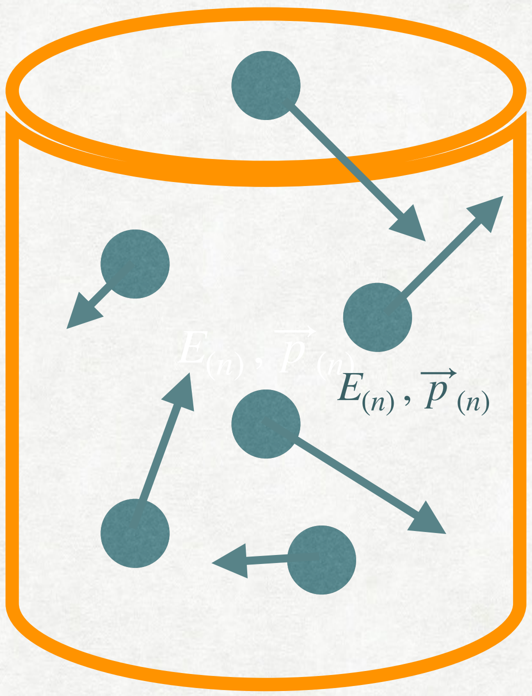
DINÂMICA RELATIVÍSTICA E FORÇA



DINÂMICA RELATIVÍSTICA E FORÇA

- Conservação de 4-momento

$$P^{\mu}_{\text{tot}} = \sum_n P^{\mu}_{(n)}$$

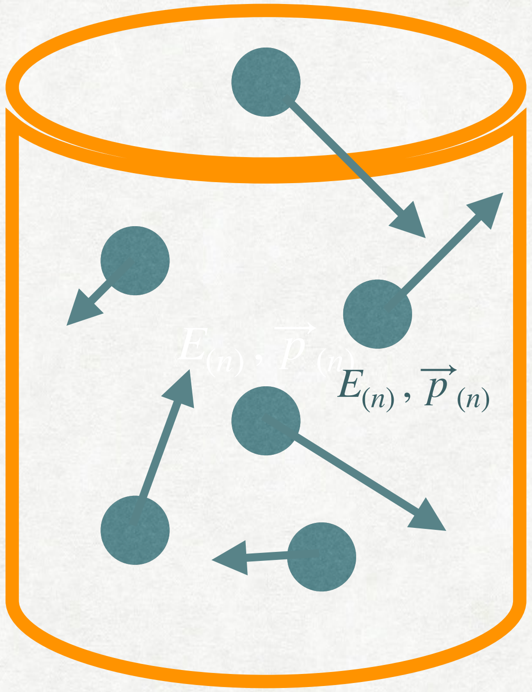


DINÂMICA RELATIVÍSTICA E FORÇA

- Conservação de 4-momento

$$P^{\mu}_{\text{tot}} = \sum_{n} P^{\mu}_{(n)}$$

Conservação de energia



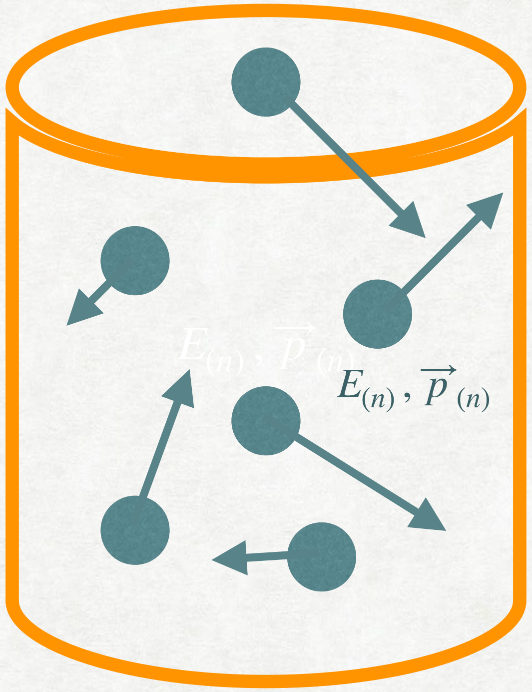
DINÂMICA RELATIVÍSTICA E FORÇA

- Conservação de 4-momento

$$P^{\mu}_{\text{tot}} = \sum_{n} P^{\mu}_{(n)}$$

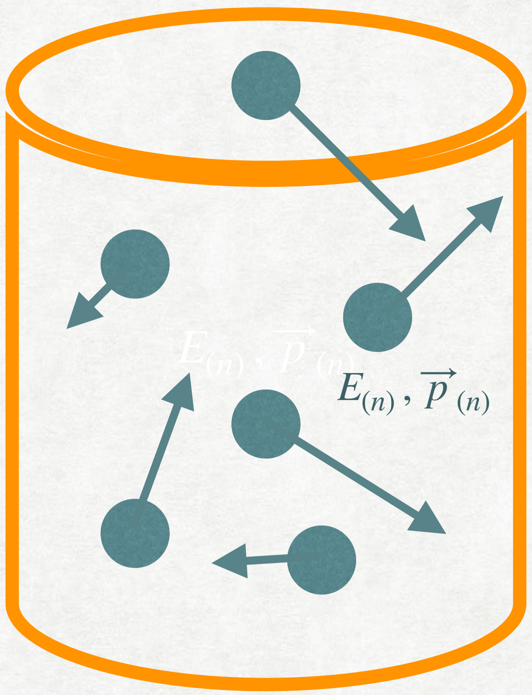
☑ Conservação de energia

☑ Conservação de momento



DINÂMICA RELATIVÍSTICA E FORÇA

- Conservação de 4-momento



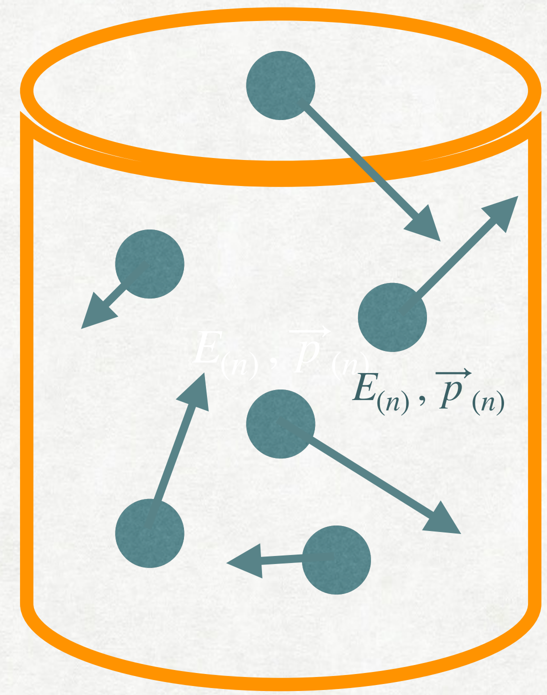
$$P^{\mu}_{\text{tot}} = \sum_n P^{\mu}_{(n)}$$

☑ Conservação de energia

☑ Conservação de momento

- Note que não há um invariante associado com a "massa total" do sistema! A noção do Centro de Massa, de fato, é bastante mais complexa na Relatividade!

DINÂMICA RELATIVÍSTICA E FORÇA



- Conservação de 4-momento

$$P^{\mu}_{\text{tot}} = \sum_n P^{\mu}_{(n)}$$

☑ Conservação de energia

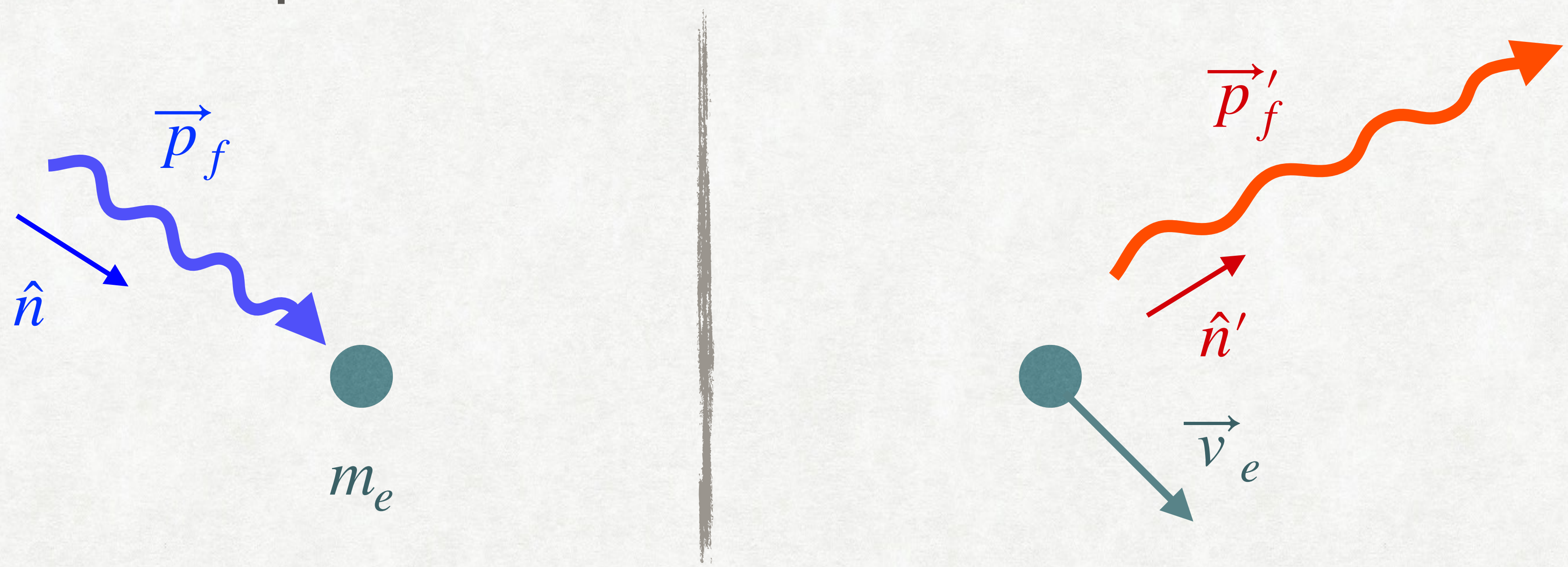
☑ Conservação de momento

- Note que não há um invariante associado com a "massa total" do sistema! A noção do Centro de Massa, de fato, é bastante mais complexa na Relatividade!

DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

- Espalhamento Compton



DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

- Espalhamento Compton

- A energia do fóton incidente é $E = h\nu = |\vec{p}_f|c$
- $P_f^\mu = \dfrac{h\nu}{c}\{1, \hat{n}\}$, onde $\hat{n}$ é a direção de propagação do foton incidente
- $P_f^{\prime\mu} = \dfrac{h\nu'}{c}\{1, \hat{n}'\}$, onde $\hat{n}'$ é a direção de propagação do foton emergente

DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

- Espalhamento Compton

DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

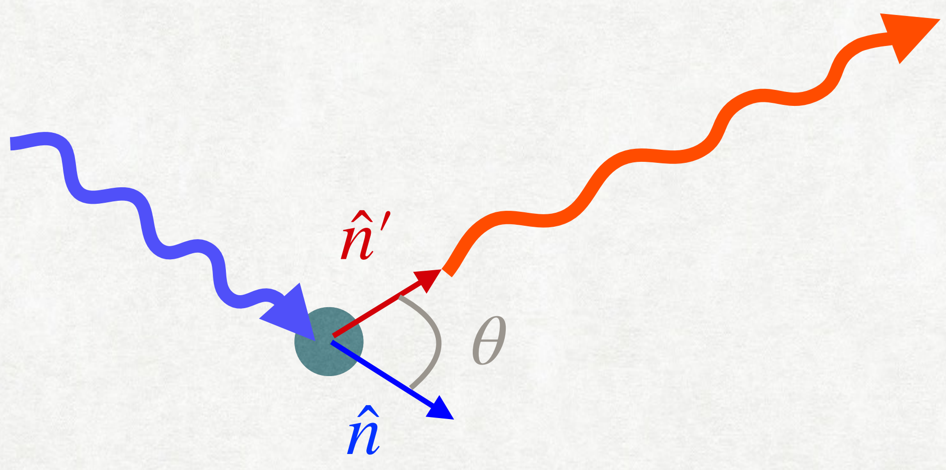
- Espalhamento Compton

- Pergunta: qual a relação entre o ângulo de espalhamento e a mudança na frequência do fóton?

- Conservação de 4- momento: $P_f^\mu + P_e^\mu = P_f^{'\mu} + P_e^{'\mu}$

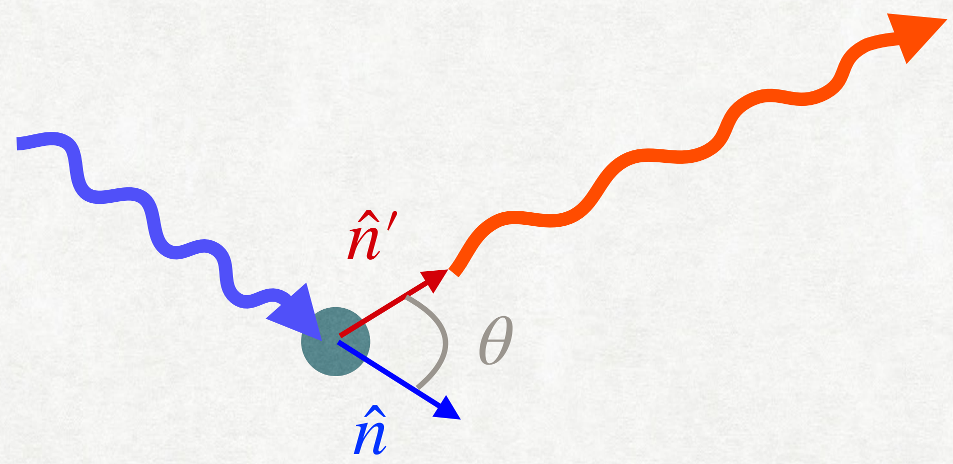
- Ou seja, $P_f^\mu + P_e^\mu - P_f^{'\mu} = P_e^{'\mu}$

DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES



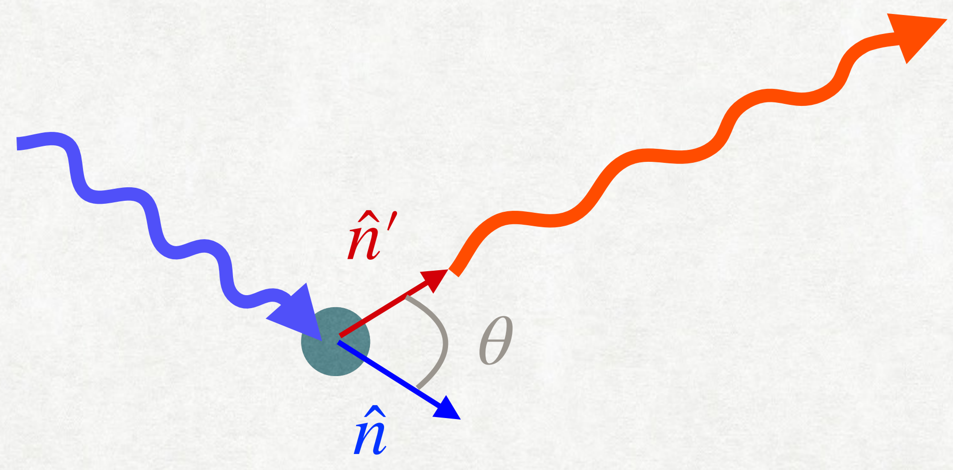
DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

- Espalhamento Compton



DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

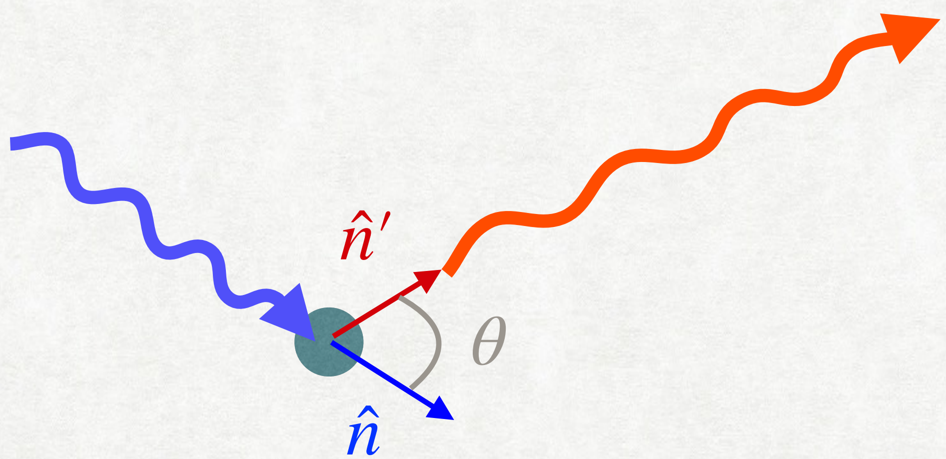
- Espalhamento Compton



- Vamos tomar a norma de ambos os lados dessa expressão:

DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

- Espalhamento Compton

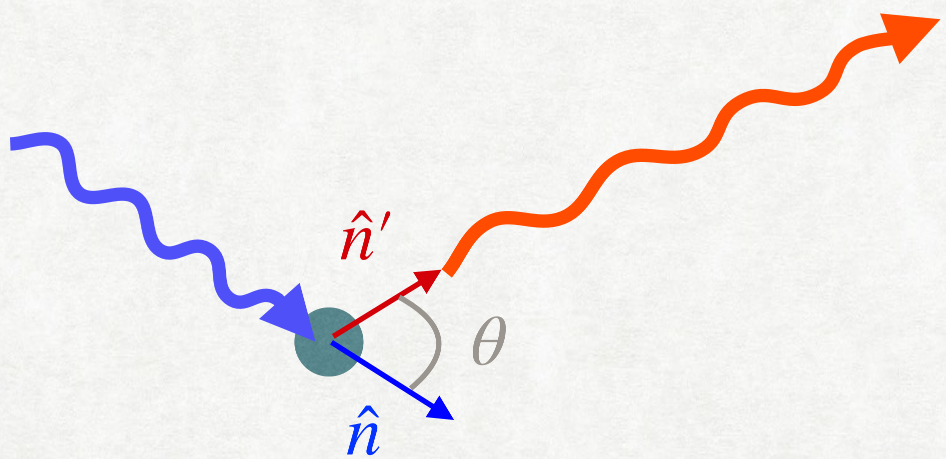


- Vamos tomar a norma de ambos os lados dessa expressão:

- $||P_f^\mu + P_e^\mu - P_f^{'\mu}||^2 = ||P_e^{'\mu}||^2$

DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

- Espalhamento Compton



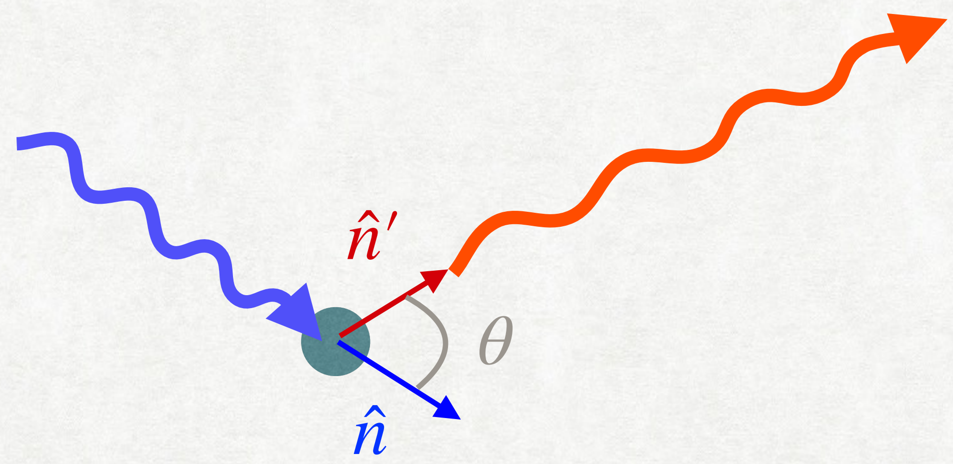
- Vamos tomar a norma de ambos os lados dessa expressão:

- $||P_f^{\mu} + P_e^{\mu} - P_f^{\prime\mu}||^2 = ||P_e^{\prime\mu}||^2$

➡ $||P_f^{\mu}||^2 + ||P_e^{\mu}||^2 + ||P_f^{\prime\mu}||^2 - 2||P_f^{\mu}P_e^{\mu}|| - 2||P_f^{\mu}P_f^{\prime\mu}|| - 2||P_e^{\mu}P_f^{\prime\mu}|| = ||P_e^{\prime\mu}||^2$

DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

- Espalhamento Compton



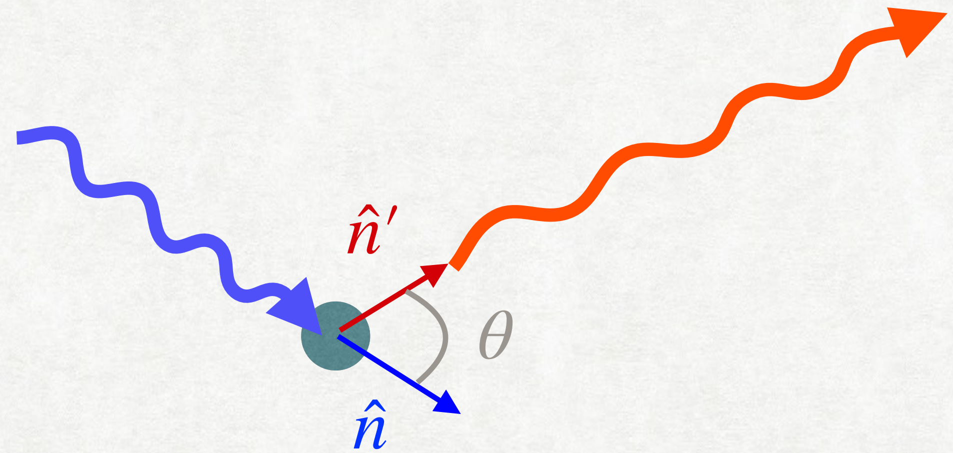
- Vamos tomar a norma de ambos os lados dessa expressão:

- $||P_f^{\mu} + P_e^{\mu} - P_f^{\prime\mu}||^2 = ||P_e^{\prime\mu}||^2$

➡ $||\overset{=0}{\cancel{P_f^{\mu}}}||^2 + ||P_e^{\mu}||^2 + ||\overset{=0}{\cancel{P_f^{\prime\mu}}}||^2 - 2||P_f^{\mu}P_e^{\mu}|| - 2||P_f^{\mu}P_f^{\prime\mu}|| - 2||P_e^{\mu}P_f^{\prime\mu}|| = ||P_e^{\prime\mu}||^2$

DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

- Espalhamento Compton



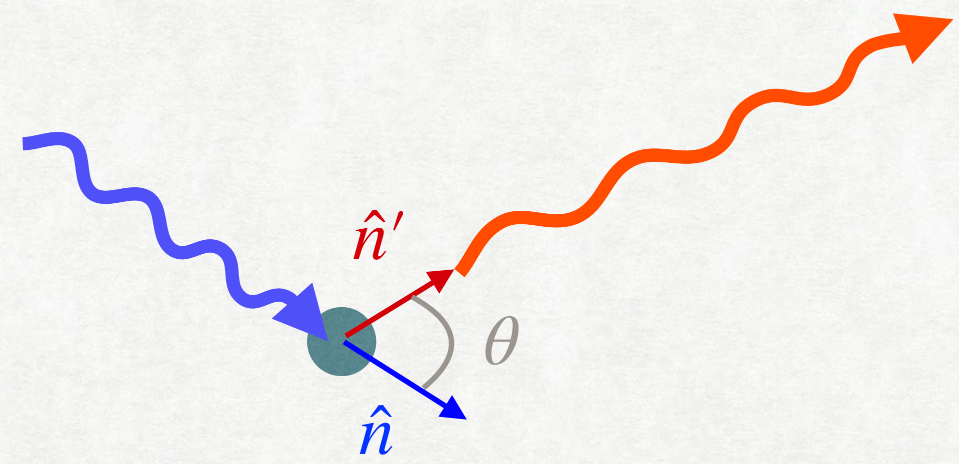
- Vamos tomar a norma de ambos os lados dessa expressão:

- $||P_f^\mu + P_e^\mu - P_f'^\mu||^2 = ||P_e'^\mu||^2$

➡ $||\overset{=0}{\cancel{P_f^\mu}}||^2 + ||\cancel{P_e^\mu}||^2 + ||\overset{=0}{\cancel{P_f'^\mu}}||^2 - 2||P_f^\mu P_e^\mu|| - 2||P_f^\mu P_f'^\mu|| - 2||P_e^\mu P_f'^\mu|| = ||\cancel{P_e'^\mu}||^2$

DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

- Espalhamento Compton



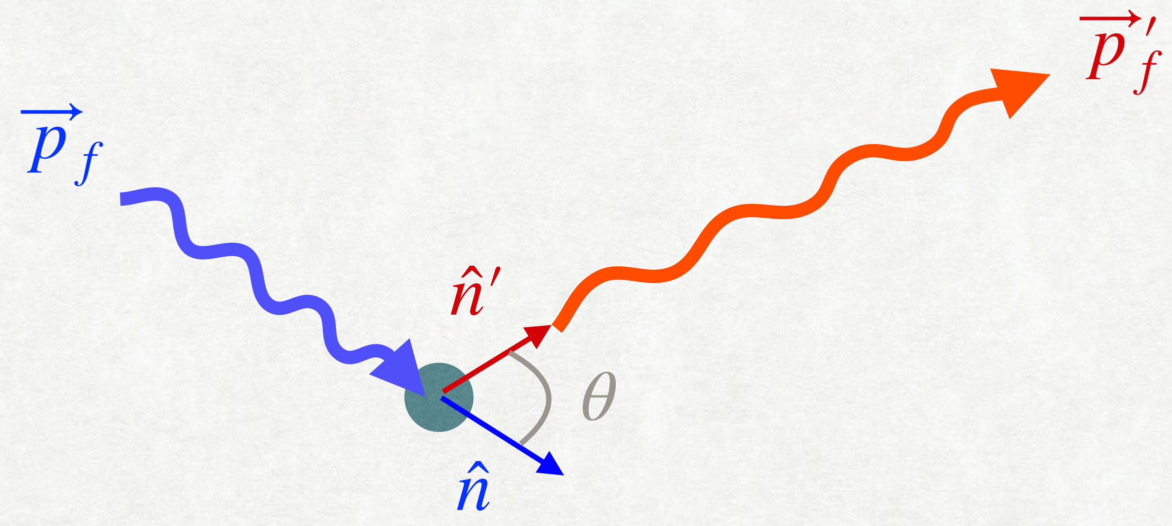
- Vamos tomar a norma de ambos os lados dessa expressão:

- $||P_f^\mu + P_e^\mu - P_f^{\prime\mu}||^2 = ||P_e^{\prime\mu}||^2$

➡ $||\overset{=0}{\cancel{P_f^\mu}}||^2 + ||\cancel{P_e^\mu}||^2 + ||\overset{=0}{\cancel{P_f^{\prime\mu}}}||^2 - 2||P_f^\mu P_e^\mu|| - 2||P_f^\mu P_f^{\prime\mu}|| - 2||P_e^\mu P_f^{\prime\mu}|| = ||\cancel{P_e^{\prime\mu}}||^2$

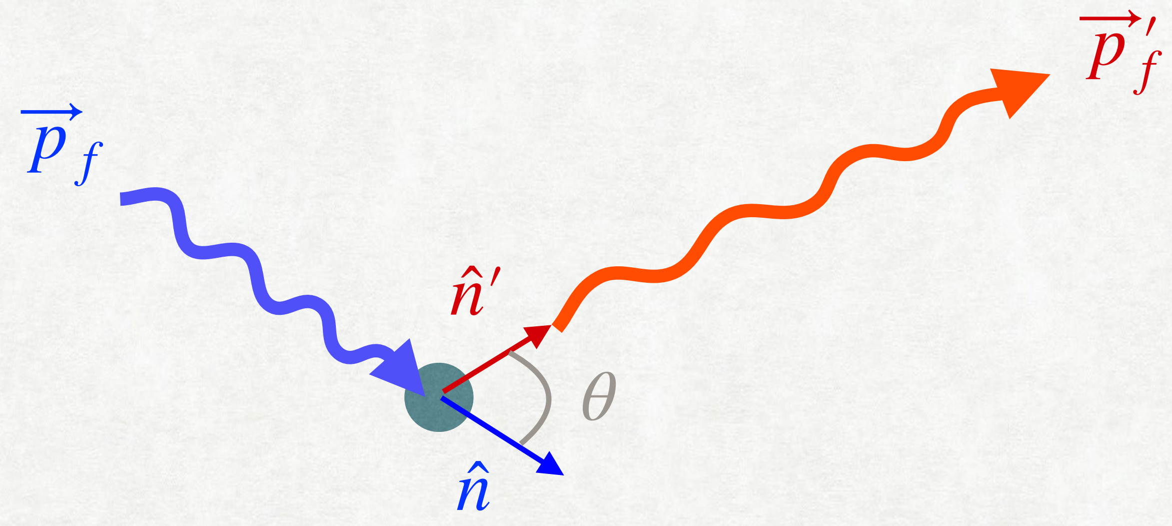
➡ $||P_e^\mu(P_f^\mu - P_f^{\prime\mu})|| = ||P_f^\mu P_f^{\prime\mu}||$

DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES



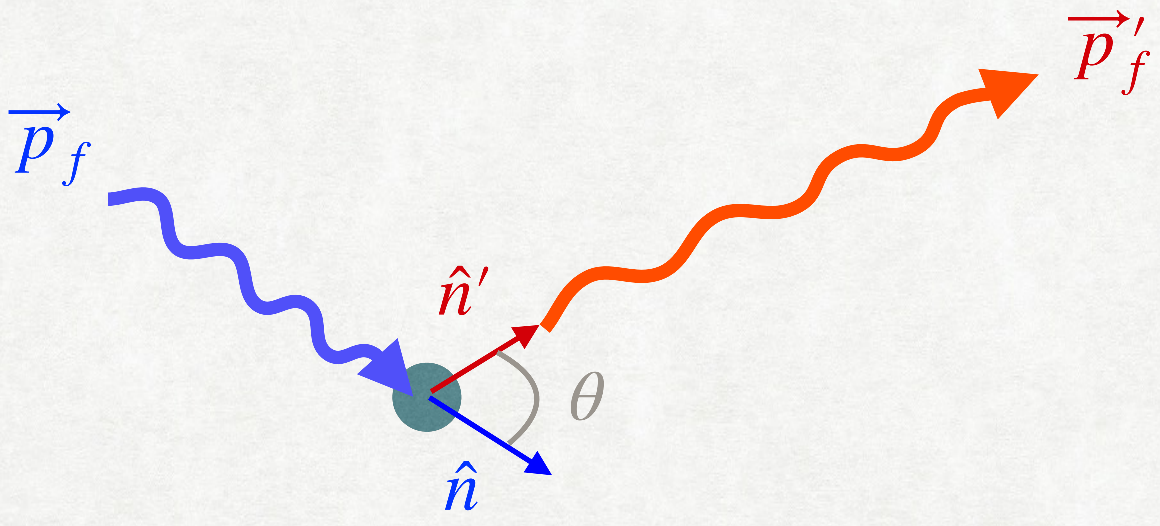
DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

- Espalhamento Compton



DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

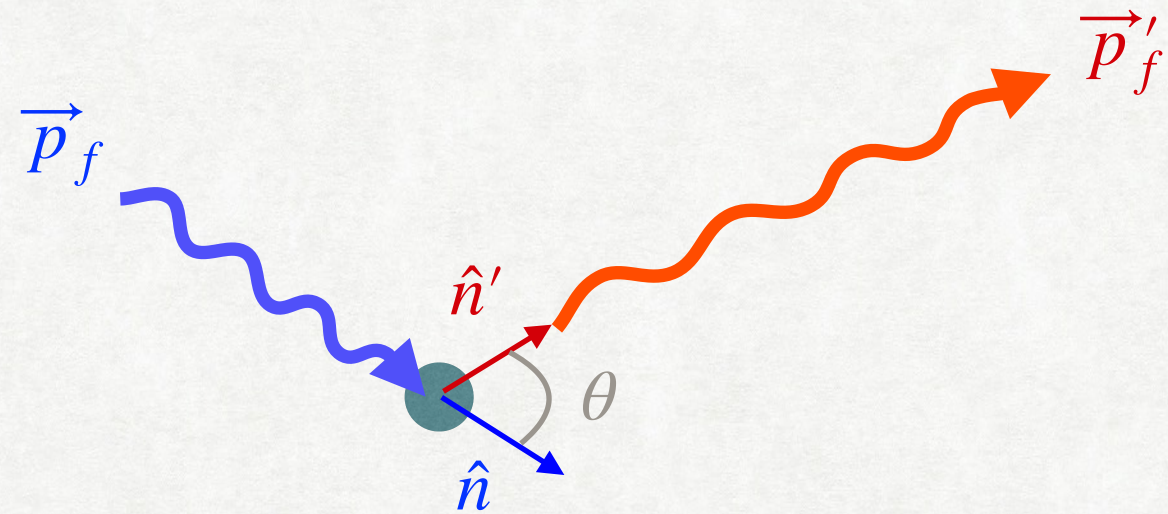
- Espalhamento Compton



- Agora vamos abrir essa última expressão, $||P_e^\mu(P_f^\mu - P_f^{'\mu})|| = ||P_f^\mu P_f^{'\mu}||$

DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

- Espalhamento Compton

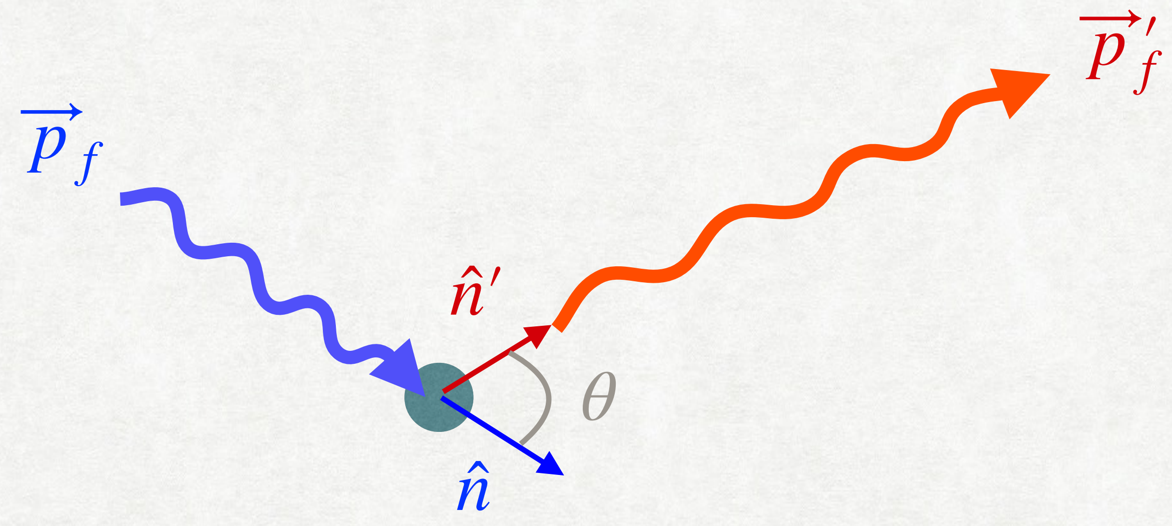


- Agora vamos abrir essa última expressão, $||P_e^{\mu}(P_f^{\mu} - P_f^{'\mu})|| = ||P_f^{\mu} P_f^{'\mu}||$

➡ $P_e^0(P_f^0 - P_f^{'0}) + \overrightarrow{p}_e \cdot (\overrightarrow{p}_f + \overrightarrow{p}'_f) = P_f^0 P_f^{'0} - \overrightarrow{p}_f \cdot \overrightarrow{p}'_f$

DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

- Espalhamento Compton



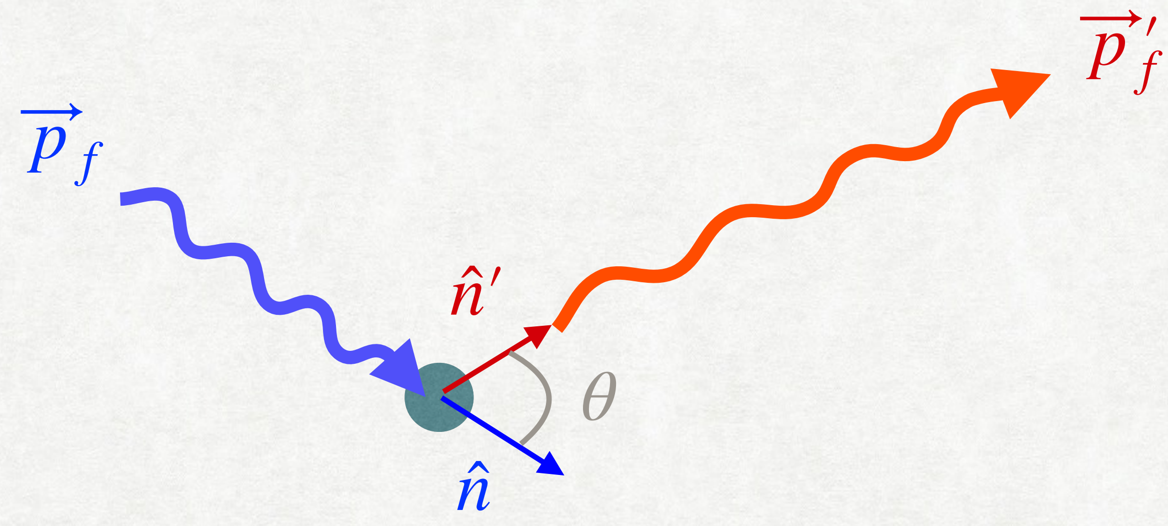
- Agora vamos abrir essa última expressão, $||P_e^\mu(P_f^\mu - P_f^{'\mu})|| = ||P_f^\mu P_f^{'\mu}||$

➡ $P_e^0(P_f^0 - P_f^{'0}) + \overrightarrow{p}_e \cdot (\overrightarrow{p}_f + \overrightarrow{p}'_f) = P_f^0 P_f^{'0} - \overrightarrow{p}_f \cdot \overrightarrow{p}'_f$

- Note que $P_e^0 = E_e/c = m_e c$, $P_f^0 = E_f/c = h\nu/c$, etc

DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

- Espalhamento Compton



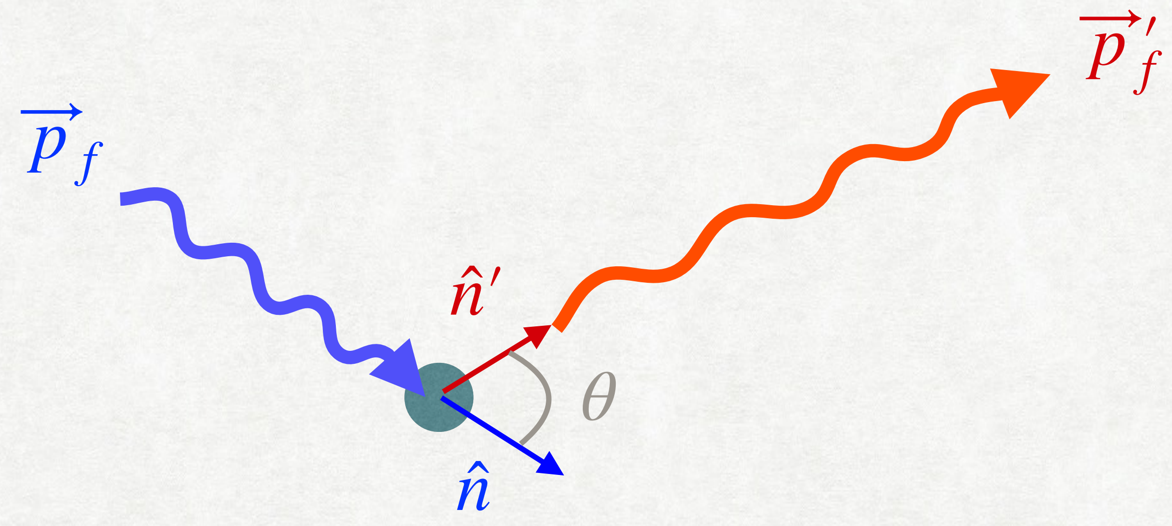
- Agora vamos abrir essa última expressão, $||P_e^{\mu}(P_f^{\mu} - P_f^{'\mu})|| = ||P_f^{\mu} P_f^{'\mu}||$

➡ $P_e^0(P_f^0 - P_f^{'0}) + \overrightarrow{p}_e \cdot (\overrightarrow{p}_f + \overrightarrow{p}'_f) = P_f^0 P_f^{'0} - \overrightarrow{p}_f \cdot \overrightarrow{p}'_f$

- Note que $P_e^0 = E_e/c = m_e c$, $P_f^0 = E_f/c = h\nu/c$, etc

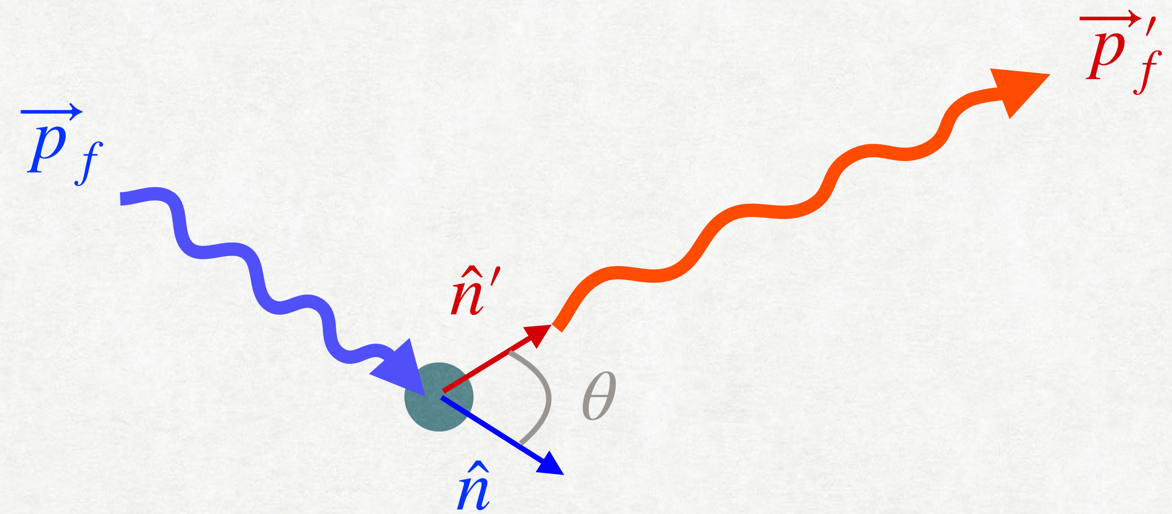
➡ $m_e c^2 \times (h\nu - h\nu') = h\nu \times h\nu' - (h\nu\hat{n}) \cdot (h\nu'\hat{n}')$

DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES



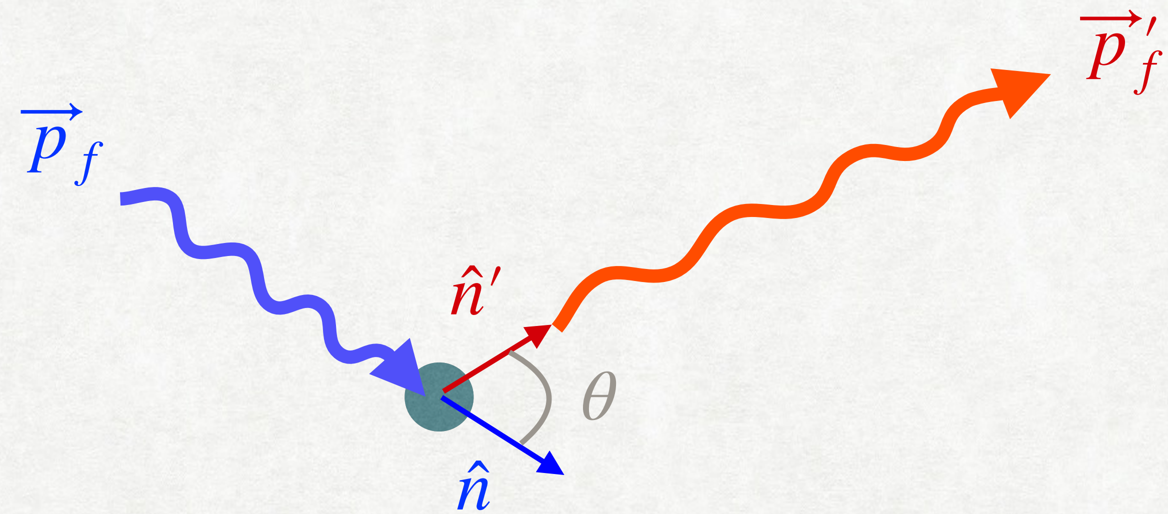
DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

- Espalhamento Compton



DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

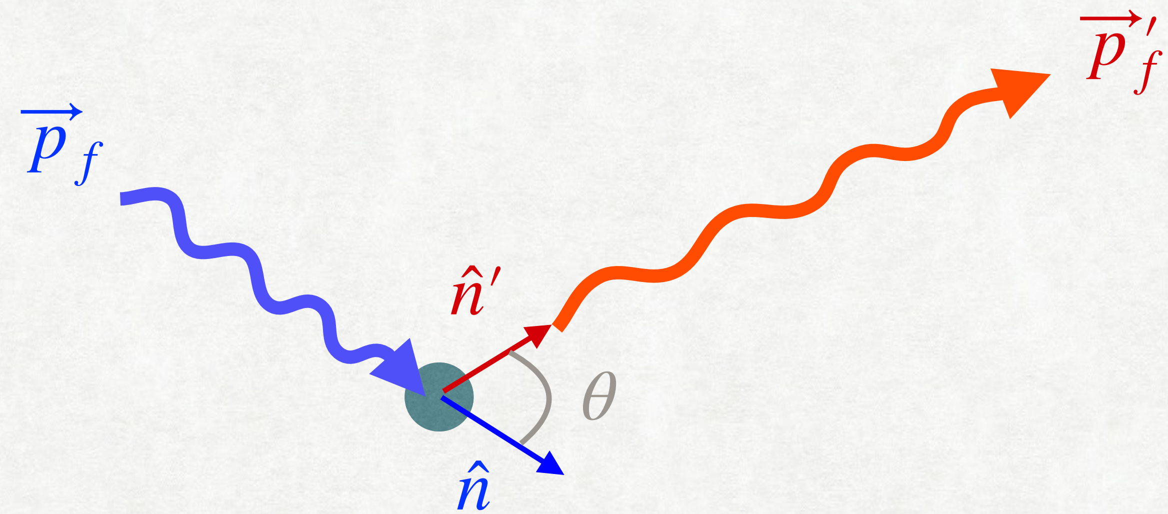
- Espalhamento Compton



- Ou seja, obtemos que

DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

- Espalhamento Compton

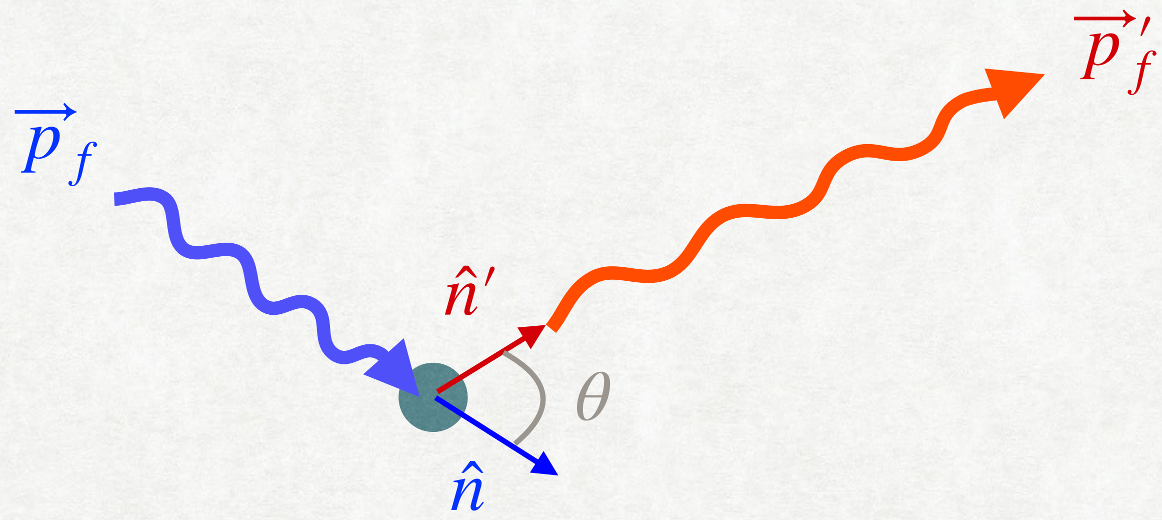


- Ou seja, obtemos que

➡ $$\frac{\nu - \nu'}{\nu \nu'} = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$$

DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

- Espalhamento Compton



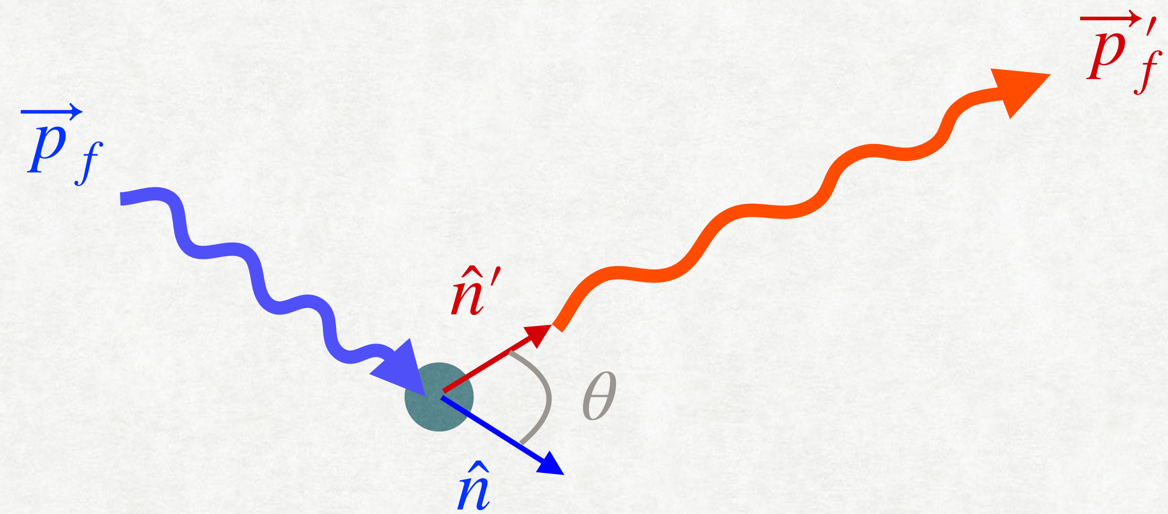
- Ou seja, obtemos que

➡ $$\frac{\nu - \nu'}{\nu\nu'} = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$$

- Isso é geralmente usando $\nu = c/\lambda$, como:

DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

- Espalhamento Compton



- Ou seja, obtemos que

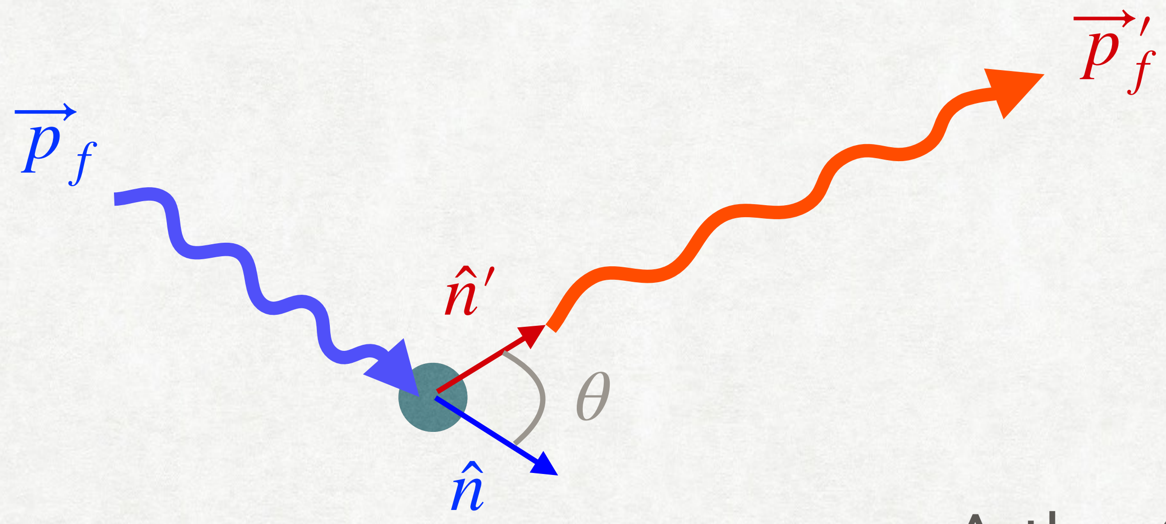
➡ $$\frac{\nu - \nu'}{\nu\nu'} = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$$

- Isso é geralmente usando $\nu = c/\lambda$, como:

➡ $$\lambda' - \lambda = \frac{2h}{m_e c}\operatorname{sen}^2\theta$$

DINÂMICA RELATIVÍSTICA: INTERAÇÕES

- Espalhamento Compton



- Ou seja, obtemos que

➡ $$\frac{\nu - \nu'}{\nu\nu'} = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$$

- Isso é geralmente usando $\nu = c/\lambda$, como:

➡ $$\lambda' - \lambda = \frac{2h}{m_e c}\,\mathrm{sen}^2\,\theta$$

Arthur Compton