Aula 2: Invariância de Lorentz, Transformações de Lorentz

—— // ——

* Séculos XVI–XIX: Éter tem um papel central na Física

* 1860, Maxwell unifica as teorias da Eletricidade e do Magnetismo em um só edifício, o Eletromagnetismo, regido pelas Leis de Maxwell — e, de quebra, explica a luz como ondas eletromagnéticas. O "éter" se torna ainda mais central (o meio no qual as ondas de luz se propagam)

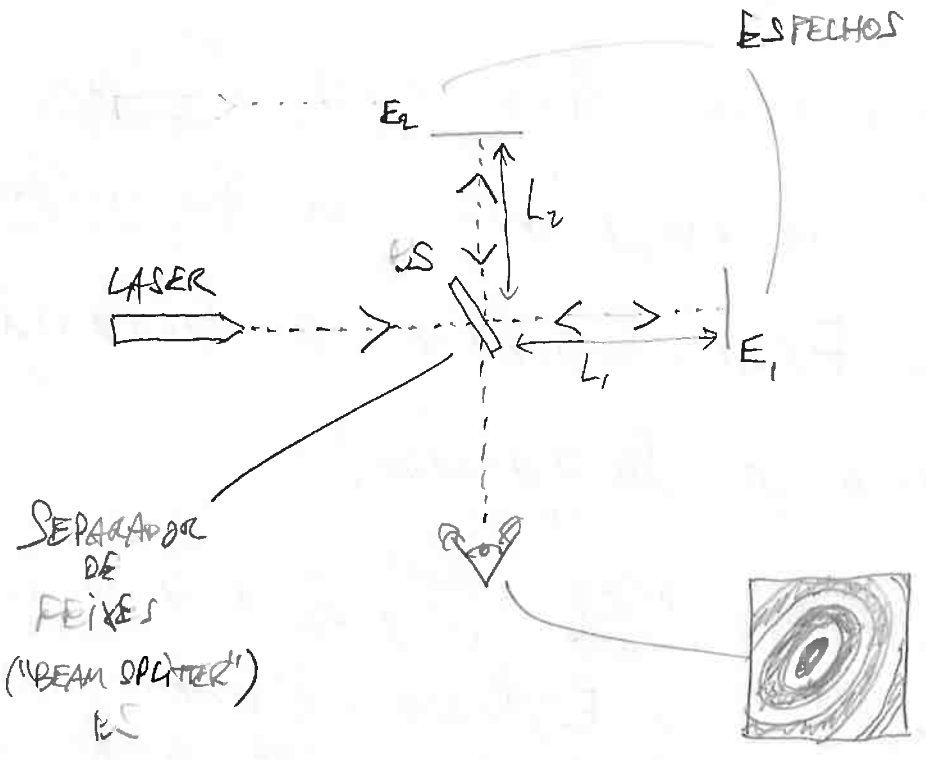
* Porém, logo fica claro que as leis de Maxwell não respeitam um princípio básico da Física Clássica: a invariância por transformações de Galileu!

* Hendrik Lorentz (1853-1928) é o primeiro a mostrar que o Eletromagnetismo parecia preferir um certo referencial: aquele onde o éter estaria em repouso!

* Porém, se em outros referenciais (que se movem c/ respeito ao "éter") as leis mudam, então os fenômenos físicos medidos naqueles referenciais também deveriam mudar!
Ou seja, deveríamos observar efeitos que dependem da velocidade do referencial c/ respeito ao éter

⇒ CORRIDA P/ DETECTAR ESSES EFEITOS!

* Michelson e Morley, em 1887, fizeram o mais preciso e elegante experimento, usando um interferômetro:



Configuração #1: a Terra se move de tal forma que a velocidade (v) c/ respeito ao éter é paralela à direção L_1.

L_1: Ida: $\Delta t_I = \dfrac{L_1}{c-v}$

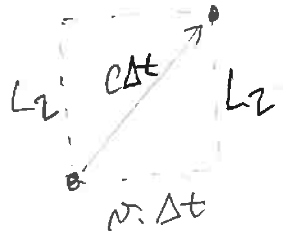
Volta: $\Delta t_v = \dfrac{L_1}{c+v}$

(até o BS)

$$T_1 = \frac{L_1}{c-v} + \frac{L_1}{c+v} =$$

$$\boxed{T_1 = \frac{2L_1}{c}\,\frac{1}{1-v^2/c^2}}$$

L_2: Ida:



$$c^2\Delta t^2 = L_2^2 + v^2\Delta t^2$$

$$\Delta t^2(1-v^2/c^2) = \frac{L_2^2}{c^2}$$

$$\Delta t_I = \frac{L_2}{c}\,\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Volta:

$$\Delta t_v = \frac{L_2}{c}\,\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_2 = \frac{2L_2}{c}\,\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}$$

$$\Rightarrow \Delta T = T_1 - T_2 = \frac{2}{c}\,\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(\frac{L_1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - L_2\right)$$

Configuração #2: A velocidade c/ o éter é agora paralela à direção $\underline{L_2}$.

$$\Rightarrow T_1' = \frac{2L_1}{c} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$T_2' = \frac{2L_2}{c} \frac{1}{1-v^2/c^2}$$

$$\Delta T' = \frac{2}{c} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left(L_1 - \frac{L_2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right)$$

Se, ao girar de 90° o aparato, notarmos qualquer mudança no padrão de interferência, isso será evidência dessa nossa velocidade (v) c/ respeito ao éter!

Mas essa mudança só vai acontecer se ΔT e $\Delta T'$ forem diferentes, ou seja, se

$$\delta T = \Delta T - \Delta T' \neq 0$$

$$\delta T = \frac{2}{c} \frac{L_1 + L_2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \Bigg(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1}_{\sim \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + O\left(\frac{v^4}{c^4}\right)} \Bigg) \approx \frac{L_1+L_2}{c} * \frac{v^2}{c^2} + \dots$$

Baseado na velocidade da Terra ao redor do Sol, Michelson & Morley esperavam ver um efeito ~50x maior do que a precisão do experimento; porém, eles não observaram absolutamente nada.

De fato, nenhum experimento, nem então e nem agora, jamais detectou qualquer evidência do éter, ou de qualquer efeito da velocidade do aparato ou do observador na velocidade com que a luz se propaga.

É interessante seguir os relatos de um dos cientistas mais importantes da época, que assistia atentamente o desenrolar desses fatos, o Matemático e Físico e Filósofo Henri Poincaré:

1899 : "É muito provável que os fenômenos ópticos dependam apenas dos movimentos relativos dos corpos materiais, fontes luminosas e aparatos ópticos"

— NÃO AO "ÉTER"!

1900 : "O Éter existe, de fato? Eu não creio que observações mais precisas vão jamais revelar nada além de movimentos relativos"

1904 : PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE:

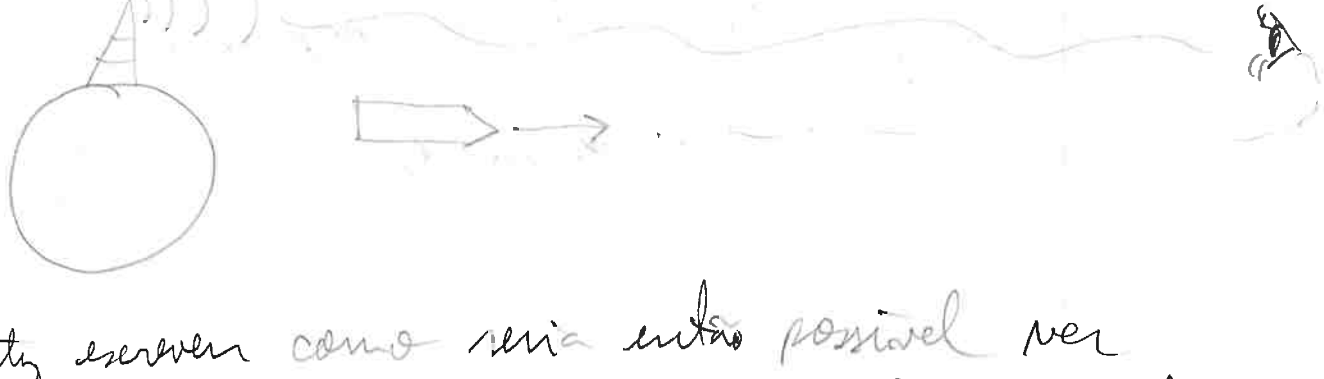
"As leis dos fenômenos físicos devem ser as mesmas, tanto para um observador 'fixo' quanto para um outro que possua um movimento relativo uniforme c/ relação ao primeiro"

1904 : "De todos esses resultados deve emergir um tipo inteiramente novo de dinâmica, que será caracterizada sobretudo pela lei de que nenhuma velocidade pode exceder a velocidade da luz"

É nesse momento que Einstein (1879-1955) se coloca. Ele tinha apenas 26 anos — muito mais jovem que Michelson, Lorentz, Poincaré, etc.

E Einstein assistia a tudo isso, em particular os experimentos tais como Michelson-Morley.

Agora, uma anedota: Einstein relata, em suas memórias, que quando criança ele era fã de dois escritores de ficção científica, Felix Eberty, e Aaron Bernstein.
Em um livro de 1846, Eberty especulou o que aconteceria se pudéssemos viajar mais rápido que a velocidade da luz.



Eberty escreveu como seria então possível ver eventos do passado. Aaron Bernstein fantasiou algo parecido, concebendo um correio que pudesse enviar mensagens ao passado.

Einstein dizia que se divertia muito imaginando esses cenários, e como seria tentar perseguir um raio de luz.

Só que Einstein não se esquecia que viajar ao passado viola não só a Física, mas a própria lógica!

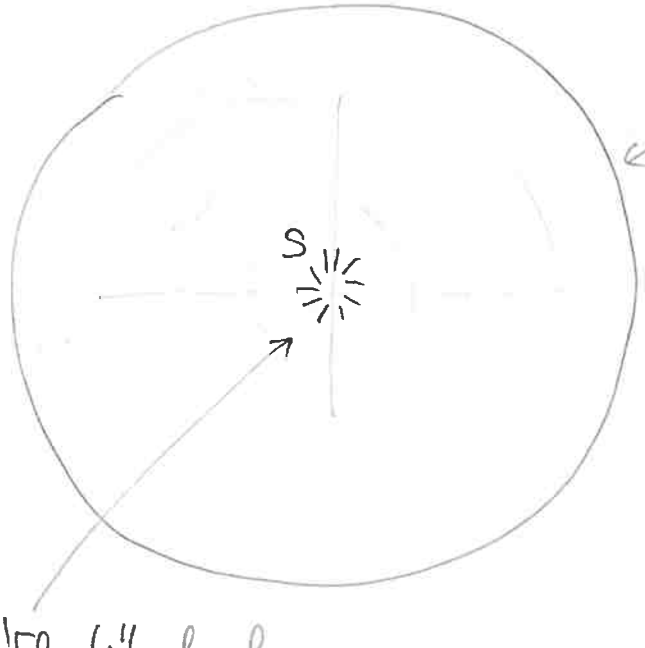
E que, portanto, não deveria ser possível que corpos materiais atingam velocidades iguais ou superiores à da luz.

Ele então juntou todos esses fatos, o resultado de Michelson-Morley, e em particular a impossibilidade de se medir velocidades relativas à velocidade da luz, e em 1905 propôs os 2 postulados que chamou de Princípio da Relatividade:

- Todos as leis físicas têm a <u>mesma</u> expressão em <u>qualquer referencial inercial</u>, não sendo nenhum referencial preferido c/ relação a qualquer outro.

- A velocidade da luz (c) é a <u>mesma</u> em <u>qualquer referencial</u>, independente da direção de propagação da luz, ou das velocidades relativas das fontes emissoras e dos observadores.

Vamos agora <u>deduzir</u> as Transformações de Lorentz a partir do Princípio da Relatividade.



"Flash" de luz em $t=0$ (Ref. S)

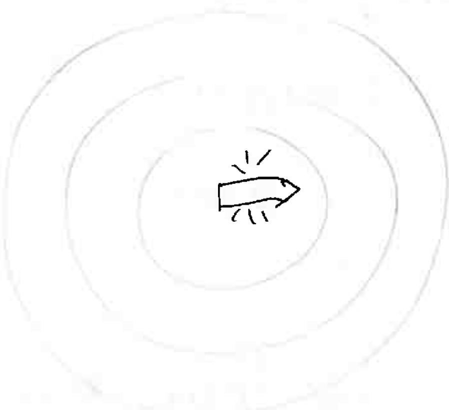
Após um tempo t, esse flash chega no Raio $R = c.t$, ou seja,

$$x^2+y^2+z^2=c^2t^2$$

$$\Rightarrow \boxed{-c^2t^2+x^2+y^2+z^2=0}$$

("Lugar Geométrico" do flash no instante t)

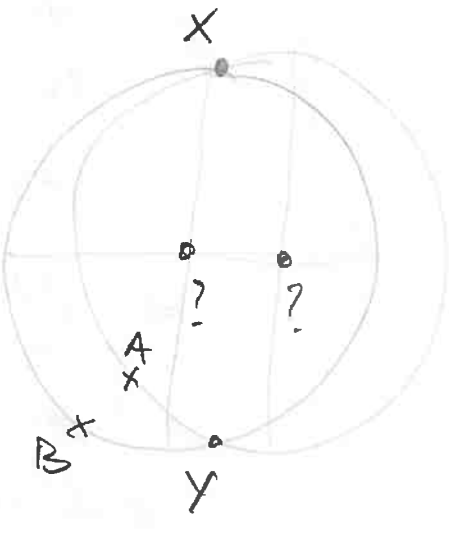
Mas agora vamos supor que um foguete viajando a uma velocidade v passa por nós no exato instante em que emitimos o flash. Vamos tomar o ponto de vista do foguete, que podemos chamar de S':



$$R' = ct'$$

$$-c^2t'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0$$

Mas afinal, esses "cascos esféricos" desse flash, estão centralizados na origem de S, ou na origem de S'?



X, Y : simultâneos p/ S

B, Y : simultâneos p/ S'

A, Y : simultâneos p/ S'

A antes de B p/ S e S'?!

⇒ SIMULTANEIDADE NÃO PODE SER UM CONCEITO ABSOLUTO!

Assim, somos levados inevitavelmente a relaxar a nossa noção usual de tempo e espaço como conceitos absolutos.

As posições e instantes dos eventos não dependem do estado de movimento relativo de quem mede esses tempos e distâncias.

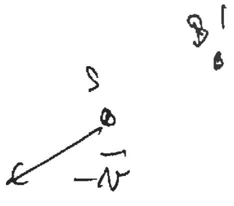
—— // ——

Vamos agora fazer a derivação das Transformações de Lorentz.

Vamos começar considerando os 2 referenciais, S e S', com um movimento relativo:

- S' se move c/ velocidade $+\vec{v}$ c/ relação a S:

- S se move c/ velocidade $-\vec{v}$ c/ relação a S':



Vamos supor que S e S' estão no mesmo ponto (origem) no instante $t = t' = 0$.

E vamos supor que ambos emitem, nesse instante, um flash de luz.

A primeira afirmação que podemos fazer é de que, pelo Princípio da Relatividade (e como demonstrado por Michelson e Morley), esses "dois flashs" são indistinguíveis — ou seja, na prática temos um único flash.

Já vimos que esse flash se propaga radialmente, em ambos os referenciais, como:

$$S: \quad -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0 \qquad \text{(I)}$$

$$S': \quad -c^2t'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0 \qquad \text{(II)}$$

Nosso problema consiste em encontrar relações entre $\{t, x, y, z\} \longleftrightarrow \{t', x', y', z'\}$

tais que (I) e (II) permaneçam válidas.

Mas que transformações seriam essas?

* Transf. Lineares:

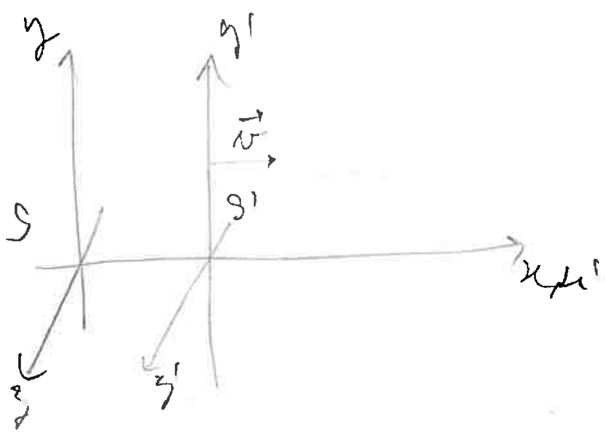
$$t' = a_0 t + b_0 x + c_0 y + d_0 z$$
$$x' = a_1 t + b_1 x + c_1 y + d_1 z$$
etc.

Q: Por Quê?

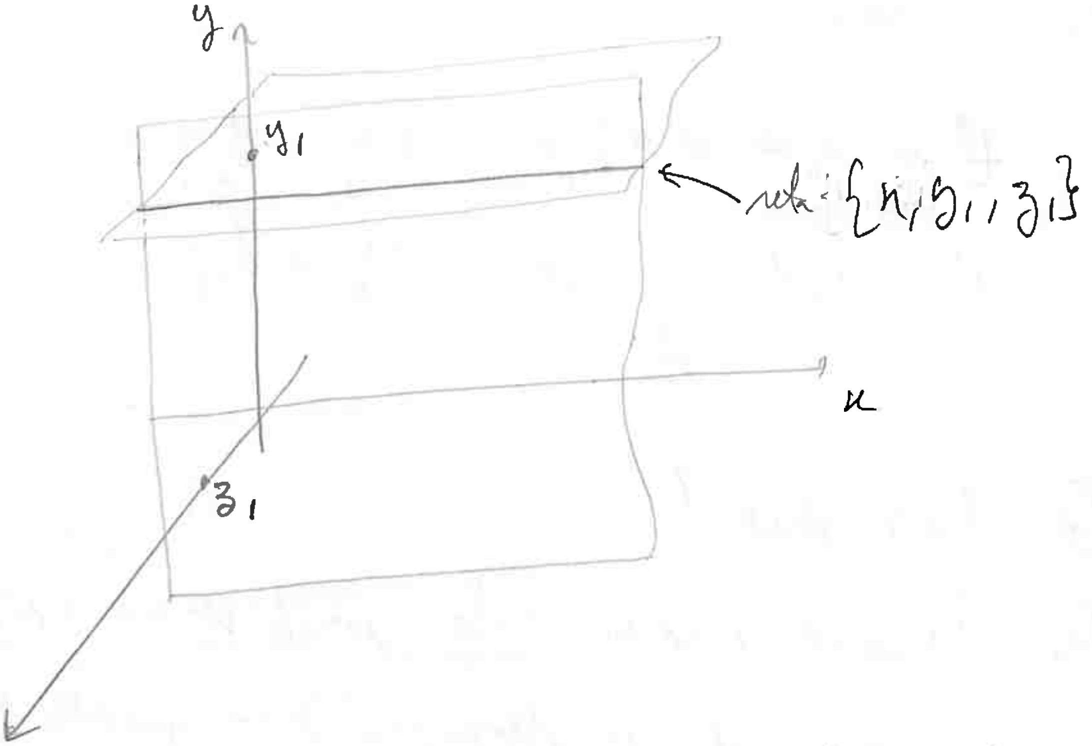
R: Porque movimentos uniformes (não acelerados) devem ser uniformes em qualquer referencial inercial!

* Simetria

Por simplicidade, vamos alinhar os eixos x e x' dos dois referenciais com a direção do movimento relativo, de modo que $\vec{v} = v\,\hat{x}$.



Considere agora as direções perpendiculares ao movimento, ou seja, os planos y_1 e z_1:



Por construção, qualquer movimento uniforme ao longo dessa reta será paralelo a x e x', tanto para S quanto para S'.

A única coisa que poderia mudar, de S para S', seria a distância até ~~esses~~ planos. Ou seja,

$$y' = f(v) \cdot y \qquad z' = f(v) \cdot z$$

Mas agora tome um referencial S'' que se move p/ a esquerda c/ relação a S', com velocidade $-v$

Para S'', temos que $y'' = f(-v) \cdot y' = f(-v) f(v) \cdot y$

Mas é claro que S'' e S são o mesmo referencial, e portanto

$$y = f(-v)\, f(v) \cdot y \implies f(-v)\, f(v) = 1$$

Porém, a direção y é perpendicular a x, então não há diferença entre $+v$ e $-v$, logo

$$f(-v) = f(v) \rightarrow f(v)^2 = 1 \Rightarrow f(v) = \pm 1$$

O sinal $(-)$ é apenas uma inversão do eixo y, que podemos descartar.
Assim, concluímos que

$$y' = y \;,\; z' = z \;!$$

* Finalmente, vamos combinar o resultado acima c/ as nossas equações I e II, e re-escrever:

$$\left.\begin{array}{l} -c^2t^2 + x^2 = -y^2 - z^2 \\ -c^2t'^2 + x'^2 = -y'^2 - z'^2 \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{-c^2t^2 + x^2 = -c^2t'^2 + x'^2}$$

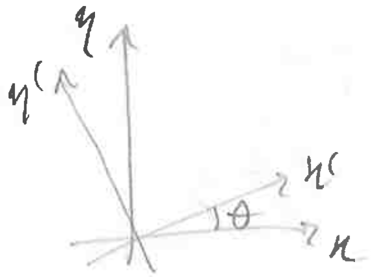
Agora vamos reformular esse problema em termos de algo mais... familiar.

Vamos chamar $c^2t^2 = -\eta^2 \Rightarrow \eta = ict$

$$\Rightarrow \boxed{\eta^2 + x^2 = \eta'^2 + x'^2}$$

Quais as transformações lineares que relacionam η, x com η', x'?

Rotações!



$$x' = x\cos\theta + \eta\,\text{sen}\,\theta$$
$$\eta' = -x\,\text{sen}\,\theta + \eta\cos\theta$$

$$x = x'\cos\theta - \eta'\,\text{sen}\,\theta$$
$$\eta = x'\,\text{sen}\,\theta + \eta'\cos\theta$$

Ok, mas o que seria esse ângulo θ?

Vamos usar a velocidade relativa entre os dois referenciais. Considere um objeto em repouso no ref. S', ou seja, esse objeto tem uma velocidade v no ref. S. Logo:

$$\frac{dx}{d\eta} = \frac{dx}{icdt} = -\frac{i}{c}\frac{dx}{dt} = -i\frac{v}{c} \quad / \quad \frac{dx'}{d\eta'} = -\frac{i}{c}\frac{dx'}{dt'} = 0$$

Pela rotação entre x,η e x',η' temos:

$$dx = dx'\cos\theta - d\eta'\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$d\eta = dx'\,\mathrm{sen}\,\theta + d\eta'\cos\theta$$

$$\Rightarrow -i\frac{v}{c} = \frac{\frac{dx'}{d\eta'}\cdot\cos\theta - \mathrm{sen}\,\theta}{\frac{dx'}{d\eta'}\cdot\mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta} = -\mathrm{tg}\,\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{tg}\,\theta = i\frac{v}{c}}$$

Mas $\mathrm{sen}\,\theta = \dfrac{\mathrm{tg}\,\theta}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\theta}} = \dfrac{iv/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ $\quad \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\theta}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

Assim, chegamos às transf. de Lorentz:

$$x' = x \times \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + ict \times \frac{iv/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(x - \frac{v}{c}\cdot ct\right)$$

$$ict' = -x \times \frac{iv/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + ict \times \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\Rightarrow ct' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(ct - \frac{v}{c}\cdot x\right)$$

$$\Rightarrow \quad x' = \gamma(x - \beta\cdot ct) \qquad \beta = v/c$$

$$ct' = \gamma(ct - \beta\cdot x) \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Note que, usando a fórmula de Euler: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$

$$x' = x\cosh\theta - ct\,\mathrm{senh}\,\theta$$

$$ct' = -x\,\mathrm{senh}\,\theta + ct\cosh\theta \qquad \text{c/ } \tanh\theta = \beta$$

Em geral:

$x^\mu = \{ct, x, y, z\}$
$\mu = \ \ 1\ \ 2\ \ 3$

$$\boxed{x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu}$$