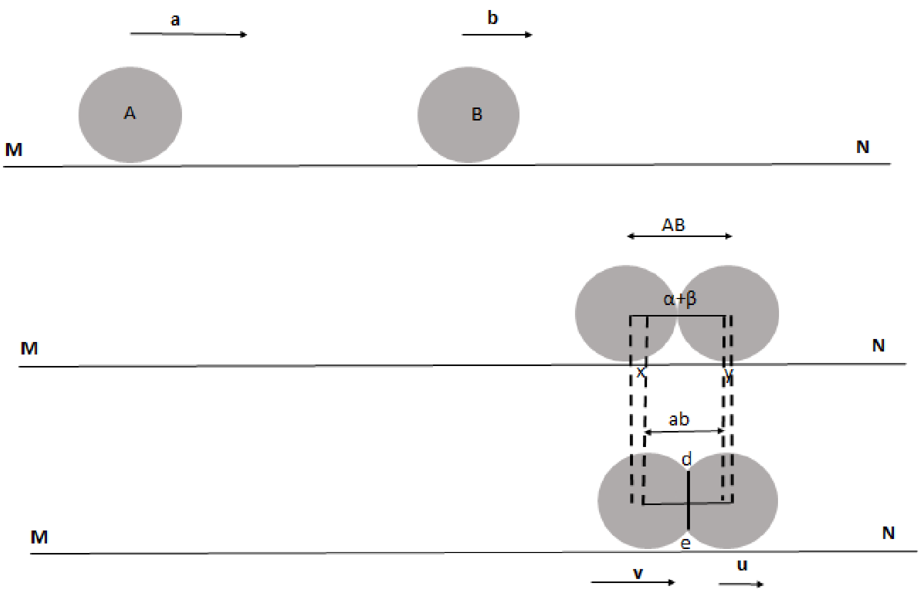
"Investigações sobre a origem das forças", de Leonard Euler

Mem. Acad. Sciences Berlin, 6, 419 (1752)

(tradução livre a partir da versão em R. Bruce Lindsay, Energy: Historical Development of the Concept, Dowden 1975)

.....

35. Independente de considerarmos corpos elásticos ou inelásticos, o cálculo será o mesmo, durante o tempo em que durar o impacto. A Fig. 1 mostra dois corpos esféricos, A e B, que se movem no mesmo sentido ao longo da linha MN. Supõe-se que a velocidade de A seja maior do que a de B, antes da colisão, de maneira que A possa alcançar e chocar-se com B. ...



36. Considere que a velocidade de A antes do impacto seja **a** e que a de B seja **b**, de forma que **a>b.** No instante do impacto, a distância entre os centros dos dois corpos, AB, deverá ser a soma de seus raios. Se fazemos o raio do primeiro corpo, AC, igual a α, e o do segundo corpo, BC, igual a β, termos AB=α+β. Vamos supor que no instante t após o impacto, em que os corpos estão na situação representada na figura por ab, o centro de A tenha se movido uma distância Aa=x e o centro de B tenha se movido uma distância Bb=y. Neste estado a distância entre os centros, ab, torna-se AB+Bb-Aa=α+β+y-x que será menor que α+β por causa da deformação que os corpos sofrem durante a colisão. Teremos então x>y; se fazemos x-y=z, a quantidade z deve medir a quantidade de deformação, ou a diferença entre as distâncias ab e AB.

37. Agora fazemos a suposição que, imediatamente após o impacto, a velocidade de A, em a, torna-se v, e a velocidade de B, em b, torna-se u, e que estas velocidades sejam diferentes de a e b, respectivamente. Supomos também que a velocidade v de A depois do impacto é maior que a velocidade u de B, de forma que os corpos estejam ainda obrigados a agir um sobre o outro para evitar a penetração de um corpo no outro. Considere que a força com que um corpo age sobre o outro seja P. Como o plano de contacto dos dois corpos (de, na Fig1) é perpendicular à linha reta MN, o corpo A em a sofrerá a ação desta força na direção ca, e o corpo B em b sofrerá a ação da mesma força P na direção cb.

38. Como os corpos estão comprimidos um contra o outro pela mesma força P, sua deformação crescerá em proporção à distância entre os centros α+β-z. Após um intervalo de tempo elementar, dt, ficará menor; isto é, α+β--z-dz. A força P deve ter a magnitude exata tal que atuando nos corpos por um intervalo de tempo dt ela reduz a distância entre seus centros para α+β-z-dz....

39. Para encontrar o valor correto da força P, é necessário apenas utilizar os princípios da mecânica. Seja a massa do corpo A igual a A e a do corpo B igual a B. As velocidades u e v sofrerão variações du e dv no intervalo de tempo dt, respectivamente, tal que

$$Adv=-Pdt, \quad Bdu=Pdt.$$

Como o corpo A é puxado para trás pela força, sua velocidade ficará diminuída, e sua diferencial será negativa. Analogamente, a diferencial para B será positiva.

40. Somando as duas equações, encontramos Adv+Bdu=0 de forma que após a integração, obtemos Av+Bu=constante. Essa equação é válida independentemente do valor da força P, até mesmo se esta for indeterminada. A cada instante durante a colisão, a expressão Av+Bu mantém o seu valor e é, portanto, igual ao valor do instante do impacto: Aa+Bb. Temos, assim, a equação Av+Bu=Aa+Bb. Esta representa uma propriedade geral associada a todos os casos de colisão, de acordo com o grande princípio de que o movimento do centro de gravidade comum não se altera através da ação dos corpos que se chocam.

41. A equação Av+Bu=As+Bb não é suficiente para calcular as duas incógnitas u e v. Assim, nos voltamos para as duas equações diferenciais em dv e du. Uma vez que isto envolve a questão de determinar o valor verdadeiro da força P através da utilização da diferencial dz, devemos introduzir as diferenciais de espaço dx e dy tal que dt=dx/v=dy/u. Se substituimos estes valores para dt nas duas equações diferenciais, obtemos

$$Avdv=-Pdx, Budu=Pdy.$$

A partir destas, obtemos as expressões

$$P=-Avdv/dx, \quad P=Budu/dy$$

$$P=-Audv/dy, \quad P=Bvdu/dx.$$

42. Mas estas equações por si mesmas não nos ajudam a calcular P. Para isso, precisamos de outra integral, que obtemos adicionando os dois lados de

$$Avdv=-Pdx \qquad Budu=Pdy$$

para obter

$$Avdv+Budu=-Pdx+Pdy.$$

Como dx-dy=dz, isso fica

$$Avdv+Budu=-Pdz.$$

Se integramos essa equação, obtemos

$$Avv+Buu=constante-2\int Pdz.$$

Como no instante do impacto z=0, v=a e u=b, podemos escrever

$$Avv+Buu=Aaa+Bbb-2\int Pdz.$$