

PMR-2360 - Controle e Automação I

Gabarito da 1a. Prova - 02 de Outubro de 2007

Duração da prova - 90 minutos

[Q. 1] (10.0pt) O Sistema de Posicionamento de *Azimuth* (movimento lateral) de uma antena parabólica está representado na Figura 1-b. O diagrama esquemático do sistema está representado na Figura 1-c

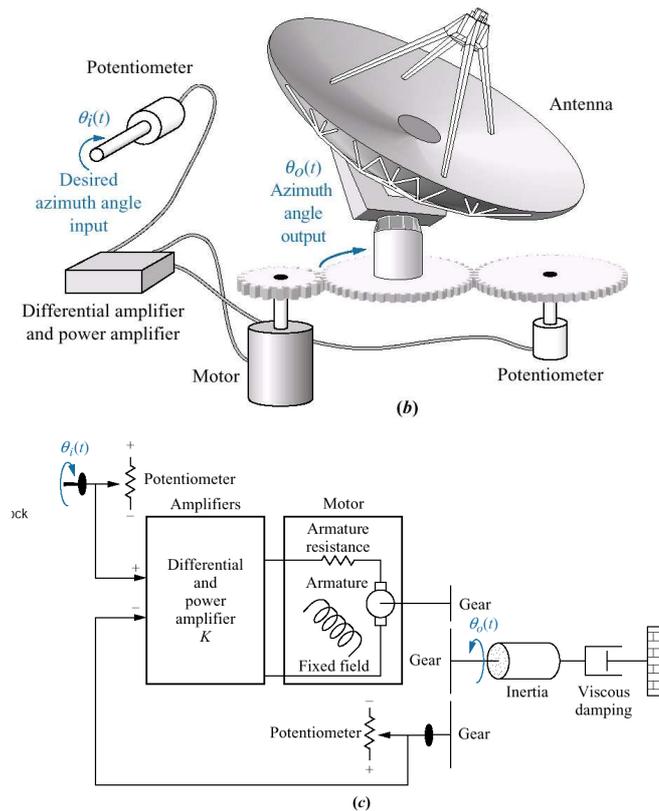


Figura 1: Sistema de posicionamento de antena parabólica.

Podemos identificar cinco subsistemas básicos: O Potenciômetro de Entrada que converte posição angular em tensão, O Pré-Amplificador que implementa um somador através de uma configuração diferencial, o Amplificador de Potência, o Motor de Corrente Contínua (em conjunto com a carga e o sistema de engrenagens) e o Potenciômetro de Saída que também converte posição angular em tensão. A Figura 2 detalha cada sub-sistema, evidenciando as variáveis de entrada e saída. A Tabela a seguir resume os diversos sub-sistemas e suas respectivas variáveis de entrada e saída.

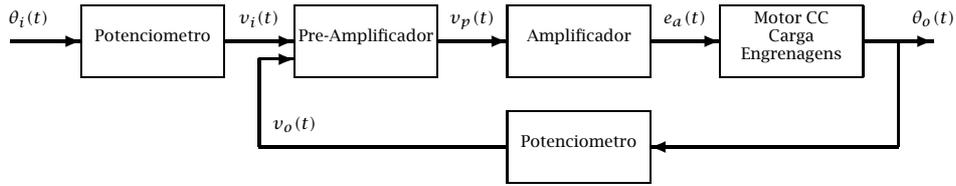


Figura 2: Sub-sistemas e variáveis de entrada e saída.

| Sub-sistema | Entrada | Saída |
|--------------------------|--|---|
| Potenciômetro de Entrada | Posição angular de referência $\theta_i(t)$ | Tensão para o Pré-Amplificador $v_i(t)$ |
| Pré-Amplificador | Tensão dos Potenciômetros $v_e(t) = v_i(t) - v_o(t)$ | Tensão para o Amplificador de Potência $v_p(t)$ |
| Amplificador de Potência | Tensão do Pré-Amplificador $v_p(t)$ | Tensão para o motor $e_a(t)$ |
| Motor CC | Tensão do Amplificador de Potência $e_a(t)$ | Posição angular da carga $\theta_o(t)$ |
| Potenciômetro de saída | Posição angular da carga $\theta_o(t)$ | Tensão para o Pré-Amplificador $v_o(t)$ |

- A função de transferência do Potenciômetro de Entrada e Saída é dada por:

$$\frac{V_i(s)}{\Theta_i(s)} = \frac{V_o(s)}{\Theta_o(s)} = \frac{1}{\pi}. \quad (1)$$

- O Pré-Amplificador é realizado por um esquema de amplificador diferencial onde amplifica-se a tensão $v_e(t) = v_i(t) - v_o(t)$. A sua função de transferência é dada por:

$$\frac{V_p(s)}{V_e(s)} = K. \quad (2)$$

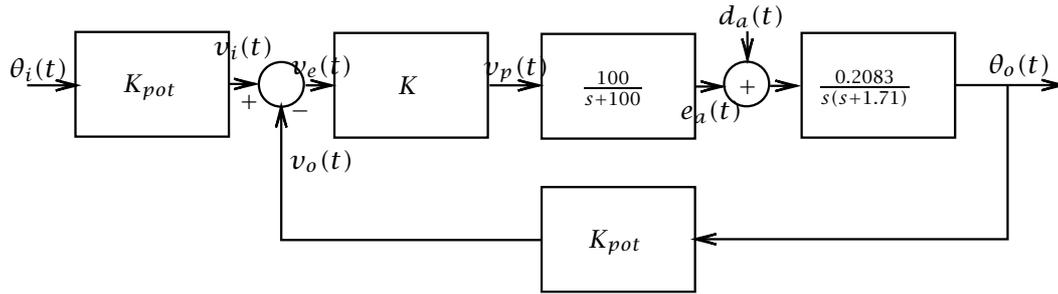
- O Amplificador de Potência pode ser representado por:

$$\frac{E_a(s)}{V_p(s)} = \frac{100}{s + 100}. \quad (3)$$

- O Motor de Corrente Contínua, Carga e Engrenagens podem ser representados por:

$$\frac{\Theta_o(s)}{E_a(s)} = \frac{0.2083}{s(s + 1.71)}. \quad (4)$$

(a) (2.0pt) Esboce o diagrama de blocos do sistema de controle em malha fechada evidenciando cada subsistema e a função de transferência correspondente. Considere uma segunda entrada no sistema correspondente a um distúrbio de torque $d_a(t)$ ($D_a(s)$) na variável de Laplace).



(b) (1.0pt) Escreva a função de transferência em malha fechada $\Theta_o(s) = f(\Theta_i(s), D_a(s))$, ou seja, a variável de saída $\Theta_o(s)$ em função das duas entradas $\Theta_i(s)$ e $D_a(s)$.

SOLUÇÃO:

A função de transferência do sistema em malha fechada possui duas partes, uma relativa a $\Theta_i(s)$ e outra relativa a $D_a(s)$. Sabemos que devido a linearidade do sistema podemos calcular as partes separadamente.

i. Para $D_a(s) \equiv 0$, obtemos:

Vamos inicialmente definir:

$$H(s) = K \frac{100}{(s + 100)}, \quad (5)$$

$$G(s) = \frac{0.2083}{s(s + 1.71)}. \quad (6)$$

Desta forma:

$$\frac{\Theta_o(s)}{V_e(s)} = H(s)G(s) = K \frac{100}{(s + 100)} \frac{0.2083}{s(s + 1.71)}, \quad (7)$$

Também,

$$V_e(s) = (\Theta_i(s) - \Theta_o(s))K_{pot}. \quad (8)$$

Substituindo a Equação 8 na Equação 7 obtemos:

$$\frac{\Theta_o(s)}{\Theta_i(s) - \Theta_o(s)} = K_{pot}G(s)H(s) \Rightarrow \quad (9)$$

$$\Theta_o(s)(1 + K_{pot}G(s)H(s)) = K_{pot}G(s)H(s)\Theta_i(s) \Rightarrow \quad (10)$$

$$\frac{\Theta_o(s)}{\Theta_i(s)} = \frac{K_{pot}G(s)H(s)}{1 + K_{pot}G(s)H(s)} = \frac{6.63K}{s^3 + 101.71s^2 + 171s + 6.63K}. \quad (11)$$

ii. Para $\Theta_i(s) \equiv 0$:

As seguintes equações podem ser descritas:

$$\Theta_o(s) = G(s)[E_a(s) + D_a(s)], \quad (12)$$

$$E_a(s) = H(s)V_e(s), \quad (13)$$

$$V_e(s) = -K_{pot}\Theta_o(s). \quad (14)$$

Manipulando tais equações acima, podemos obter:

$$\frac{\Theta_o(s)}{D_a(s)} = \frac{G(s)}{1 + K_{pot}G(s)H(s)}. \quad (15)$$

Substituindo valores adequados:

$$\frac{\Theta_o(s)}{D_a(s)} = \frac{G(s)}{1 + K_{pot}G(s)H(s)}, \quad (16)$$

$$= \frac{\frac{0.2083}{s(s+1.71)}}{1 + K \frac{100}{(s+100)} \frac{0.2083}{s(s+1.71)} \frac{1}{\pi}}, \quad (17)$$

$$= \frac{0.2083s + 20.83}{s^3 + 101.71s^2 + 171s + 6.63K}. \quad (18)$$

Finalmente, podemos escrever a função de transferência total:

$$\Theta_o(s) = \frac{6.63K}{s^3 + 101.71s^2 + 171s + 6.63K} \Theta_i(s) + \frac{0.2083s + 20.83}{s^3 + 101.71s^2 + 171s + 6.63K} D_a(s). \quad (19)$$

(c) (2.0pt) Para quais valores de K o sistema é estável ?

SOLUÇÃO:

Partindo da equação característica do sistema em malha fechada deduzida no item anterior:

$$s^3 + 101.71s^2 + 171s + 6.63K, \quad (20)$$

e aplicando o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz podemos obter a estabilidade do sistema em função de K .

$$s^3 \quad \quad \quad 1 \quad \quad \quad 171$$

$$s^2 \quad \quad \quad 101.71 \quad \quad \quad 6.63K$$

$$s^1 \quad \quad \quad \frac{171 \times 101.71 - 1 \times 6.63K}{101.71} = A \quad \quad \quad 0$$

$$s^0 \quad \quad \quad \frac{A \times 6.63K - 101.71 \times 0}{A} = 6.63K$$

Para que o sistema seja estável, a primeira coluna da tabela não pode mudar de sinal. Desta forma, obtemos duas condições para K .

i. s^1 :

$$A = 171 - 0.0652K > 0 \Rightarrow -0.0652K > -171 \Rightarrow \quad (21)$$

$$0.0652K < 171 \Rightarrow K < 2622.7. \quad (22)$$

ii. s^0

$$6.63K > 0 \Rightarrow K > 0. \quad (23)$$

Desta forma, Para o sistema ser estável é necessário que:

$$0 < K < 2622.7 \quad (24)$$

- (d) (2.0pt) Para o sistema de controle em malha fechada a utilização do ganho do Pré-Amplificador K como controlador $H(s)$ é suficiente para garantir erro estacionário nulo, $e_{ss} = 0$, simultaneamente para entrada degrau $\Theta_i(s) = A/s$ e distúrbio degrau $D_a(s) = B/s$? Prove matematicamente.

SOLUÇÃO:

Podemos obviamente calcular as duas partes separadamente.

- i. Para $\Theta_i(s) = A/s$ e $D_a(s) \equiv 0$:

No caso deste sistema, o erro é dado por:

$$V_e(s) = (\Theta_i(s) - \Theta_o(s))K_{pot}, \quad (25)$$

e também,

$$\Theta_o(s) = G(s)H(s)V_e(s). \quad (26)$$

Logo,

$$\frac{V_e(s)}{\Theta_i(s)} = \frac{K_{pot}}{1 + K_{pot}G(s)H(s)}. \quad (27)$$

Supondo que a entrada a degrau é dada por : $\Theta_i(s) = A/s$ então:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} v_e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sV_e(s) = s \frac{0.3183}{1 + 0.3183K \frac{100}{(s+100)} \frac{0.2083}{s(s+1.71)}} \frac{A}{s} \Rightarrow \quad (28)$$

$$= \frac{0.3183(s+100)(s+1.71)s}{(s+100)(s+1.71)s + 6.63K} A = 0 \quad (29)$$

Ou seja, o controlador $H(s) = K$ é suficiente para fazer com o erro estacionário $e_{ss}(s)$ para entrada degrau $\Theta_i(s) = A/s$ seja nulo.

- ii. Para $\Theta_i(s) \equiv 0$ e $D_a(s) = B/s$:

Partindo das seguintes equações abaixo:

$$\Theta_o(s) = G(s)(H(s) + D_a(s)), \quad (30)$$

$$V_e(s) = -K_{pot}\Theta_o(s). \quad (31)$$

Podemos então escrever a função de transferência desejada como:

$$\frac{V_e(s)}{D_a(s)} = -\frac{K_{pot}G(s)}{1 + K_{pot}G(s)H(s)}, \quad (32)$$

$$= \frac{0.0663s + 6.63}{s^3 + 101.71s^2 + 171s + 6.63K} \quad (33)$$

Supondo que a entrada a degrau é dada por : $D_a(s) = B/s$ então:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} v_e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sV_e(s) = s \frac{0.0663s + 6.63}{s^3 + 101.71s^2 + 171s + 6.63K} \frac{B}{s} \Rightarrow \quad (34)$$

$$= \frac{6.63B}{6.63K}, \quad (35)$$

$$= \frac{B}{K} \neq 0. \quad (36)$$

Ou seja, o controlador $H(s) = K$ não consegue fazer com que o erro estacionário $e_{ss}(s)$ para distúrbio do tipo degrau $\Theta_i(s) = B/s$ seja nulo.

Concluimos que o controlador $H(s) = K$ não consegue eliminar o erro estacionário simultaneamente para $\Theta_i(s) = A/s$ e $D_a(s) = B/s$.

(e) (3.0pt) Deseja-se projetar um sistema de controle $H(s) = K$ (ou seja, utilizando o ganho do Pré Amplificador) para o sistema acima. Entretanto, após alguns ensaios descobriu-se que na realidade o Motor de Corrente Contínua possui variação paramétrica. A sua função de transferência pode ser descrita por:

$$\frac{\Theta_o(s)}{E_a(s)} = \frac{0.2083}{s(s+b)}, \quad (37)$$

tal que $b \in [1.71, 2.71]$

As especificações do sistema de controle são dadas por:

- Erro estacionário nulo, $e_{ss} = 0$, para entrada degrau $\Theta_i(s) = A/s$,
- Tempo de assentamento $t_s < 10seg$,
- Máximo sobresinal $M_p < 5\%$.

Sabemos pelo item anterior, que o erro estacionário e_{ss} a degrau é nulo utilizando o controlador $H(s) = K$.

i. (1.0pt) Identifique o Lugar Geométrico no plano s aonde residem os pólos do sistema de 2a. ordem padrão:

$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (38)$$

que satisfazem as condições de tempo de assentamento t_s e máximo sobresinal M_p dadas acima.

SOLUÇÃO:

O tempo de assentamento t_s (critério de 2%) é dado aproximadamente por:

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n},$$

como deseja-se que $t_s < 4seg$ então:

$$t_s < 10seg \Rightarrow$$

$$\frac{4}{\zeta\omega_n} < 10 \Rightarrow$$

$$\zeta\omega_n > 0.4.$$

como $\sigma = \zeta\omega_n$ então:

$$\sigma > 0.4.$$

Para o máximo sobresinal devemos ter:

$$\begin{aligned} M_p &< 5\% \\ M_p &= \exp\left(-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi\right) < 0.05 \Rightarrow \\ \frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} &< -2.99 \quad (\times -1) \Rightarrow \\ \frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} &> 2.99 \Rightarrow \\ \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} &> 0.95 \Rightarrow \\ \zeta^2 &> 0.48 \Rightarrow \\ \zeta^2 - 0.48 &> 0. \end{aligned}$$

o que resulta em $\zeta < -0.69$ e $\zeta > 0.69$. Entretanto, sabemos que necessariamente $\zeta > 0$ então ficamos somente com $\zeta > 0.69$. Sabemos que:

$$\cos \beta = \zeta,$$

onde β é o ângulo descrito por uma reta que cruza o pólo complexo e a origem do sistema de coordenadas e o eixo real (contado a partir do sentido anti-horário). Para

$$\boxed{\zeta = 0.69 \Rightarrow \beta = 0.8092 \text{ rad} = 46.37^\circ}$$

Então, como:

$$\zeta > 0.69 \Rightarrow$$

$$\beta < 46.37^\circ.$$

O lugar geométrico no plano s onde estão as raízes do sistema em malha fechada que satisfazem as especificações de $t_s < 10 \text{ seg}$ e $M_p < 0.05$ é dado pela intersecção das seguintes regiões:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma > 0.4 \\ \text{e} \\ \beta < 46.37^\circ. \end{array} \right.$$

A Figura 3 ilustra o lugar geométrico definido por estas condições.

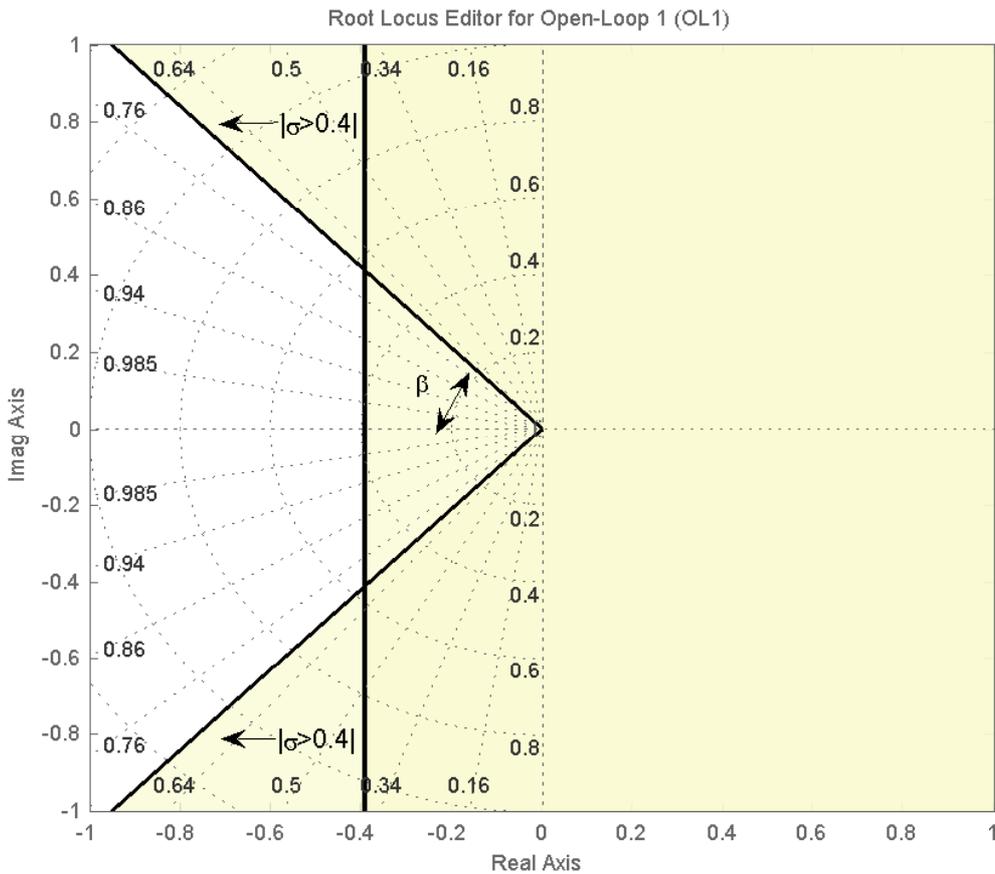


Figura 3: Lugar geométrico aonde estão localizados os pólos desejados para o sistema de segunda ordem padrão.

ii. (2.0pt) Calcule a faixa de valores de K que satisfazem as especificações acima.

DICAS:

- Utilize o Lugar das Raízes,
- Para tal, considere que a função de transferência do amplificador possa ser desprezada pois o seu pólo é bastante rápido, ou seja, $\frac{E_a(s)}{V_p(s)} = \frac{100}{s+100} \approx 1$.

SOLUÇÃO:

Desprezando o pólo mais rápido $s = 100$ a malha aberta se torna:

$$G(s)H(s) = K \frac{6.6302}{s(s + b)}, \tag{39}$$

onde $b \in [1.71, 2.71]$.

O problema pode ser resolvido fazendo o Lugar das Raízes para os valores extremos do parâmetro b , ou seja, para $b = 1.71$ e $b = 2.71$. Para cada um destes dois valores de b , devemos determinar qual a faixa de variação do ganho K que satisfaz as condições desejadas, e a resposta final corresponde a intersecção destas duas faixas.

A. Vamos começar por $b = 1.71$:

Para este caso, o Lugar das Raízes, juntamente com o lugar geométrico contendo as restrições desejadas se encontra ilustrado na Figura 4.

Devemos observar que o fato de existir a condição que $|\sigma| > 0.4$ implica que não podem haver pólos de malha fechada na região definida por $-1.71 < \sigma < -1.31$. Desta forma, os pontos que representam as extremidades, correspondentes a faixa de valores de K que satisfazem as condições, estão representados na figura pelos pontos A_1 , A'_1 , B_1 e B'_1 . Os pontos A_1 e A'_1 se referem a pólos que são raízes do mesmo polinômio, logo eles devem corresponder ao mesmo valor do ganho K . O mesmo vale para os pontos B_1 e B'_1 .

Podemos determinar graficamente qual o valor dos pontos A_1 , A'_1 , B_1 e B'_1 e depois algebricamente descobrir o valor do ganho correspondente pela condição do módulo $|G(s)H(s)| = 1$.

Em resumo temos:

Tabela 1: Pontos, Pólos e Ganho do Controlador K para $b = 1.71$.

| Ponto | $\sigma + j\omega$ | K |
|--------|--------------------|------|
| A_1 | $-1.31 + j0$ | 2.5 |
| A'_1 | $-0.4 + j0$ | 2.5 |
| B_1 | $-0.855 - j0.891$ | 7.32 |
| B'_1 | $-0.855 + j0.891$ | 7.32 |

Logo, a faixa de valores para $b = 1.71$ corresponde a $2.5 < K < 7.32$.

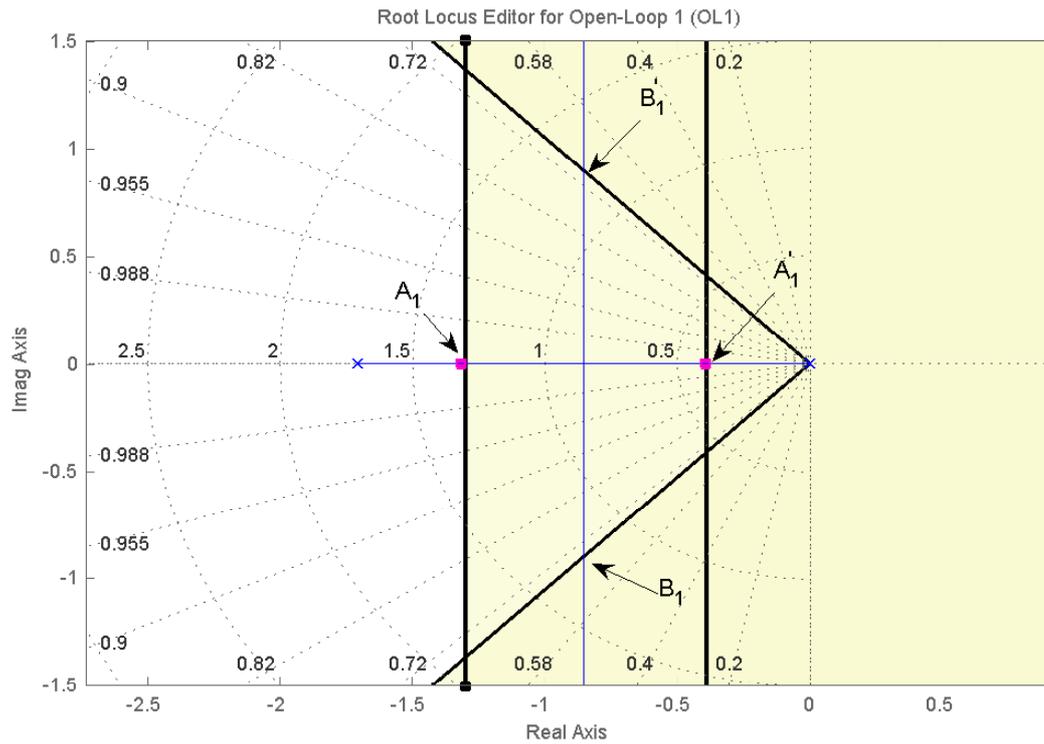


Figura 4: Lugar das Raízes e Lugar Geométrico para $b = 1.71$.

B. Fazemos o mesmo para $b = 2.71$:

A Figura 5 ilustra o Lugar das Raízes em conjunto com o lugar geométrico que satisfazem as condições desejadas.

Os pontos que representam as extremidades correspondentes a faixa de valores de K que satisfazem as condições estão representadas na figura pelos pontos A_2 , A'_2 , B_2 e B'_2

Em resumo temos:

Tabela 2: Pontos, Pólos e Ganho do Controlador K para $b = 2.71$.

| Ponto | $\sigma + j\omega$ | K |
|--------|--------------------|------|
| A_1 | $-2.31 + j0$ | 4.4 |
| A'_1 | $-0.4 + j0$ | 4.4 |
| B_1 | $-1.35 - j1.44$ | 18.6 |
| B'_1 | $-1.35 + j1.44$ | 18.6 |

Logo, a faixa de valores para $b = 2.71$ corresponde a $4.4 < K < 18.6$.

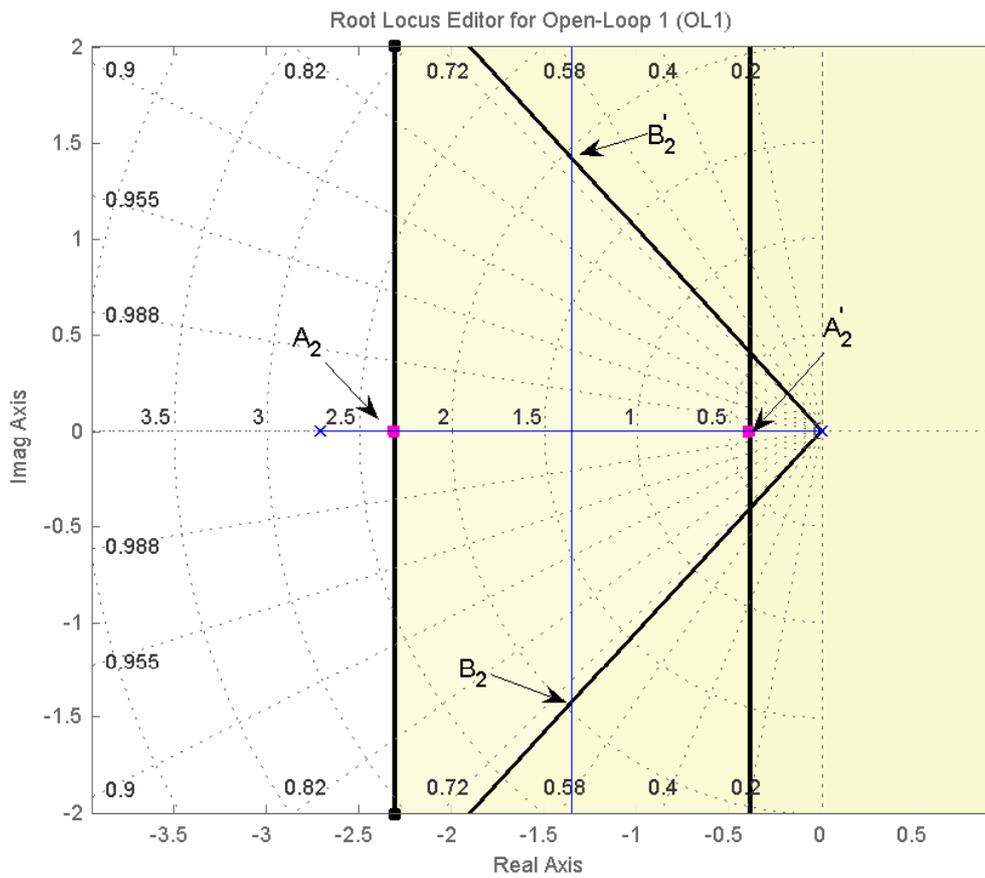


Figura 5: Lugar das Raízes e Lugar Geométrico para $b = 2.71$.

Calculando a interseção da faixa dos valores de K para $b = 1.71$ e $b = 2.71$ obtemos:

$$4.4 < K < 7.32.$$

(40)