PMR3404 Controle I

Aula 5

Exemplos

Projetos de controladores PID

Newton Maruyama

4 de abril de 2017

PMR-EPUSP

Conteúdo

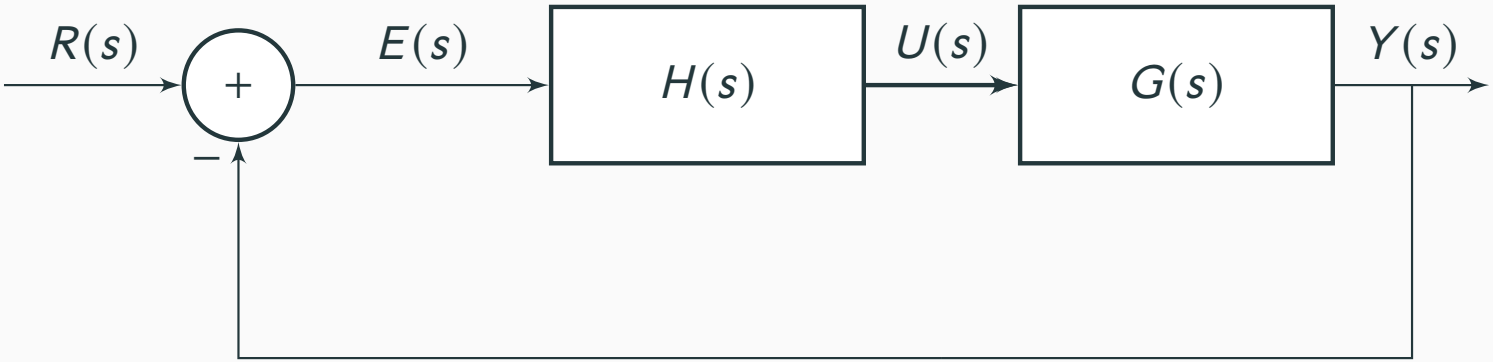
1. Exemplos de Projetos

Exemplos de Projetos

Exemplo 1: Sistema de 2a. ordem

- Deseja-se projetar um controlador $H(s)$ para o sistema ilustrado abaixo onde a planta é dada por:

$$G(s) = \frac{0.5}{s(s+3)}.$$



Exemplo 1 : Requisitos

- O controlador $H(s)$ deve ser tal que garanta as seguintes especificações:
  1. Erro estacionário $e_{ss} = 0$ para entrada a degrau;
  2. Tempo de assentamento $t_s < 4seg$ (critério de 2%);
  3. Máximo sobresinal $M_p < 5\%$.

Qual controlador ?

- O primeiro passo para o projeto é a escolha da estrutura do controlador (P, PI, PD, PID, etc.).
- Sabemos que para satisfazer a condição do erro estacionário e_{ss} basta utilizar um controlador proporcional $H(s) = K_p$ já que o sistema $G(s)$ já possui um integrador $1/s$.

Erro estático

- Podemos calcular o erro estacionário através da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) &= \lim_{s\to 0} sE(s), \\
&= \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+G(s)H(s)}R(s), \\
&= \lim_{s\to 0} s\frac{s(s+3)}{s(s+3)+0.5K_p}\frac{1}{s}, \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{s(s+3)}{s(s+3)+0.5K_p}, \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

- Concluímos então que o erro estacionário e_{ss} é nulo para uma entrada degrau caso seja adotado um controlador proporcional.

- Agora devemos escolher K_p de tal forma que satisfaça as condições do tempo de assentamento t_s e do máximo sobresinal M_p.
- Para um controlador $H(s) = K_p$, a função de transferência do sistema de controle em malha fechada pode ser escrito como:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{0.5K_p}{s^2 + 3s + 0.5K_p},$$

- o que é equivalente ao sistema de 2a. ordem padrão:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}.$$

- Para um sistema de 2a. ordem padrão as especificações transitórias de máximo sobresinal M_p e do tempo de assentamento t_s estabelecem um lugar geométrico no plano s.
- O tempo de assentamento t_s (critério de 2%) é dado aproximadamente por:

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n},$$

- Como deseja-se que $t_s < 4seg$ então:

$$
\begin{aligned}
&t_s < 4seg \Rightarrow \\
&\frac{4}{\zeta\omega_n} < 4 \Rightarrow \\
&\zeta\omega_n > 1.
\end{aligned}
$$

- como $\sigma = \zeta\omega_n$ então:

$$\sigma > 1.$$

- Para o máximo sobresinal devemos ter:

$$M_p < 5\% \Rightarrow \tag{1}$$

$$M_p = \exp^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi} < 0.05 \Rightarrow \tag{2}$$

$$\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} < -2.99 \quad (\times -1) \Rightarrow \tag{3}$$

$$\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} > 2.99 \Rightarrow \tag{4}$$

$$\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} > 0.95 \Rightarrow \tag{5}$$

$$\zeta^2 > 0.48 \Rightarrow \tag{6}$$

$$\zeta^2 - 0.48 > 0. \tag{7}$$

- o que resulta em $\zeta < -0.69$ e $\zeta > 0.69$. Entretanto, sabemos que necessariamente $\zeta > 0$ então ficamos somente com $\zeta > 0.69$.
- Sabemos que:

$$\cos\beta = \zeta,$$

  onde β é o ângulo descrito por uma reta que cruza o pólo complexo e a origem do sistema de coordenadas e o eixo real (contado a partir do sentido anti-horário)
- Para $\boxed{\zeta = 0.69 \Rightarrow \beta = 0.8092 rad = 46.37^o}$.
- Então, como:

$$\zeta > 0.69 \Rightarrow$$
$$\beta < 46.37^o.$$

O lugar geométrico no plano s onde estão as raízes do sistema em malha fechada que satisfazem as especificações de $t_s < 4seg$ e $M_p < 0.05$ é dado pela intersecção das seguintes regiões:

$$\begin{cases} \sigma > 1 \\ \text{e} \\ \beta < 46.37^o. \end{cases}$$

A Figura 1 ilustra o lugar geométrico definido por estas condições.

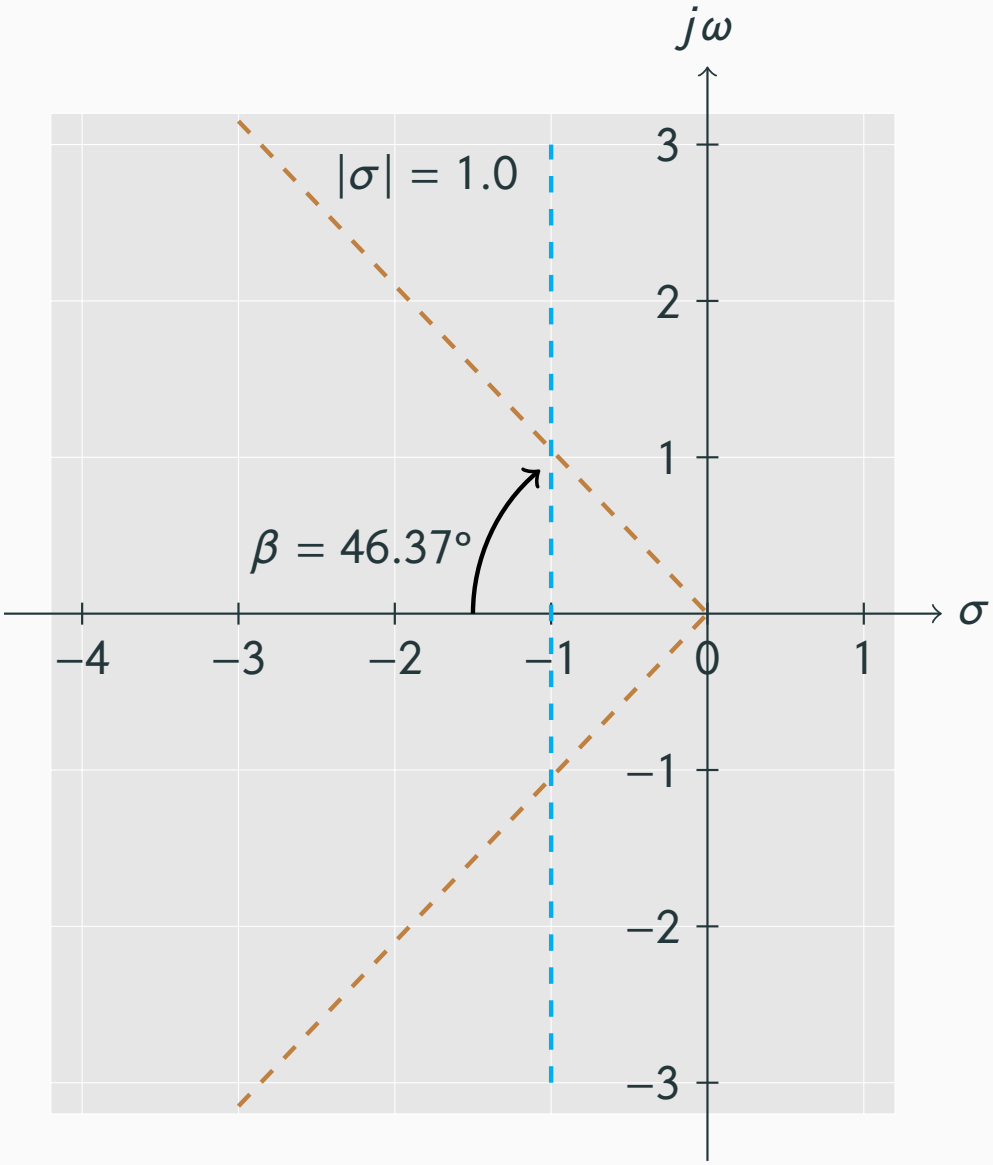
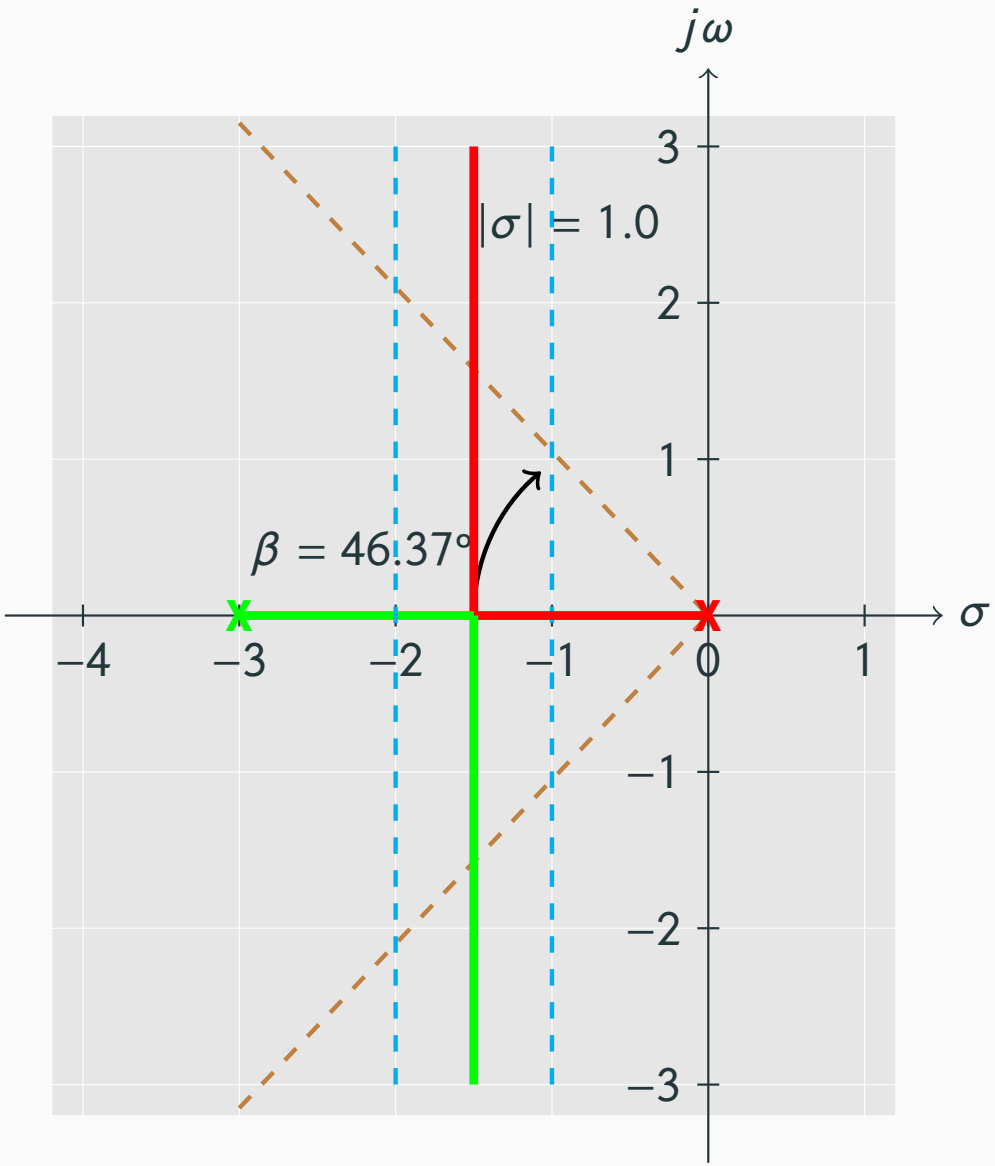


Figura 1: Lugar geométrico resultante de $t_s < 4seg$ e $M_p < 5\%$.

- O lugar geométrico definido acima, define uma região no plano s, tal que a ocorrência dos pólos do sistema de 2a. ordem padrão nesta região, define um sistema que satisfaz as especificações de tempo de assentamento t_s e máximo sobresinal M_p.
- Se pudermos simultaneamente definir o valor do coeficiente de amortecimento ζ e da freqüência natural não amortecida ω_n, podemos alocar os pólos em qualquer local.
- Entretanto, para o nosso sistema, só podemos variar o ganho K_p, o que limita a região possível para se alocar os pólos.
- Desta forma, os possíveis valores para os pólos que satisfazem as especificações compreeendem a intersecção entre o lugar geométrico definido acima e o lugar das raízes do sistema.

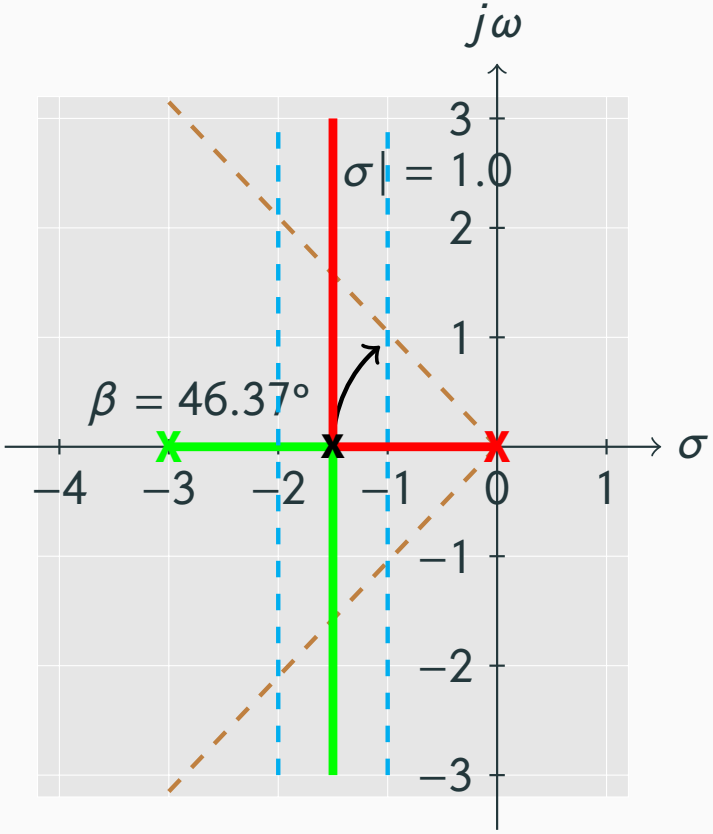
- A Figura abaixo ilustra o lugar geométrico e o lugar das raízes do sistema em função de K_p.



- Através do grafico ilustrado na Figura podemos escolher um pólo do sistema e consequentemente calcular o valor de K_p associado.
- **Qualquer pólo ?** Lembre-se que podemos escolher qualquer pólo, desde que o pólo associado também pertença a região que permitida.
- Desta forma, o trecho do lugar das raízes $[-3, 2]$ não pode ser escolhido já que a escolha do pólo neste trecho implica em escolher o outro pólo associado no trecho $[-1, 0]$ que não pertence à região permitida.

- Por exemplo, podemos escolher o pólo duplo $s = -1.5$. Utilizando a condição de módulo, obtemos:

$$
\begin{aligned}
&|G(s)H(s)| = 1 \Rightarrow \\
&\left|\frac{K_p 0.5}{s(s+3)}\right| = 1 \Rightarrow \\
&K_p = \left.\frac{|s||s+3|}{0.5}\right|_{s=-1.5} \Rightarrow \\
&K_p = \frac{|-1.5||-1.5+3|}{0.5} \Rightarrow \\
&K_p = 4.5
\end{aligned}
$$



- Com esta escolha de $K_p = 4.5$ o sistema de controle em malha fechada pode ser escrito como:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{2.25}{s^2 + 3s + 2.25}.$$

onde $\zeta = 1$ e $\omega_n = 1.5$.

- A resposta a degrau do sistema em malha fechada é ilustrado na Figura **??**. Podemos observar que o tempo de assentamento $t_s = 3.88seg$ e o máximo sobresinal $M_p = 0\%$.
- Se calcularmos o tempo de assentamento t_s pela equação padrão obtemos:

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 2.67seg.$$

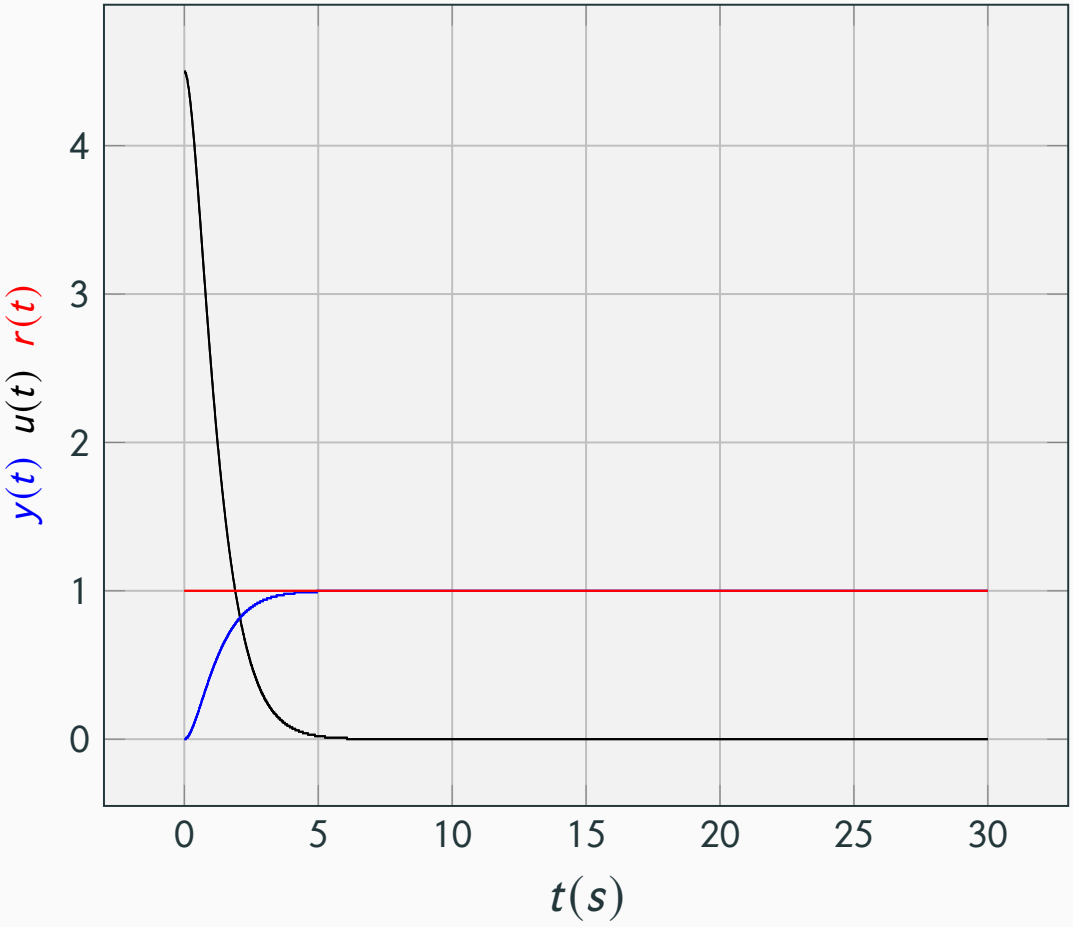


Figura 2: Resposta a degrau do sistema

Exemplo 2

- Deseja-se projetar um controlador $H(s)$ para um sistema onde a planta é dada por:

$$G(s) = \frac{0.5}{(s+3)}.$$

- O controlador $H(s)$ deve ser tal que garanta as seguintes especificações:
  1. Erro estacionário $e_{ss} = 0$ para entrada a degrau;
  2. Tempo de assentamento $t_s < 4seg$ (critério de 2%);
  3. Máximo sobresinal $M_p < 5\%$.

Escolha do controlador

- O primeiro passo para o projeto é a escolha da estrutura do controlador (P, PI, PD, PID, etc.).
- Sabemos que para satisfazer a condição do erro estacionário e_{ss} é necessário a inserção de um integrador $1/s$ em malha aberta já que o sistema $G(s)$ é um sistema de 1a. ordem.
- Desta forma, vamos escolher um controlador proporcional-integral PI:

$$H(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right).$$

Erro estático

- Podemos calcular o erro estacionário através da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) &= \lim_{s\to 0} sE(s), \\
&= \lim s \frac{1}{1+G(s)H(s)} R(s), \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{T_i s(s+3)}{T_i s(s+3) + 0.5K_p(T_i s+1)}, \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{0}{0+0.5K_p} = 0.
\end{aligned}
$$

- Concluímos então que o erro estacionário e_{ss} é nulo para uma entrada degrau caso seja adotado um controlador PI.

- Para este caso, a função de transferência em malha aberta é dada por:

$$G(s)H(s) = K_p \frac{0.5(T_i s + 1)}{T_i s(s + 3)},$$

- Os pólos e o zero em malha aberta são dados por:
  - pólos em malha aberta: $s = 0$, $s = -3$;
  - zero em malha aberta: $s = -1/T_i$.

- A função de transferência do sistema de controle em malha fechada é dada por:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{0.5K_p(T_i s + 1)}{T_i s(s+3) + 0.5K_p(T_i s + 1)}$$
$$= \frac{0.5K_p T_i (s + \frac{1}{T_i})}{s^2 + (3 + 0.5K_p)s + \frac{0.5K_p}{T_i}}.$$

- A adição de um zero em malha aberta pode provocar uma mudança significativa de comportamento do sistema em relação ao sistema de 2a. ordem padrão.
- Desta forma, não podemos utilizar as equações para o tempo de subida t_r, tempo de assentamento t_s, instante do pico t_p e o máximo sobresinal M_p de maneira precisa.
- Muitas vezes, para efeito de projeto utilizamos as equações do sistema padrão, mas devemos nos lembrar que o efeito do zero adicional pode ser significativo.

- O controlador PI possui dois parâmetros, o ganho proporcional K_p e o tempo integral T_i.
- O lugar das raízes é obviamente construído em função de um único parâmetro.
- Desta forma, vamos escolher um valor para T_i e construir o lugar das raízes em função de K_p.

Qual o valor de T_i que devemos escolher ?

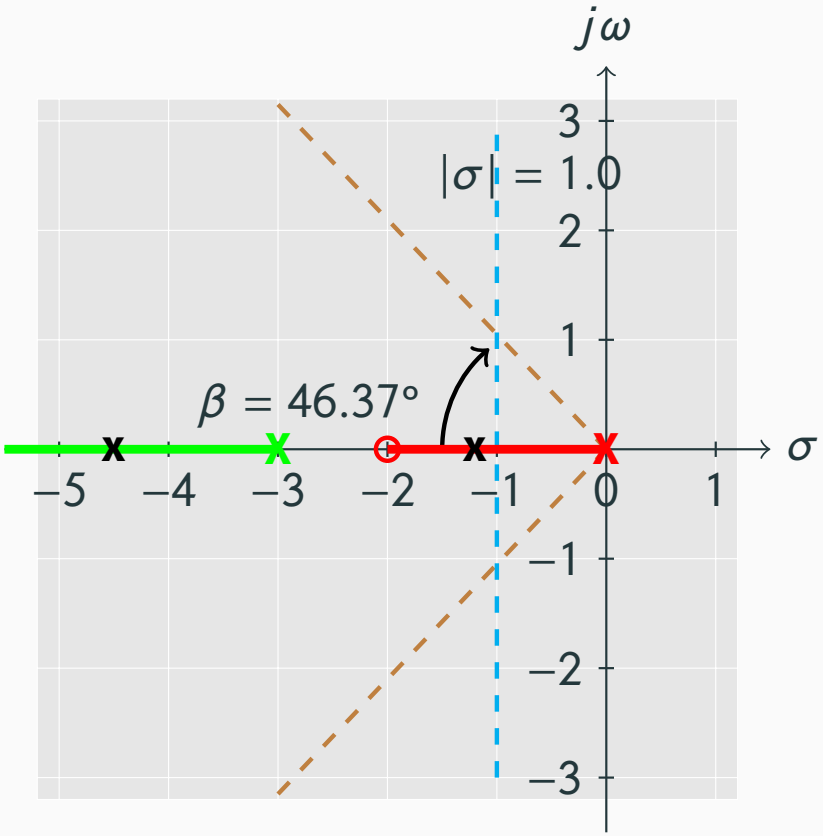
- Para mostrar como a escolha de T_i influencia a solução para este problema vamos escolher dois valores para T_i e construir o lugar das raízes para estes valores.

Escolha 1

- Vamos escolher inicialmente fazer $T_i = 0.5$. Com esta escolha o zero $s = -1/T_i$ estará entre os dois pólos de malha aberta.
- Para este caso, a malha aberta pode ser escrita como:

$$G(s)H(s) = \frac{0.25s + 0.5}{0.5s^2 + 1.5s}$$

- O lugar das raízes para este sistema ./Figuras ilustrado na Figura **??**



- Vamos escolher no lugar das raízes o ponto $s = -1.2$ que resulta no valor de $K_p = 5.5$. A outra raiz correspondente a $K_p = 5.5$ é $s = -4.54$.
- O sistema de controle em malha fechada pode ser escrito como:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1.375s + 2.75}{s^2 + 5.75s + 5.5}.$$

- A resposta a degrau para este sistema é ilustrada na Figura abaixo. Note que o tempo de acomodação $t_s = 2.72seg$ e o máximo sobresinal $M_p = 0\%$.

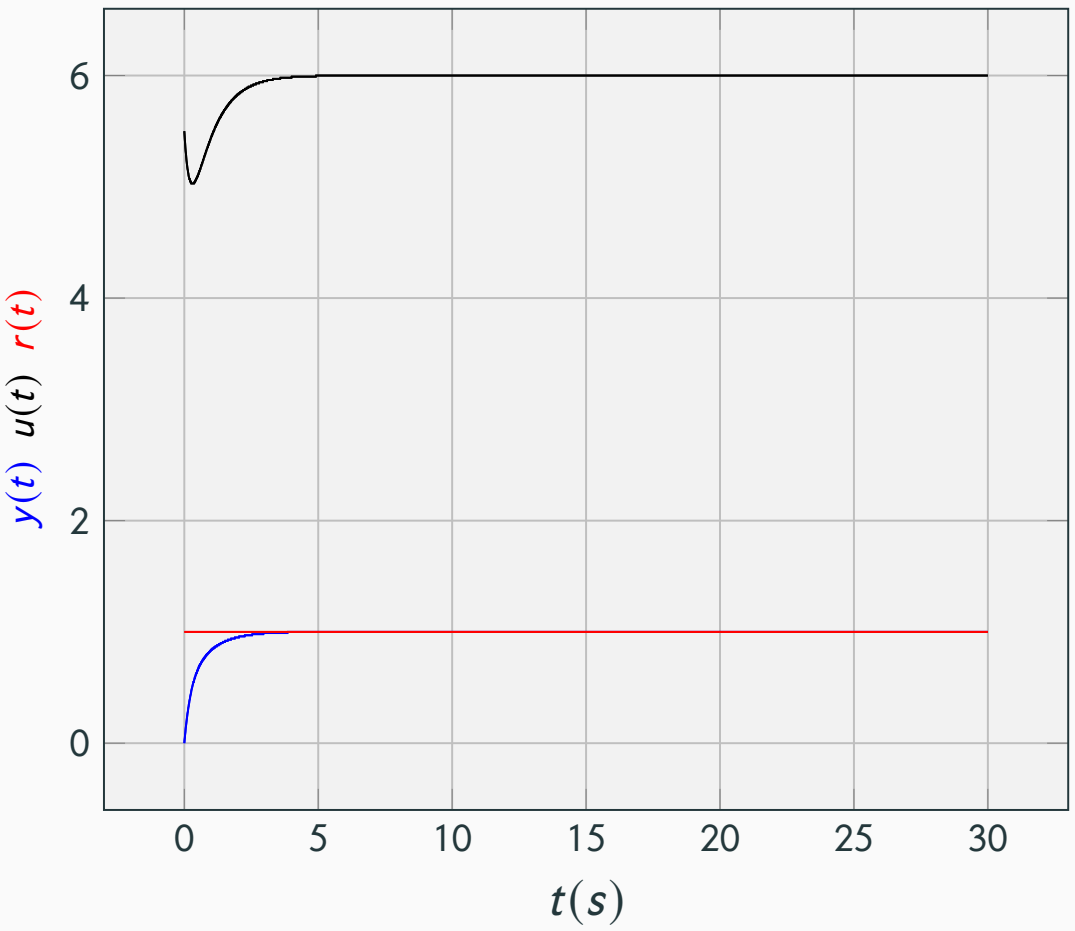


Figura 3: Resposta a degrau do sistema

Escolha 2

- Vamos escolher agora $T_i = 0.2$, logo $1/T_i = 5$. Desta forma, o zero $s = -1/T_i$ está à esquerda dos pólos em malha aberta $s = 0$, $s = -3$.
- A malha aberta para esta escolha de T_i ./Figuras dada por:

$$G(s)H(s) = \frac{0.1s + 0.5}{0.2s^2 + 0.6s}$$

- O lugar das raízes em conjunto com o lugar geométrico para $t_s < 4seg$ e $M_p < 5\%$ está ilustrado na Figura 4.
- Note que agora, o lugar das raízes descreve um círculo aonde estão contidos os pólos conjugados complexos.
- Podemos por exemplo, escolher os pólos $s = -1.94 \pm j0.79$ que correspondem ao ganho $K_p = 1.75$.

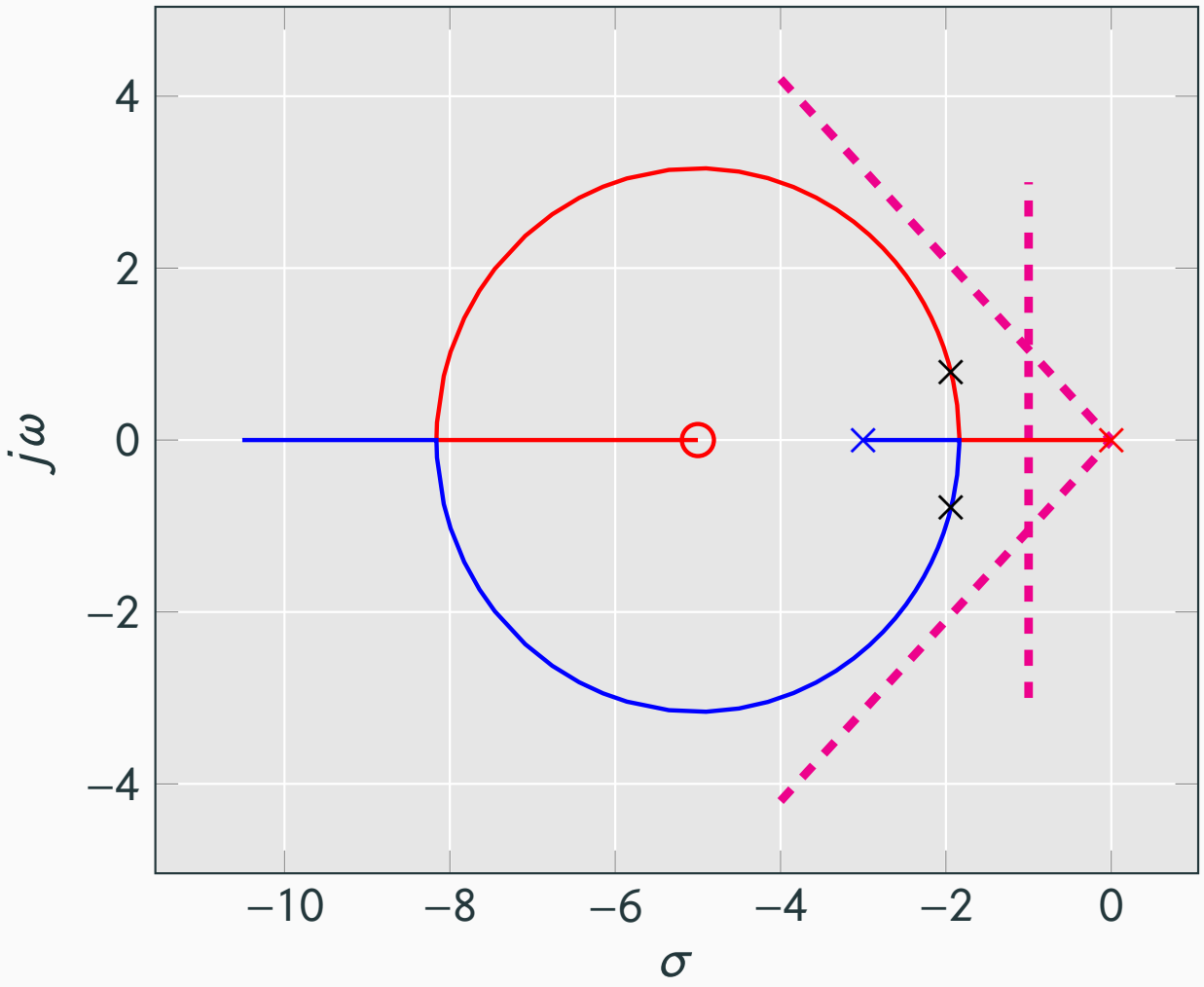


Figura 4: Lugar das raízes e o lugar geométrico para $t_s < 4seg$ e $M_p < 5\%$.

A função de transferência em malha fechada resultante pode ser escrita como:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{0.175s + 0.875}{s^2 + 3.875s + 4.375}.$$

A resposta a degrau para este sistema é ilustrada na Figura abaixo. Note que o tempo de acomodação $t_s = 2.13seg$ e o máximo sobresinal $M_p = 0\%$.

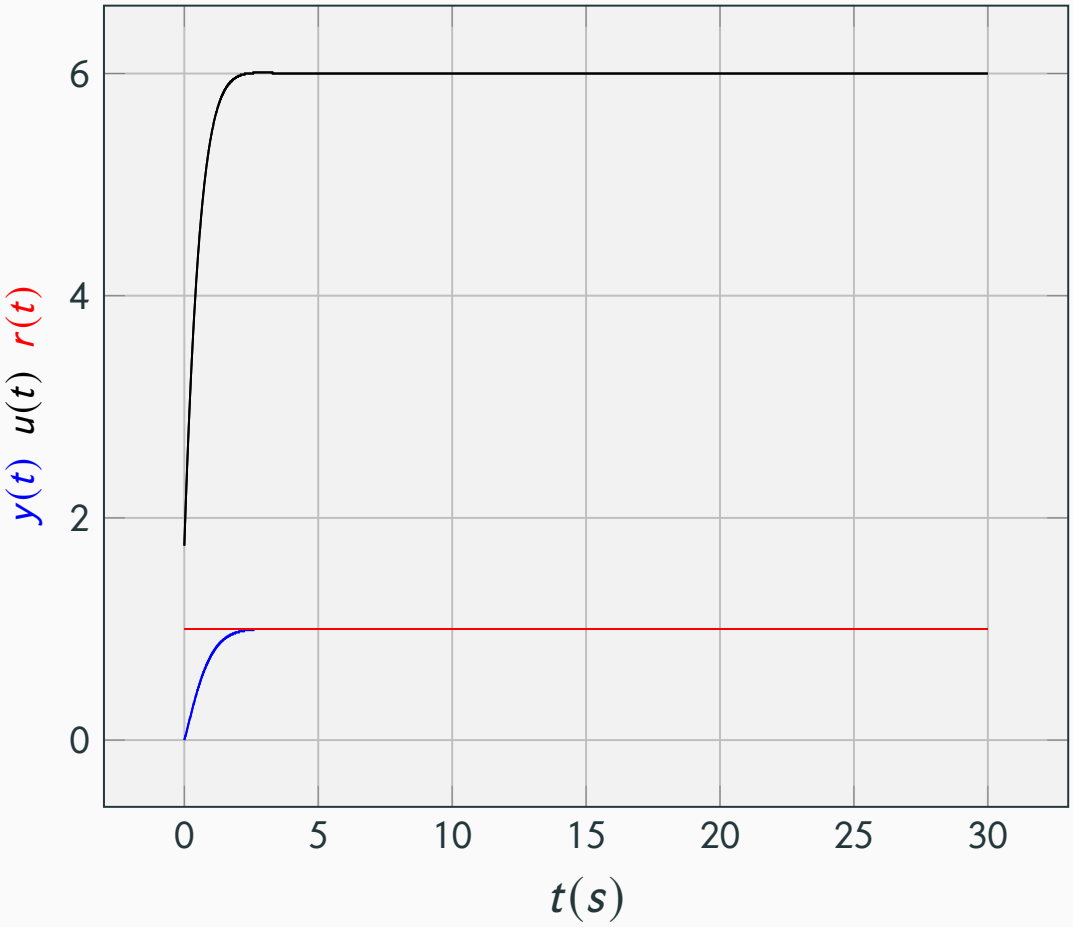


Figura 5: Resposta a degrau do sistema