



PMR3404 Controle I

Aula 3

Resposta estática
Ações de controle PID

Newton Maruyama
23 de março de 2017

PMR-EPUSP

Classificação de sistemas de acordo com o seu desempenho em regime estático

Seja o seguinte sistema em malha aberta:

$$G(s) = K \frac{(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots (T_m s + 1)}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (T_p s + 1)}. \quad (1)$$

O valor de N determina a classificação do sistema da seguinte forma:

Sistema Tipo 0 $\Rightarrow N = 0$

Sistema Tipo 1 $\Rightarrow N = 1$

Sistema Tipo 2 $\Rightarrow N = 2$

...

Erro estático

Seja o sistema em malha fechada ilustrado na Figura 1. A função de transferência deste sistema pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}, \quad (2)$$

e a função de transferência do erro do sistema pode ser escrita como:

$$\frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)}. \quad (3)$$

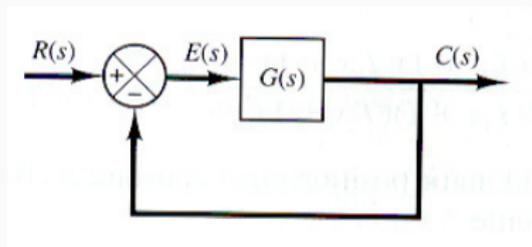


Figura 1: Sistema em malha fechada.

O erro estático do sistema pode ser calculado utilizando o teorema do valor final:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G(s)} R(s). \quad (4)$$

Constante de erro de posição estático K_P

Para uma entrada a degrau $R(s) = 1/s$ o erro estático e_{ss} pode ser calculado como:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)} \frac{1}{s} \quad (5)$$

$$= \frac{1}{1 + G(0)}. \quad (6)$$

A constante de erro de posição estático K_P é definida como:

$$K_P = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = G(0). \quad (7)$$

Dessa forma, o erro estático e_{ss} pode ser definido como:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_P}. \quad (8)$$

- Para um sistema do tipo 0 ($N=0$):

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} K \frac{(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots (T_m s + 1)}{s^0 (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (T_p s + 1)} = K. \quad (9)$$

- Para um sistema do tipo 1 ou maior ($N \geq 1$):

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} K \frac{(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots (T_m s + 1)}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (T_p s + 1)} = \infty. \quad (10)$$

Para uma entrada degrau o erro estático e_{ss} em função de K pode ser resumido através da Tabela 1:

Sistema Tipo 0 ($N = 0$)	$e_{ss} = \frac{1}{1+K}$
Sistema Tipo 1 ou maior ($N \geq 1$)	$e_{ss} = 0$

Tabela 1: Resumo do erro estático e_{ss} para uma entrada do tipo degrau.

Para uma entrada do tipo rampa $R(s) = 1/s^2$, podemos calcular o erro estático como:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G(s)} \frac{1}{s^2}, \quad (11)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sG(s)}. \quad (12)$$

A constante de erro de velocidade estático K_V é definido como:

$$K_V = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s), \quad (13)$$

desta forma o erro estático e_{ss} pode ser definido como:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_V}. \quad (14)$$

- Para um sistema do tipo 0 ($N = 0$):

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sK \frac{(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots (T_m s + 1)}{s^0 (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (T_p s + 1)} = 0. \quad (15)$$

- Para um sistema do tipo 1 ($N = 1$):

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sK \frac{(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots (T_m s + 1)}{s^1 (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (T_p s + 1)} = K. \quad (16)$$

- Para um sistema do tipo 2 ou maior ($N \geq 2$):

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sK \frac{(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots (T_m s + 1)}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (T_p s + 1)} = \infty. \quad (17)$$

A Tabela 2 apresenta um resumo do erro estático e_{ss} para uma entrada do tipo rampa.

Sistema Tipo 0 ($N = 0$)	$e_{ss} = \infty$
Sistema Tipo 1 ($N = 1$)	$e_{ss} = 1/K$
Sistema Tipo 2 ou Maior ($N \geq 2$)	$e_{ss} = 0$

Tabela 2: Resumo do erro estático e_{ss} para uma entrada do tipo rampa.

Constante de erro de aceleração estático K_a

Para uma entrada do tipo parábola $R(s) = 1/s^3$ podemos calcular o erro estático como:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G(s)} \frac{1}{s^3}, \quad (18)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 G(s)}. \quad (19)$$

A constante de erro de aceleração estática K_a é definida como:

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s), \quad (20)$$

desta forma o erro estático e_{ss} pode ser definido como:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a}. \quad (21)$$

- Para um sistema do tipo 0 e 1 ($N = 0, 1$):

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 K \frac{(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots (T_m s + 1)}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (T_p s + 1)} = 0. \quad (22)$$

- Para um sistema do tipo 2 ($N = 2$):

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 K \frac{(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots (T_m s + 1)}{s^2 (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (T_p s + 1)} = K. \quad (23)$$

- Para um sistema do tipo 3 ou maior ($N \geq 3$):

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 K \frac{(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots (T_m s + 1)}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (T_p s + 1)} = \infty. \quad (24)$$

A Tabela 3 apresenta um resumo do erro estático e_{ss} para um entrada do tipo aceleração.

Sistema Tipo 0,1 ($N = 0, 1$)	$e_{ss} = \infty$
Sistema Tipo 2 ($N = 1$)	$e_{ss} = 1/K$
Sistema Tipo 3 ou maior ($N \geq 3$)	$e_{ss} = 0$

Tabela 3: Resumo do erro estático e_{ss} para um entrada do tipo aceleração.

Resumo: erro estático em função do ganho K

Na Tabela 4 abaixo apresenta-se um resumo do erro estático do sistema em função do ganho K e do tipo de entrada padrão.

	Degrau	Rampa	Aceleração
Entrada	$r(t) = 1$	$r(t) = t$	$r(t) = \frac{1}{2}t^2$
	$R(s) = 1/s$	$R(s) = 1/s^2$	$R(s) = 1/s^3$
Tipo 0	$\frac{1}{1+K}$	∞	∞
Tipo 1	0	$\frac{1}{K}$	∞
Tipo 2	0	0	$\frac{1}{K}$

Tabela 4: Resumo do erro estático em função do ganho K e do tipo de entrada padrão.

- Na década de 70 um novo resultado conhecido como o *Princípio do Modelo Interno* foi desenvolvido por Francis e Wonham.
- Em resumo, este teorema estabelece que para que o erro do sistema de controle $E(s)$ devido ao sinal de referência $R(s)$ possa ser eliminado, a função de transferência do sinal de referência $R(s)$ deve estar presente na função transferência em malha aberta $G(s)H(s)$.

- Mais especificamente, se o sinal de referência é dado por:

$$R(s) = \frac{1}{s^n}, \quad (25)$$

- para que o erro do sistema de controle $E(s)$ seja nulo então devemos ter:

$$G(s)H(s) = \frac{1}{s^n} \frac{a(s)}{b(s)}. \quad (26)$$

Classificação dos controladores industriais

Os controladores industriais podem ser basicamente classificados segundo suas ações de controle básicas da seguinte forma:

1. Controlador Liga-Desliga (ON-OFF);
2. Controlador Proporcional (P);
3. Controlador Integral (I);
4. Controlador Proporcional-Integral (PI);
5. Controlador Proporcional-Derivativo (PD);
6. Controlador Proporcional-Integral-Derivativo (PID).

A maioria dos controladores utiliza eletricidade ou fluidos sobre pressão como fontes de potência. Desta forma, controladores podem ter suas funções de transferência implementada através de circuitos eletrônicos, circuitos hidráulicos e pneumáticos. Entretanto, é cada vez mais comum a utilização de controladores digitais utilizados em conjunto com conversores eletro-hidráulicos ou eletro-pneumáticos caso sejam necessários.

- Num sistema de controle tipo Liga-Desliga (ON-OFF), o elemento de atuação possui apenas duas posições, ou seja, o dispositivo fornece apenas dois valores na saída. A grande utilização deste tipo de controlador pode ser justificada pela simplicidade da sua construção e pelo seu baixo custo.

O controlador Liga-Desliga pode ser equacionado da seguinte forma. Seja $u(t)$ o sinal de saída do controlador e $e(t)$ o sinal de entrada. O sinal de saída $u(t)$ permanece no valor máximo ou mínimo, dependendo se o valor do erro é positivo ou negativo, de tal forma que:

$$u(t) = \begin{cases} U_1, & \text{para } e(t) > 0, \\ U_2, & \text{para } e(t) < 0, \end{cases} \quad (27)$$

onde U_1 e U_2 são constantes. O valor mínimo U_2 é em geral zero ou $-U_1$.

Tais controladores são em geral implementados através de dispositivos elétricos, principalmente válvulas solenóides. As Figuras 2-(a) e (b) ilustram o diagrama de blocos de controladores Liga-Desliga.

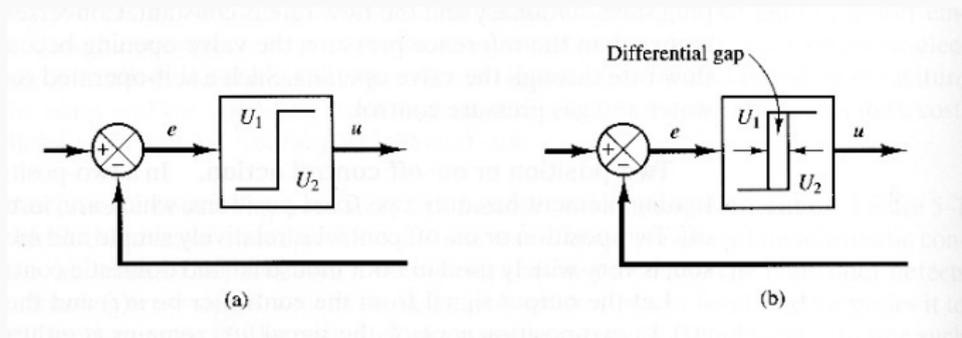


Figura 2: (a) Diagrama de blocos de um controlador Liga-Desliga - (b) Diagrama de blocos de um controlador Liga-Desliga com intervalo diferencial.

- Muitas vezes, o intervalo diferencial é resultado de atritos e folgas não intencionais,
- mas mais frequentemente trata-se de uma característica intencional para evitar uma frequência de chaveamento excessiva do dispositivo que pode comprometer sua vida útil.

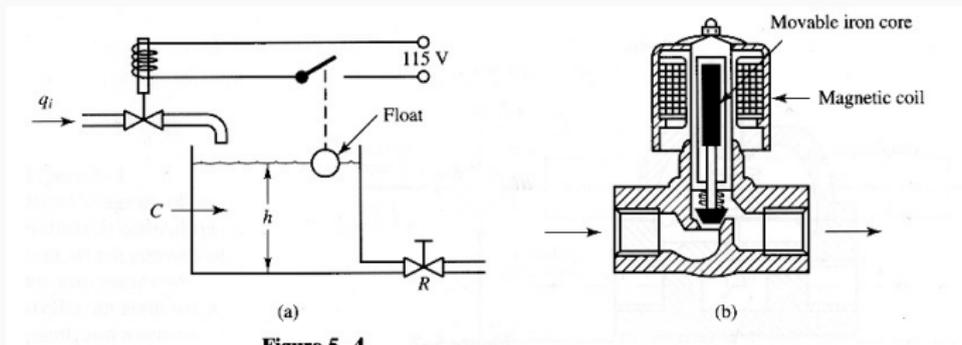


Figura 3: (a) Sistema de controle de nível - (b) Válvula eletromagnética.

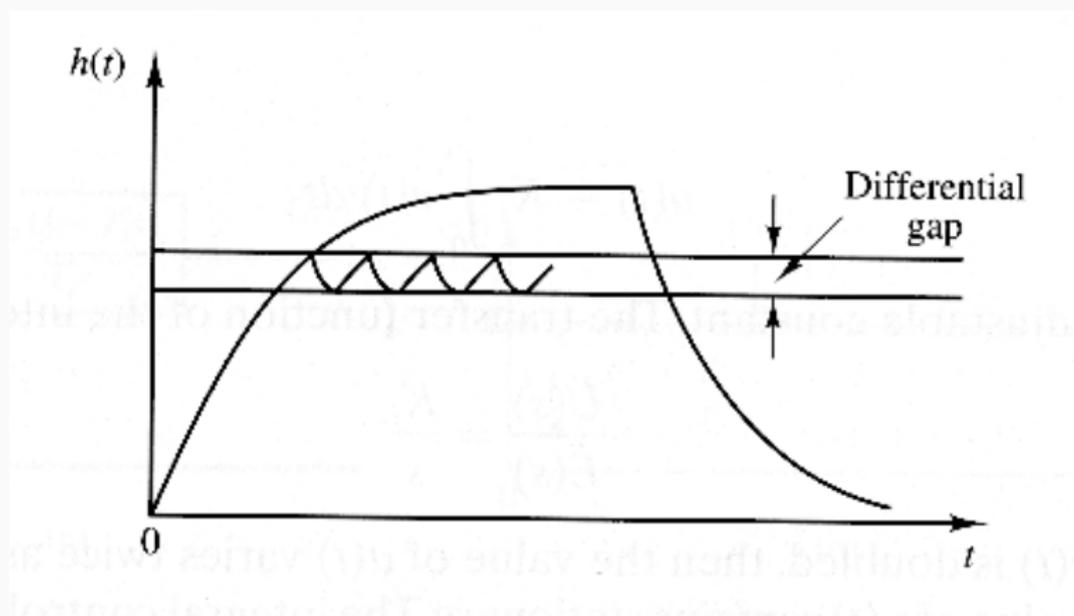


Figura 4: Nivel de líquido $h(t)$.

Para um controlador com ação de controle proporcional a relação entre a ação de controle $u(t)$ e o erro de atuação $e(t)$ é dado por:

$$u(t) = K_p e(t), \quad (28)$$

ou expresso na variável de Laplace como:

$$U(s) = K_p E(s), \quad (29)$$

onde K_p é denominado constante proporcional.

O diagrama de bloco deste tipo de controlador está ilustrado na Figura 5.

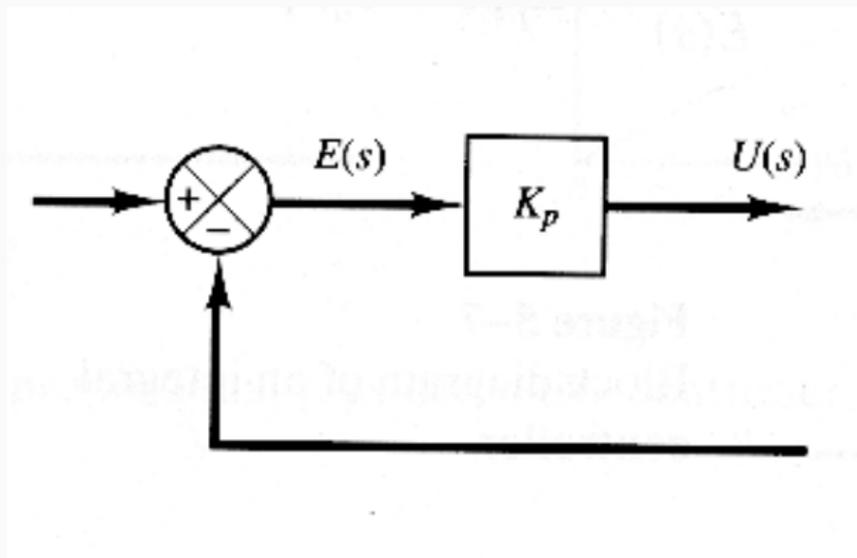


Figura 5: Diagrama de blocos de um controlador proporcional.

Na ação de controle integral, o valor da ação de controle $u(t)$ varia proporcionalmente ao sinal de erro $e(t)$:

$$\frac{du(t)}{dt} = K_i e(t). \quad (30)$$

Ou,

$$u(t) = K_i \int_0^t e(t) dt. \quad (31)$$

A sua função de transferência pode ser representada como:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s} \quad (32)$$

Se o valor de $e(t)$ dobra, então o valor de $u(t)$ varia duas vezes mais rápido.
Se $e(t) = 0$ o valor de $u(t)$ permanece estacionário.

O diagrama de bloco deste tipo de controlador está ilustrado na Figura 6.

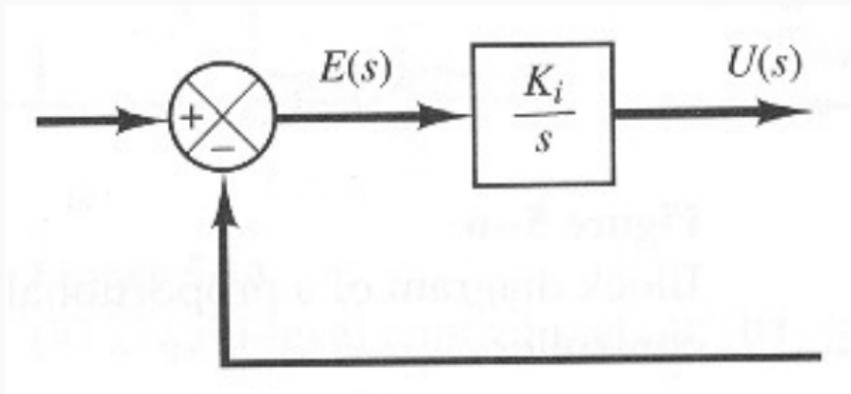


Figura 6: Diagrama de blocos de um controlador integral.

Controlador Proporcional-Integral (PI)

A ação de controle proporcional-integral pode ser definida como:

$$u(t) = K_P e(t) + \frac{K_P}{T_i} \int_0^t e(t) dt. \quad (33)$$

A função de transferência pode ser escrita como:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_P \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right), \quad (34)$$

onde K_P é o *ganho proporcional* e T_i é denominado *tempo integral*. $1/T_i$ é denominado *taxa de reset (reset rate)*. A taxa de reset é o número de vezes por unidade de tempo que a parte proporcional da ação de controle é duplicada.

A Figura 7-(a) ilustra o diagrama de blocos de um controlador proporcional integral. Para um hipotético sinal de erro $e(t)$ do tipo degrau ilustrado na Figura 7-(b) o sinal de controle $u(t)$ resulta como ilustrado na Figura 7-(c).

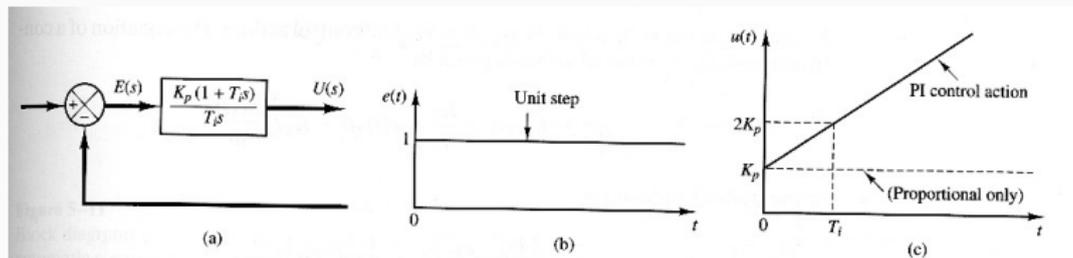


Figura 7: (a) Diagrama de blocos de um controlador proporcional integral - (b) Entrada degrau para $e(t)$ - (c) Gráfico correspondente para o sinal de controle $u(t)$.

A ação de controle proporcional-derivativa é definida como:

$$u(t) = K_P e(t) + K_P T_D \frac{de(t)}{dt}, \quad (35)$$

e a função de transferência é dada por:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_P(1 + T_D s), \quad (36)$$

onde a constante K_P é o *ganho proporcional* e a constante T_D é denominada *tempo derivativo*.

A ação de controle derivativa fornece uma ação de controle proporcional é derivada do erro. O tempo derivativo T_d é o intervalo de tempo que a ação de controle derivativa antecede a ação de controle proporcional.

A Figura 8 ilustra o diagrama de blocos do controlador PD e a o gráfico saída do controlador $u(t)$ caso a entrada $e(t)$ seja uma rampa unitária.

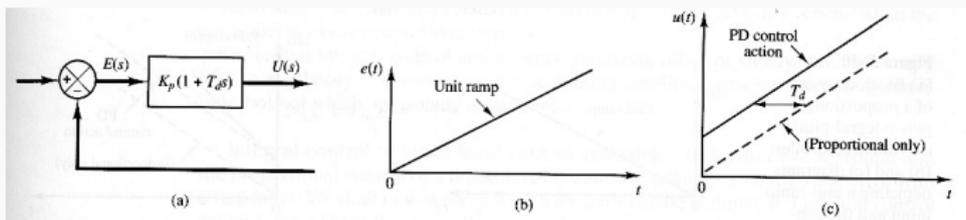


Figura 8: (a) Diagrama de blocos de um controlador PD - (b) entrada $e(t)$ como rampa unitária - (c) saída do controlador $u(t)$.

A ação de controle derivativa possui a vantagem de ser antecipatória, entretanto, possui a desvantagem de amplificar sinais de ruído além de poder causar a saturação do atuador. Além do mais, a ação de controle derivativa nunca pode ser utilizada isoladamente pois sua ação é efetiva apenas durante o período transitório.

Controlador Proporcional-Integral-Derivativo (PID)

A combinação das ações de controle proporcional, integral e derivativa resulta na ação de controle que pode ser definida como:

$$u(t) = K_P e(t) + \frac{K_P}{T_i} \int_0^t e(t) dt + K_P T_d \frac{de(t)}{dt}, \quad (37)$$

e a função de transferência é dada por:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_P \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right), \quad (38)$$

onde K_P é o ganho proporcional, T_i é o ganho integral e T_d é o tempo derivativo.

A Figura 9 ilustra o diagrama de blocos do controlador PID e a o gráfico saída do controlador $u(t)$ caso a entrada $e(t)$ seja uma rampa unitária.

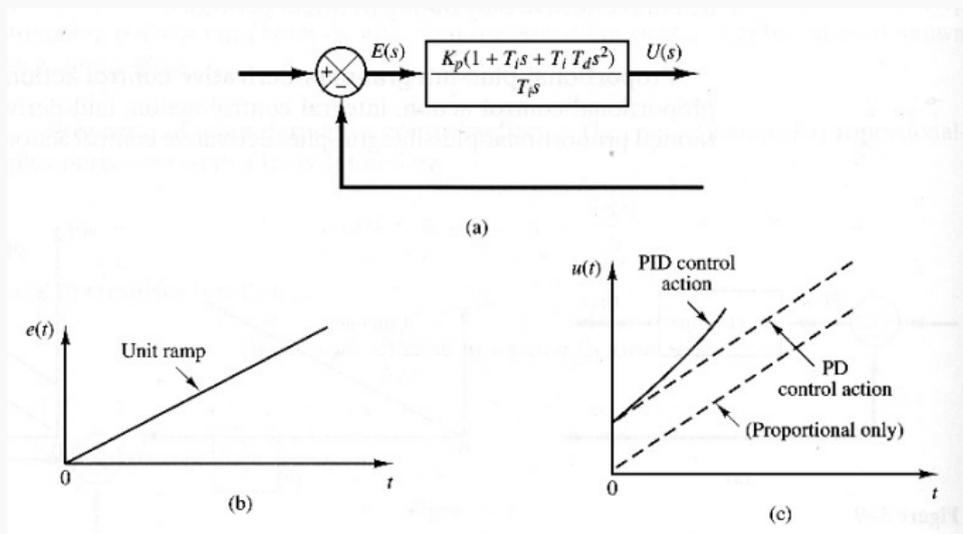


Figura 9: (a) Diagrama de blocos de um controlador PID - (b) entrada $e(t)$ como rampa unitária - (c) saída do controlador $u(t)$.

Efeitos da ação de controle integral e derivativa

- Este erro estacionário pode ser eliminado caso seja utilizado uma ação de controle integral.
- o sinal de controle $u(t)$ pode ter um valor diferente de zero mesmo que o erro $e(t)$ seja equivalente a zero
- Isto é obviamente impossível para o caso de controle proporcional.
- Note que a ação de controle integral apesar de remover o *offset* pode levar o sistema a ter um comportamento oscilatório de amplitude decrescente ou até crescente o que é indesejável.

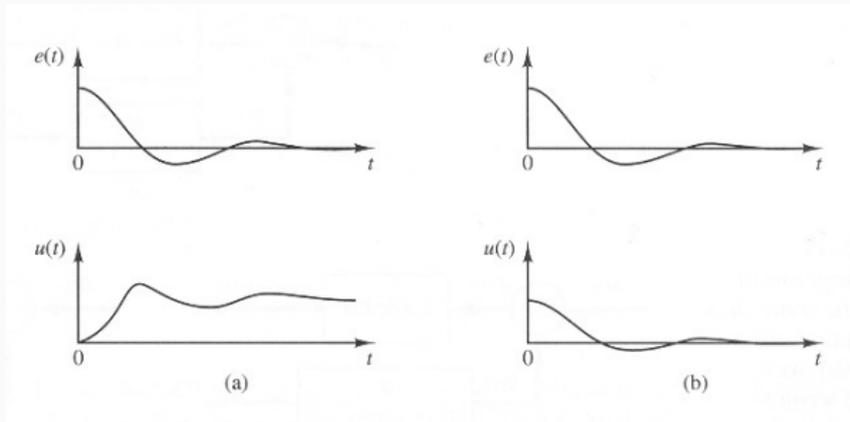


Figura 10: (a) Gráficos de $e(t)$ e $u(t)$ mostrando erro nulo para ação de controle não nula (ação integral) - (b) Gráfico de $e(t)$ e $u(t)$ mostrando erro nulo quando a ação de controle também é nula (ação proporcional).

- Assume-se aqui a utilização de um controlador integral I . Assume-se aqui um sistema linearizado, desta forma as variáveis de referência (*setpoint*) x , vazão de entrada q_i , vazão de saída q_o e nível de líquido h são medidas em relação aos seus valores estacionários \hat{X} , \hat{Q} e \hat{H} .

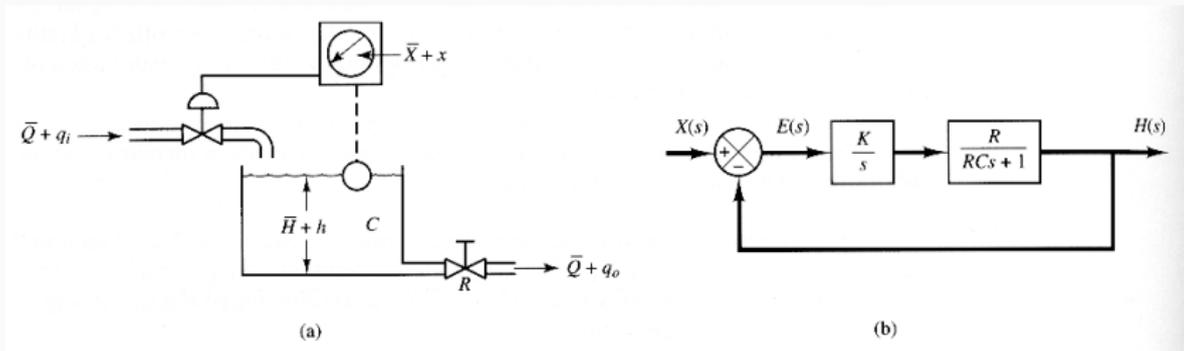


Figura 11: (a) Sistema de controle de nível de líquido - (b) Diagrama de blocos.

Como ilustrado na Figura 11-(b) a planta neste caso é dada por:

$$\frac{H(s)}{U(s)} = \frac{R}{RCs + 1}, \quad (39)$$

onde

$$R = \frac{2\hat{H}}{\hat{Q}}. \quad (40)$$

e C é a capacitância do tanque. O controlador integral é dado por:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K}{s}. \quad (41)$$

Sendo o sistema estável, o erro estático e_{ss} para uma entrada do tipo degrau pode ser calculado utilizando-se o teorema do valor final:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s), \quad (42)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \quad (43)$$

$$= s \frac{(RCs^2 + s) \frac{1}{s}}{RCs^2 + s + KR} \quad (44)$$

$$= 0. \quad (45)$$

Desta forma, verificamos que a ação de controle integral elimina o erro estático para uma entrada a degrau.

Resposta a distúrbios de torque (Controle Proporcional)

Aqui é investigado o efeito de um distúrbio de torque na entrada da planta como ilustrado na Figura 12. O controlador proporcional fornece um torque $T(s)$ para o posicionamento de um elemento de carga que consiste de um momento de inércia e um atrito viscoso.

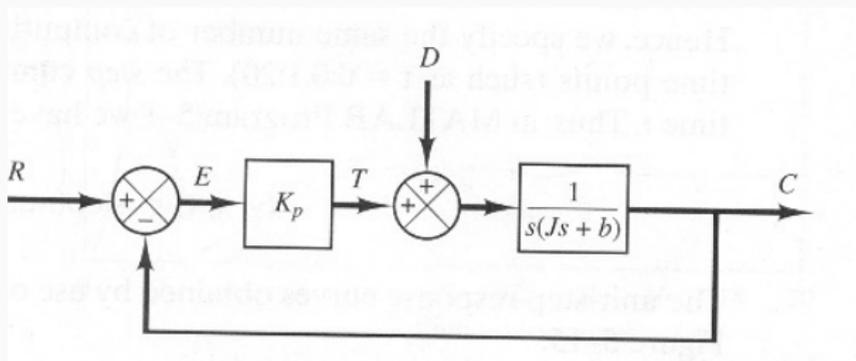


Figura 12: Sistema controle sob a ação de um distúrbio de torque $D(s)$.

Assume-se aqui que a referência possui valor nulo, $R(s) = 0$, a função de transferência entre $C(s)$ e $D(s)$ é dada por:

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{1}{Js^2 + bs + K_p}. \quad (46)$$

Portanto,

$$\frac{E(s)}{D(s)} = -\frac{C(s)}{D(s)} = -\frac{1}{Js^2 + bs + K_p}. \quad (47)$$

O erro estático e_{ss} devido a um distúrbio de torque do tipo degrau de magnitude T_d é dado por:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s), \quad (48)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-s}{Js^2 + bs + K_p} \frac{T_d}{s}, \quad (49)$$

$$= -\frac{T_d}{K_p}. \quad (50)$$

Em regime estático o controlador proporcional fornece um torque $-T_d$, o qual é igual em magnitude mas de sinal oposto ao distúrbio de torque de valor T_d . O valor da saída do sistema devido ao degrau de distúrbio de torque é dado por:

$$c_{ss} = -e_{ss} = \frac{T_d}{K_P}. \quad (51)$$

O erro estático pode ser reduzido com o aumento do ganho K_P . Aumentando este valor pode-se tornar a resposta do sistema mais oscilatória.

Resposta a distúrbios de torque (Controle Proporcional Integral)

Para eliminar o *offset* devido ao distúrbio de torque é necessário a inserção de um efeito integral. A ação de controle integral está ativa sempre que existe um erro diferente de zero. A Figura 13 ilustra o diagram de blocos do sistema de controle utilizando um controlador PI de um sistema de carga composto de um momento de inércia e um atrito viscoso.

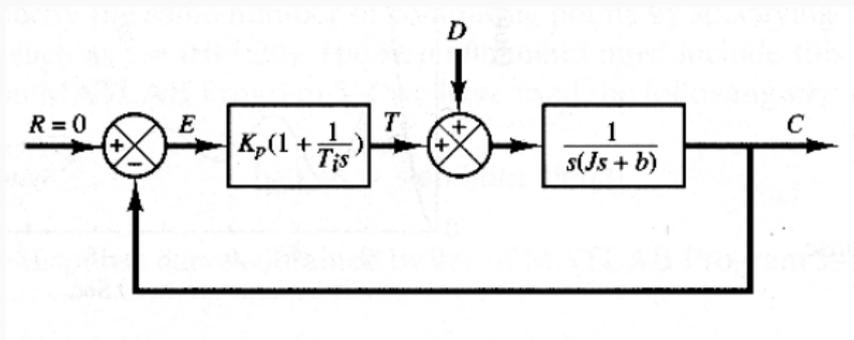


Figura 13: Controlador PI de um sistema de carga sujeito a um distúrbio de torque.

A função de transferência em malha fechada é dada por:

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{s}{Js^3 + bs^2 + K_Ps + \frac{K_P}{T_i}} \cdot \quad (52)$$

Se o sinal de entrada for nulo, $r(t) = 0$ o sinal de erro pode ser expresso como:

$$\frac{E(s)}{D(s)} = -\frac{s}{Js^3 + bs^2 + K_Ps + \frac{K_P}{T_i}} \cdot \quad (53)$$

Se o sistema de controle for estável, ou seja, se as raízes da equação característica:

$$Js^3 + bs^2 + K_Ps + \frac{K_P}{T_i} = 0. \quad (54)$$

possuírem parte real negativa então pode-se utilizar o teorema do valor final como:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s), \quad (55)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} -s^2 \frac{1}{Js^3 + bs^2 + K_Ps + \frac{K_P}{T_i}} \frac{1}{s}, \quad (56)$$

$$= 0. \quad (57)$$

Desta forma, o erro estático devido a um distúrbio de torque do tipo degrau pode ser eliminado se for utilizado um controlador do tipo PI.

Note que agora com a utilização do controlador PI temos um sistema de 3a. ordem. Desta forma, o sistema de controle pode-se tornar instável para um valor grande de K_p . O sistema de 2a. ordem é sempre estável se os coeficientes do polinômio são todos positivos. é importante notar que se o controlador fosse do tipo integral como na Figura 14 o sistema se tornaria instável porque a equação característica:

$$Js^3 + bs^2 + K = 0, \quad (58)$$

tem raízes com parte real positiva.

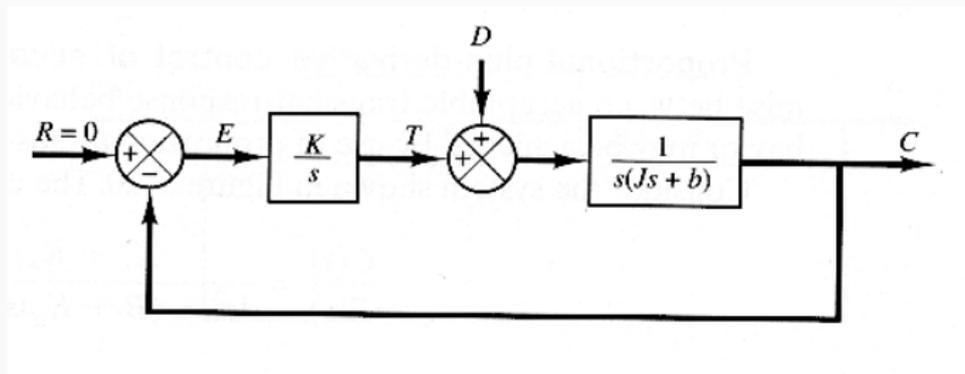


Figura 14: Controlador Integral de um sistema de carga sujeito a um distúrbio de torque.

- A Ação de controle derivativa quando adicionada ao controlador proporcional proporciona um controlador com maior sensibilidade.
- Desta forma, quando o erro começa a crescer a ação derivativa inicia uma ação corretiva antes que o erro se torne grande, aumentando assim a estabilidade do sistema.
- A ação derivativa adiciona amortecimento ao sistema o que permite a utilização de valores maiores de K_p , contribuindo assim para diminuir o erro estático do sistema.
- Como a ação derivativa não interfere no erro estático diretamente, ela sempre é utilizada sob a forma PD ou PID.

Controle proporcional de uma carga inercial

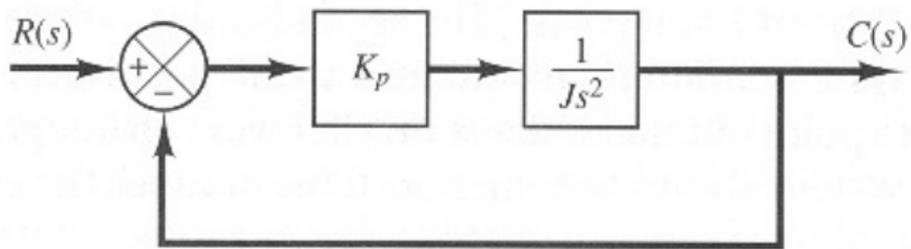
Vamos considerar inicialmente o controle proporcional de uma carga inercial como ilustrado na Figura 15-(a). A função de transferência em malha fechada é dada por:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_P}{Js^2 + K_P}. \quad (59)$$

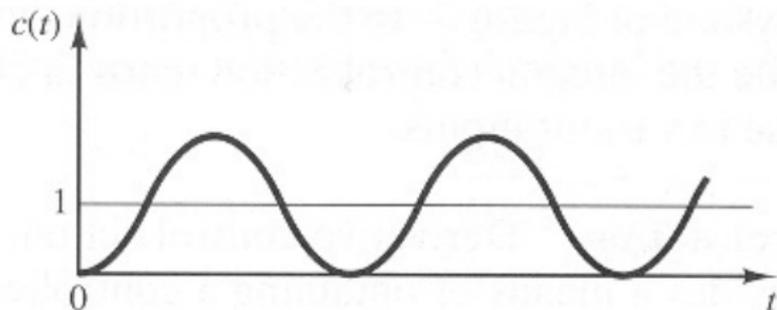
A equação característica do sistema:

$$Js^2 + K_P = 0, \quad (60)$$

possui raízes imaginárias, logo, a resposta a degrau do sistema oscila indefinidamente como ilustrado na Figura 15-(b).



(a)



(b)

Figura 15: (a) Diagrama de blocos de um sistema com carga inercial e controle proporcional. - (b) Resposta para entrada a degrau.

Utilizando um controlado proporcional-derivativo como ilustrado na Figura 16-(a) a função de transferência em malha fechada pode ser escrita como:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_P(1 + T_d s)}{J s^2 + K_P T_d s + K_P} \quad (61)$$

A equação característica é dada por:

$$J s^2 + K_P T_d s + K_P = 0, \quad (62)$$

agora possui duas raízes com parte real negativa para valores positivos de J , K_P e T_d .

Portanto a ação derivativa introduziu um efeito de amortecimento. Uma resposta típica para uma entrada a degrau está ilustrada na Figura 16-(b).

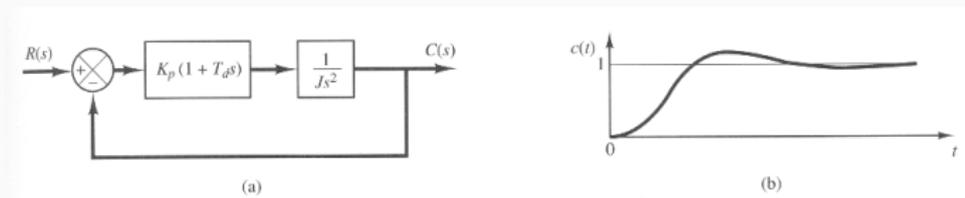


Figura 16: (a) Diagrama de blocos para um sistema com carga inercial e controle proporcional-derivativo. - (b) Resposta típica para uma entrada a degrau.