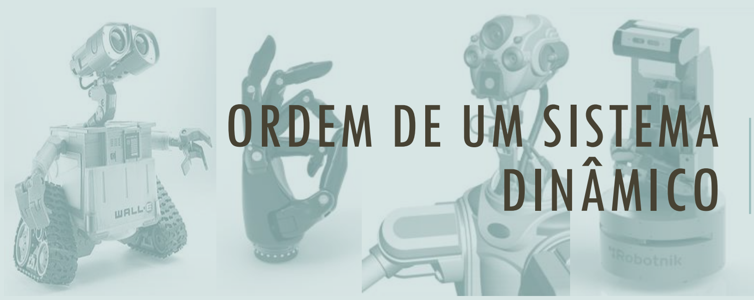


ORDEM DE UM SISTEMA DINÂMICO

Sistemas de ordem 1 e 2

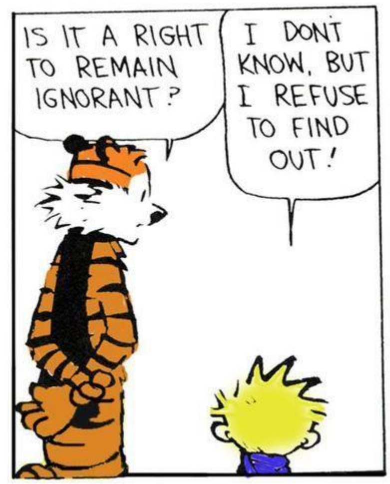
MODELO

O **engenheiro** constrói um modelo, a partir de um problema que não possui solução exata, e acha uma solução aproximada ótima.

Modelar é o processo de escrever uma equação ou sistema de equações que descreve o movimento de um mecanismo físico. O sucesso do modelo é determinado por quão bem a solução da equação prevê o comportamento observado no sistema real.

Engineering is the art of molding materials we don't wholly understand, into shapes we can't fully analyze, so as to withstand forces we can't really assess, in such a way that the community at large has no reason to suspect the extent of our ignorance.

James E. Amrhein, 2009
Masonry Institute of America (Retired)



ORDEM DE UM SISTEMA

Sistemas podem ser convenientemente classificados pela ordem da equação diferencial que os modela

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 y(t) = u(t)$$

$y(t)$ saída

$u(t)$ função estímulo

n ordem do sistema

t tempo

a_i característica do sistema

RESPOSTA TRANSITÓRIA E RESPOSTA ESTACIONÁRIA

Resposta Transitória: Vai do estado inicial ao estado final.

Também chamada de Solução Homogênea

Resposta Estacionária: Comportamento da saída do sistema à medida que t tende ao infinito

Também chamada de Resposta Forçada ou Solução Particular

$$y(t) = y_{tr}(t) + y_{ss}(t)$$

Resposta do Sistema

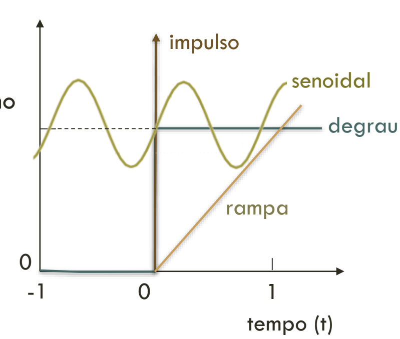
RESPOSTAS DOS SISTEMAS

As respostas dos sistemas podem ser divididas em:

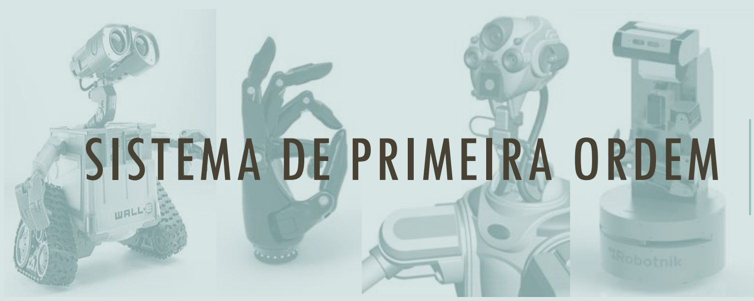
- Resposta natural ou homogênea
- Resposta forçada, de estado estacionário ou solução particular.

As características dinâmicas são mostradas através da resposta dos sistemas a quatro tipos de perturbações diferentes, bastante comuns no estudo experimental e teórico do controle de processos:

- Função degrau;
- Função Impulso;
- Função rampa;
- Função senoidal.



- Técnica de análise de resposta: a que oferecer solução mais rápida dentre:
  - Solução da equação diferencial;
  - Transferência de Laplace;
  - Pólos e zeros.



SISTEMA DE PRIMEIRA ORDEM

A constante de tempo.

SISTEMAS DE 1ª ORDEM

$$c\dot{y} + ky = u(t)$$

Aplica-se a Transformada de Laplace em ambos os lados da equação

$$csY(s) + kY(s) = U(s)$$

$\tau = \frac{c}{k}$ e $K = \frac{1}{k}$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

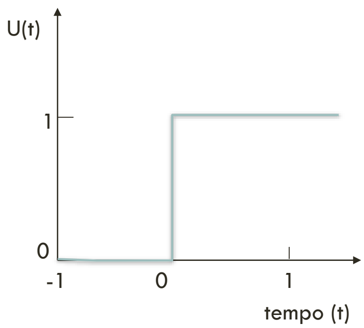
$\boxed{\tau}$ é a constante de tempo

É uma medida da **velocidade de reação do sistema** à uma excitação

Diagrama de blocos

$$\boldsymbol{U(s)} \longrightarrow \boxed{\frac{K}{\tau s + 1}} \longrightarrow \boldsymbol{Y(s)}$$

RESPOSTA DE UM SISTEMA DE 1ª ORDEM A UMA FUNÇÃO DEGRAU UNITÁRIA



Combinando a função de transferência de um sistema de 1ª ordem e a Transformada de Laplace da função degrau com amplitude 1,

$$Y(s) = \boxed{\frac{K}{\tau s + 1}}\boxed{\frac{1}{s}} \qquad U(s) = \frac{1}{s}$$

Função de transferência de um sistema de 1ª ordem

Transformada de Laplace da função degrau com amplitude 1

$y(t)$: resposta do sistema, inversa de $Y(s)$,

$$y(t) = K\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

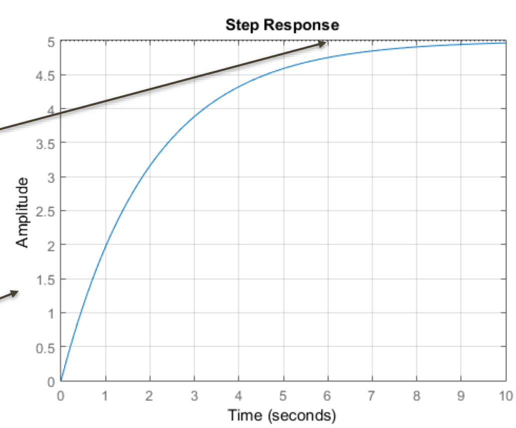
transiente

EXEMPLOS

$$\frac{\boxed{5}}{2\,s + 1}$$

Usando MatLab,

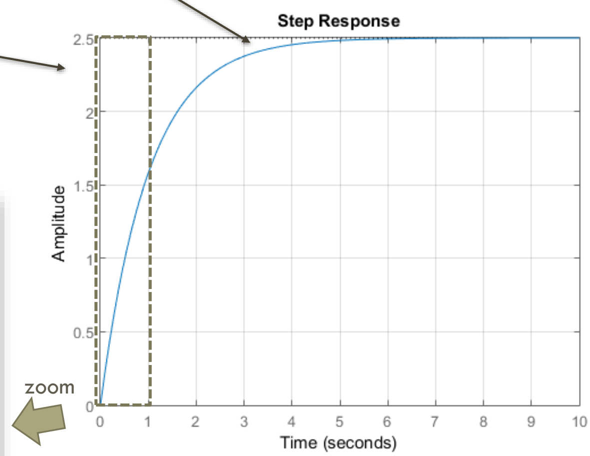
```
%% Funcao Degrau
num=[5];
den=[2 1];
tf(num,den)
step(num,den,10);
grid on
```



Usando MatLab,

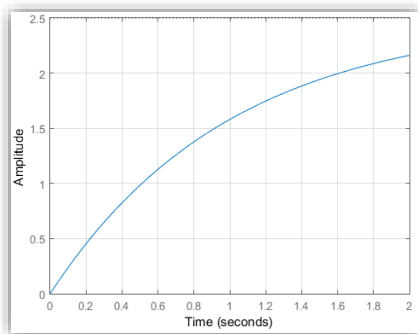
```
%% Funcao Degrau
num=[5];
den=[2 2];
tf(num,den)
step(num,den,10);
grid on
```

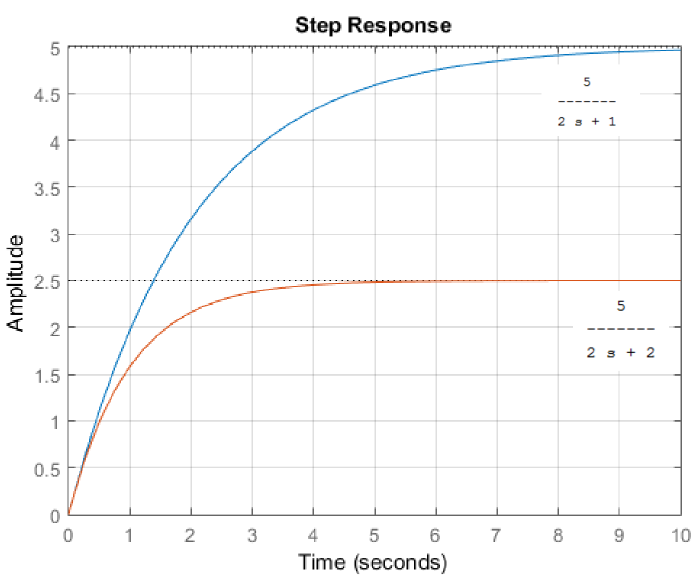
```
    5
 -------
 2 s + 2
```



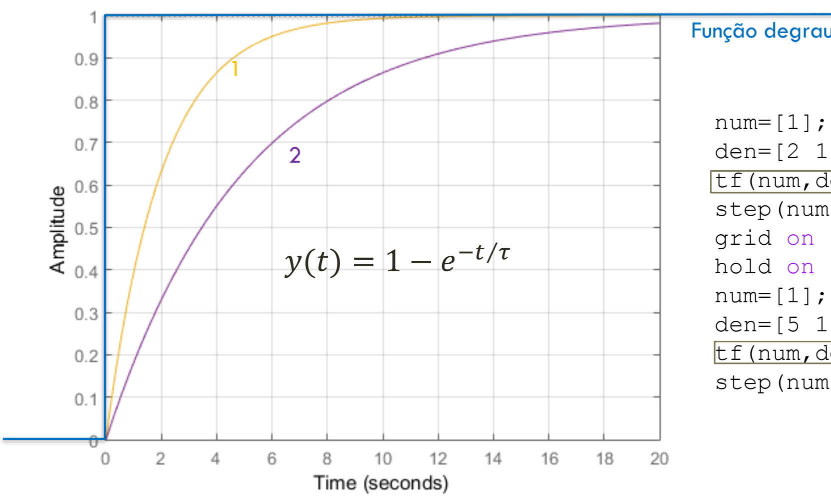
A derivada na origem (Teorema do Valor Inicial):

$$\lim_{t \to 0+} \dot{y}(t) = \lim_{s \to \infty} \frac{Ks}{1 + \tau s} = \frac{K}{\tau}$$





Qual dos dois sistemas tem valor maior de τ?

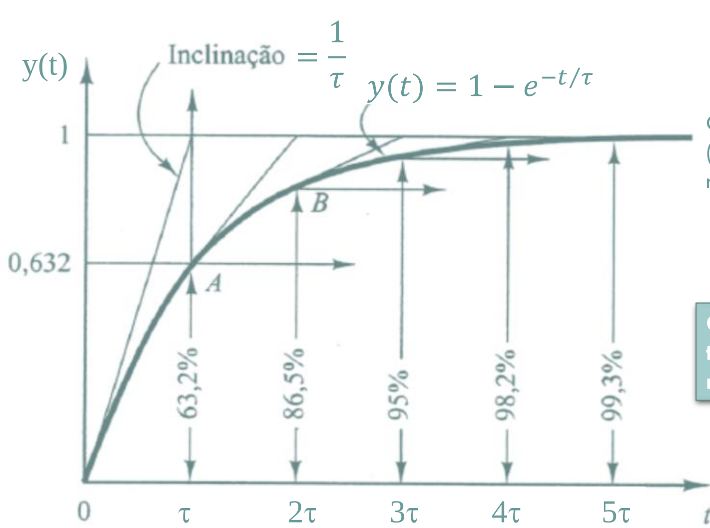



```
num=[1];
den=[2 1];
tf(num,den)
step(num,den,20);
grid on
hold on
num=[1];
den=[5 1];
tf(num,den)
step(num,den,20);
```

```
    1
-------
2 s + 1
```

```
    1
-------
5 s + 1
```

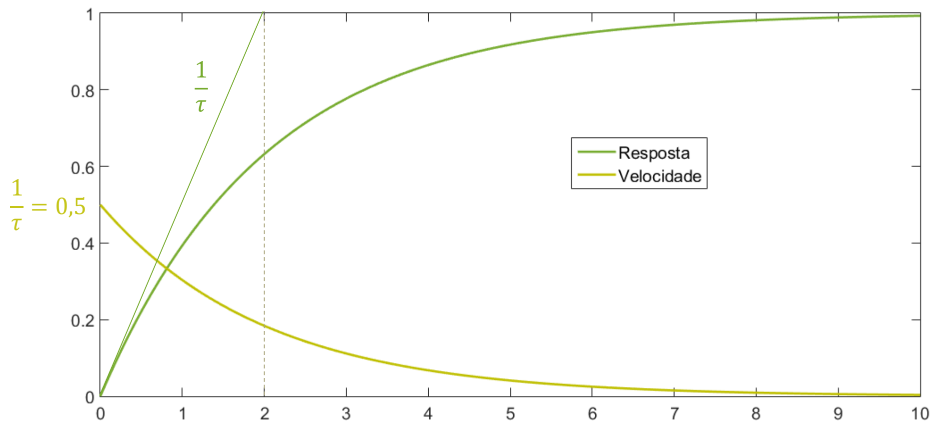
RESPOSTA GRÁFICA



O tempo de subida (0 –100%) é, naturalmente, infinito

Quanto menor for a constante de tempo, mais rápida será a resposta do sistema.

Figura adaptada de [6].

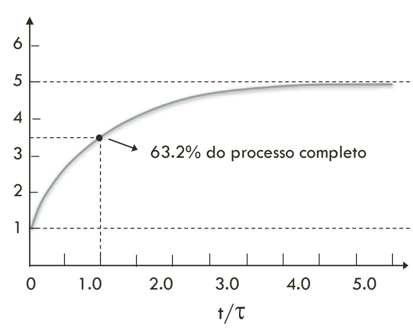


Um ponto importante é quando a variável independente *t* atinge a constante de tempo do modelo.

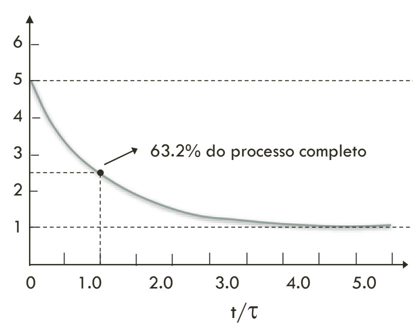
$$y = 1 - e^{-t/\tau}$$

$$\boxed{y(\tau) = 0{,}632}$$

Neste ponto a saída atinge 63,2% do valor em estado estacionário.



relação entre tempo e constante de tempo



relação entre tempo e constante de tempo

Tempo de subida (t_r) - é o tempo para que o sinal vá de 0,1 a 0,9 do seu valor final. $t_r = 2{,}2\tau$.

$$0{,}1 = 1 - e^{-t/\tau}$$
$$t = 0{,}1\tau$$

$$0{,}9 = 1 - e^{-t/\tau}$$
$$t = 2{,}3\tau$$

Tempo de regime (t_s) - é o tempo para que a resposta alcance uma faixa de valores de 2% em torno do valor final e aí permaneça: $t_s = 4\tau$

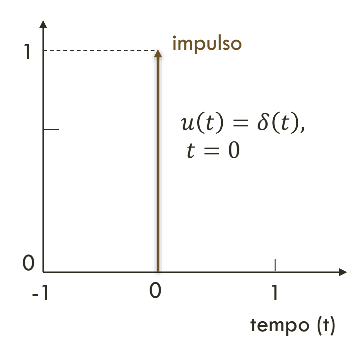
$$0{,}98 = 1 - e^{-t/\tau}$$
$$t = 3{,}9\tau \cong 4\tau$$

Um outro ponto importante é. quando a saída atinge 99% do valor em estado estacionário

$$0{,}99 = 1 - e^{-t/\tau}$$
$$t = 4{,}6\tau \cong 5\tau$$

A resposta é essencialmente completa após 3 a 5 constantes de tempo

RESPOSTA DE SISTEMAS DE 1ª ORDEM A UMA FUNÇÃO IMPULSO



$\delta(t)$ é a função impulso unitário

Combinando a função de transferência de um sistema de 1ª ordem e a Transformada de Laplace da função Impulso com amplitude A,

$$Y(s) = \boxed{\frac{K}{\tau s + 1}}\,\boxed{1}$$

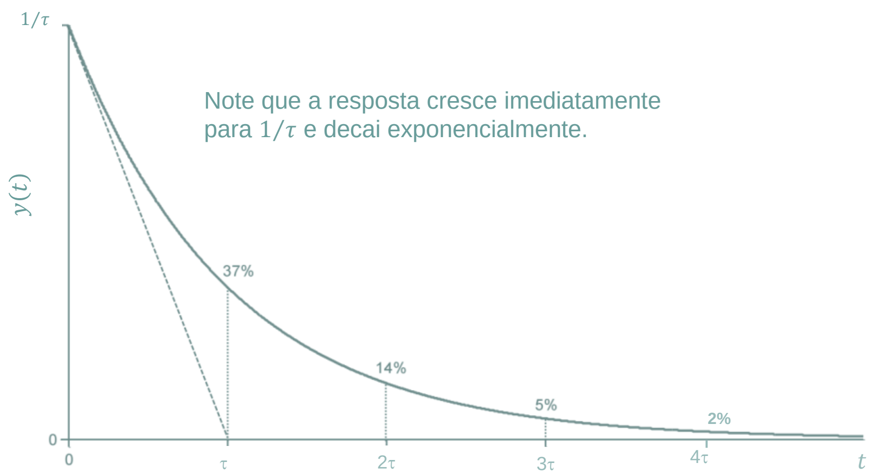
Função de transferência de um sistema de 1ª ordem

$U(s) = 1$
Transformada de Laplace da função Impulso

$y(t)$: resposta do sistema, inversa de $Y(s)$,

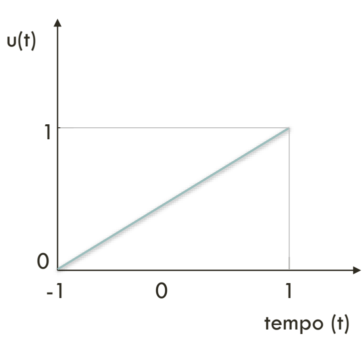
$$y = \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

RESPOSTA GRÁFICA



RESPOSTA DE UM SISTEMA DE 1ª ORDEM A UMA FUNÇÃO RAMPA UNITÁRIA

Combinando a função de transferência de um sistema de 1ª ordem e a Transformada de Laplace da função rampa u(t)=t,



$$Y(s) = \boxed{\frac{K}{\tau s + 1}}\boxed{\frac{1}{s^2}}$$

Função de transferência de um sistema de 1ª ordem

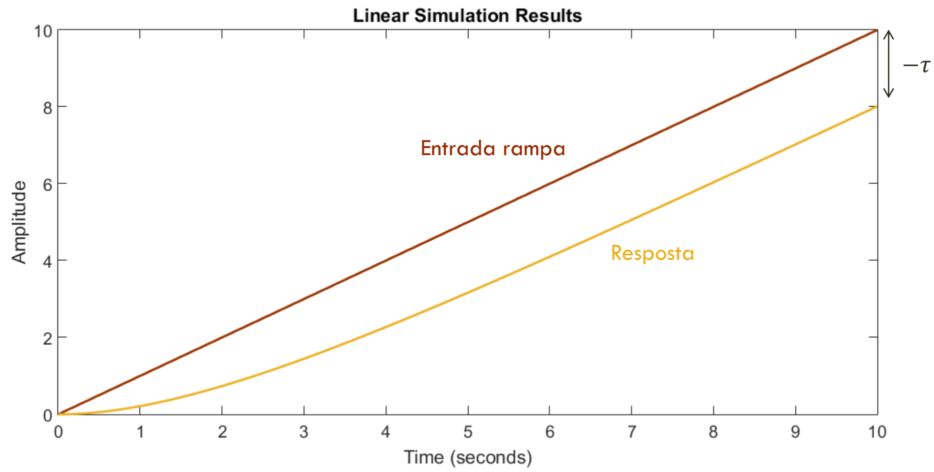
$U(s) = \frac{1}{s^2}$

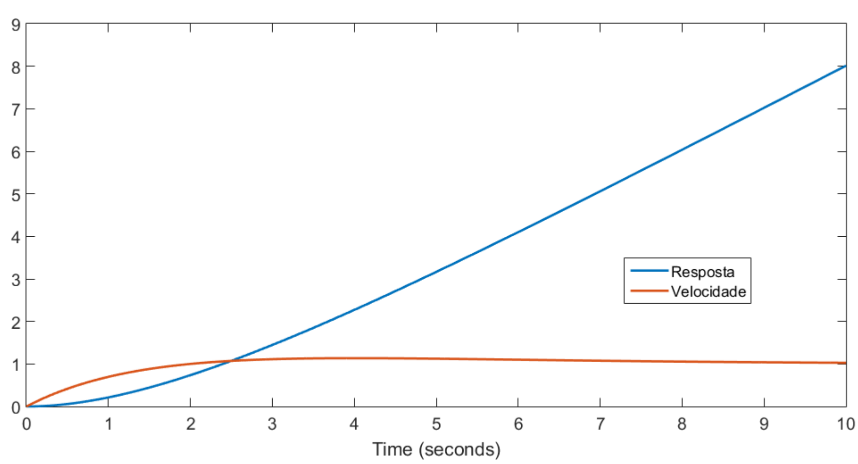
Transformada de Laplace da função rampa com declividade 1

$y(t)$: resposta do sistema, inversa de $Y(s)$,

$$y(t) = K\left(t - \tau + \tau e^{-t/\tau}\right)$$

```
alpha=1;
ramp=alpha.*t ;          % input signal
model=tf(1,[2 1]);       % transfer function
y,t]=lsim(model,ramp,t);
plot(t,ramp,t,y)
```





$$Y(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$	
Constante de tempo τ	$y(\tau) = 0{,}632\mathrm{K}$
Tempo de subida: é o tempo para que o sinal vá de 0,1 a 0,9 do seu valor final	$t_r = 2{,}2\tau$
Tempo de regime: é o tempo para que a resposta alcance uma faixa de valores de 2% em torno do valor final e aí permaneça	$t_s = 4\tau$
Quando a saída atinge 99% do valor em estado estacionário	$t = 4{,}6\tau \cong 5\tau$

RESPOSTA DE SISTEMAS DE 1ª ORDEM À UMA FUNÇÃO HARMÔNICA

$$\tau\dot{y} + y = KA \sin \omega t$$

$$y(t) = \frac{KA\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{KA}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \sin\big(\omega t + \varphi(\omega)\big)$$

Resposta depende agora da frequência.

$$\varphi(\omega) = -\tan^{-1} \omega\tau$$

a resposta atrasa em relação à entrada por um ângulo φ.

Quando $t \to \infty$, tem-se a solução estacionária,

$$y(t) = \frac{KA}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \sin\big(\omega t + \varphi(\omega)\big)$$

RESPOSTA VS ESTÍMULO

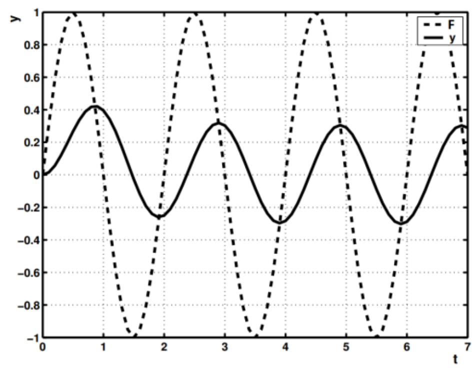
a razão entre as amplitudes da resposta (solução estacionária) e da entrada é a chamada razão de amplitude, $M_P(\omega)$

$$M_P(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}$$

Se $M_P(\omega) < 1$, diz-se que o sinal está sendo atenuado.

(para ganho do sistema $k = 1$

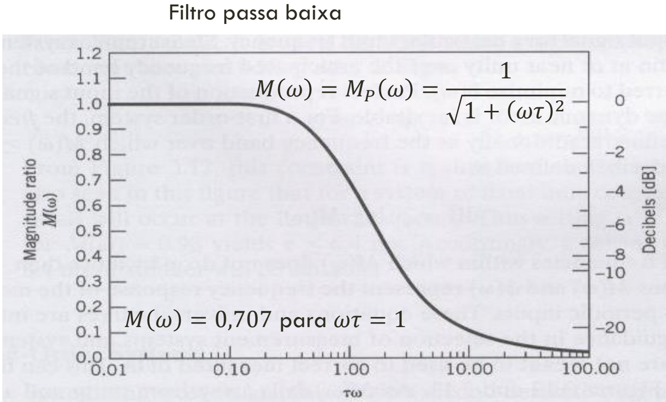
$M_P(\omega)$ representa o efeito da dinâmica do sistema e do processo, ω e τ, sobre a resposta senoidal

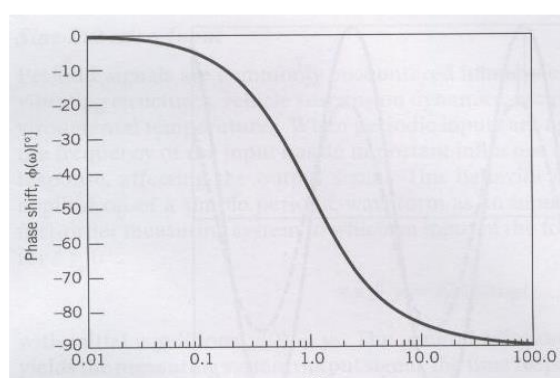


a resposta é também uma onda senoidal com frequência ω igual à onda senoidal do sinal de entrada

CONT...

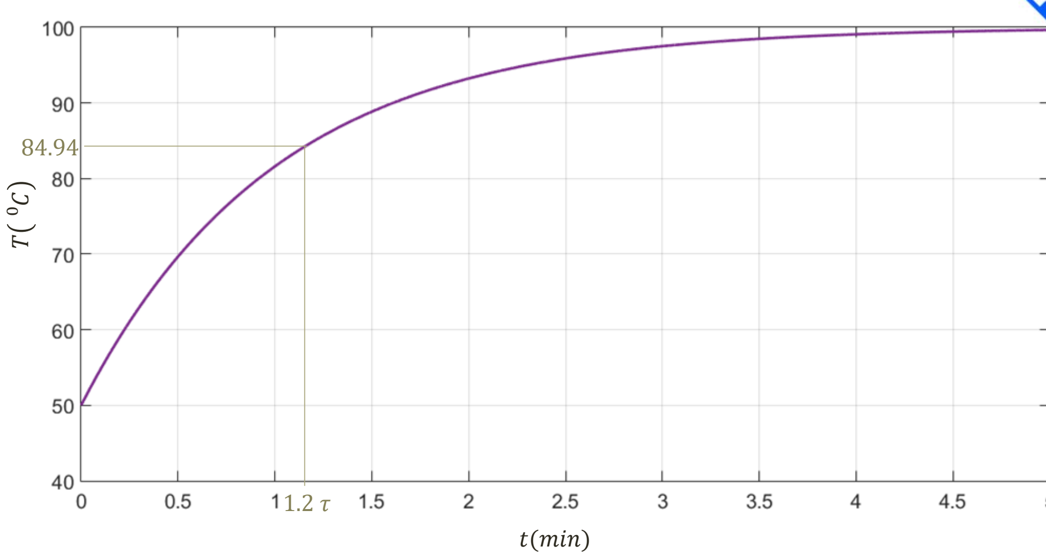
Filtro passa baixa

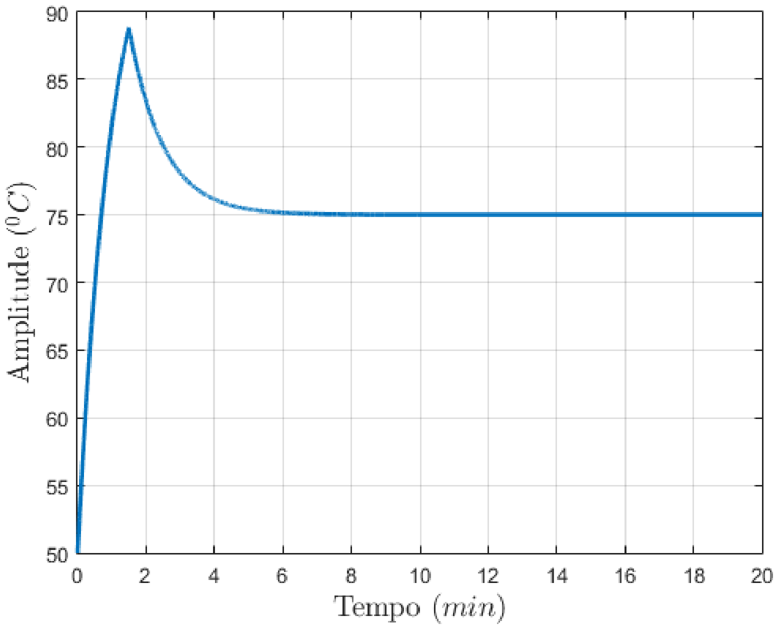




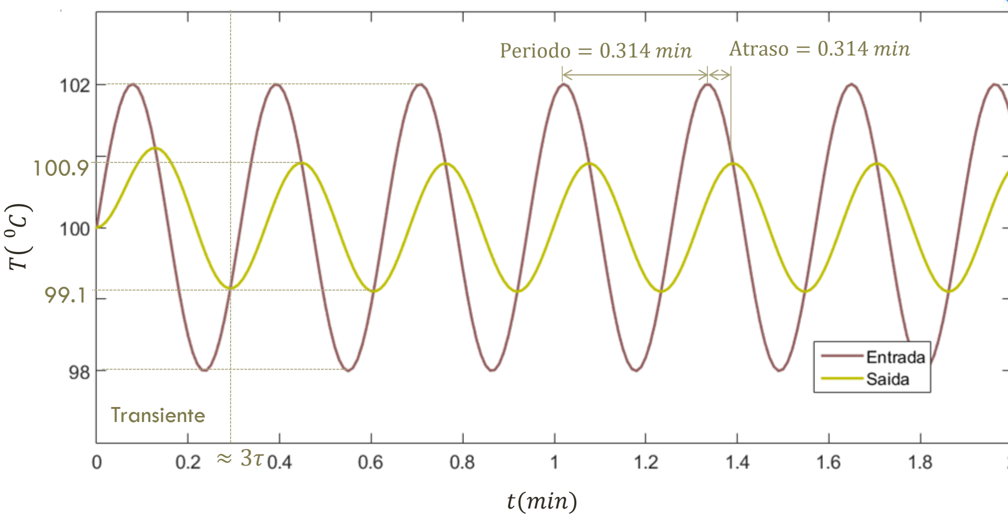
EXERCÍCIO

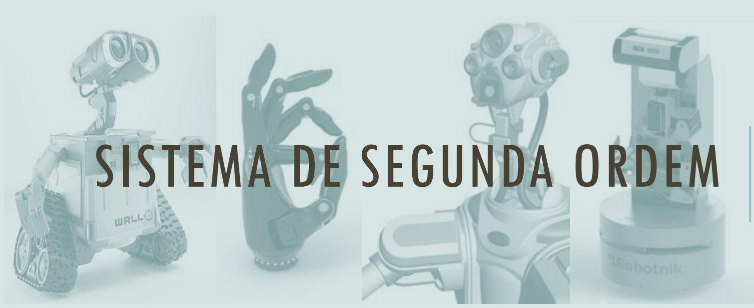
1. Um termômetro com constante de tempo de $1\ min$ está inicialmente a 50^0C. Ele é imerso na água a 100^0C em $t = 0$. Em $t = 1.5\ min$ o termômetro é removido do banho e posto em uma água a 75^0C. Pede-se:
   A. A temperatura em $t = 1.2\ min$;
   B. A máxima temperatura indicada pelo termômetro;
   C. Qual será a temperatura em $t = 20min$.
2. Um termômetro com constante de tempo de $0.1\ min$ é colocado a uma temperatura é colocado em um líquido a uma temperatura a 100^0Caté atingir o equilíbrio com o líquido. No instante $t = 0$, a temperatura do líquido começa a variar em torno do equilíbrio, com amplitude de 2^0C. Plote a resposta do termômetro ao longo do tempo para uma frequência de oscilação de $10/\pi\ \ ciclos/min$. Qual o atraso da resposta, em minutos?






```
% Exemplo 1. Exemplo termometro - Sistema de primeira Ordem
% variaveis do sistema
K=1;
tau=1; % minutos
A=50;  % graus Celsius - amplitude da função degrau
A2=25;
To=50;
%
t1=0:0.001:1.5;
y1=To+K*A*(1-exp(-t1/tau));
t2=1.5:0.001:20;
y2=To+K*A*(1-exp(-t2/tau))-K*A2*(1-exp(-(t2-1.5)/tau));
plot([t1 t2],[y1 y2],'LineWidth',2)
ax.FontSize = 12;      % set font size for axes labels
xlabel('Tempo $(min)$','interpreter','latex','FontSize',14);
ylabel('Amplitude
$(^0C)$','interpreter','latex','FontSize',14);
grid on
ymax=To+K*A*(1-exp(-1.5/tau))
```





SISTEMA DE SEGUNDA ORDEM

Enquanto a variação de um parâmetro no sistema de primeira ordem simplesmente altera a velocidade da resposta, as variações nos parâmetros de um sistema de segunda ordem podem alterar a forma da resposta.

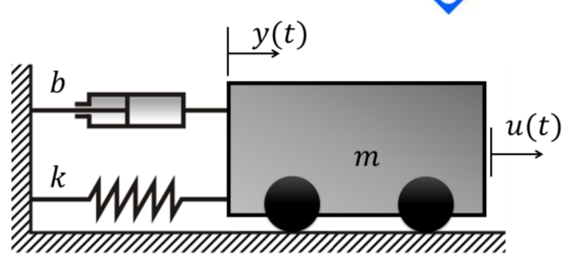
SISTEMAS DE SEGUNDA ORDEM...

A maior parte dos projetos de sistemas de controle se baseia na análise de sistemas de segunda ordem.

Mesmo que o sistema seja de ordem superior, o que é comum, ele pode ser aproximado por um sistema de segunda ordem a fim de se obter uma primeira aproximação com precisão razoável.

EQUILÍBRIO DINÂMICO

Princípio d'Alembert: a massa m desenvolve uma força de inércia proporcional à sua aceleração e oposta à ela.

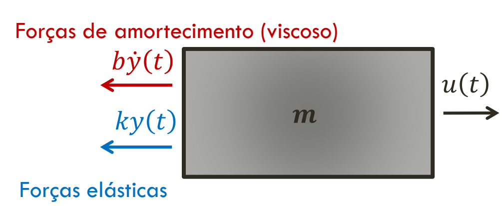


$$F = m\ddot{y}$$

Forças de inércia

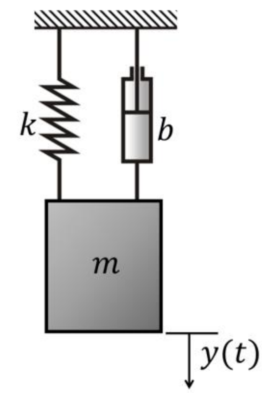
$$u(t) - b\dot{y}(t) - ky(t) = m\ddot{y}(t)$$

$$\boxed{m\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + ky(t) = u(t)}$$



EXERCÍCIO EXEMPLO

OGATA, pg 215. No sistema ao lado, $m = 1\ kg$, $b = 2\ Ns/m$, $k = 100\ N/m$. A massa é deslocada de 0,05m e liberada sem velocidade inicial. Determine a frequência da oscilação observada. Determine também a amplitude quatro ciclos depois. O deslocamento $y(t)$ é medido a partir das condições de equilíbrio.



RESPOSTA DE SISTEMAS DE 2^A ORDEM

OU RETARDO QUADRÁTICO

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u(t)$$

$$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{1}{m}u(t)$$

$$\frac{k}{m} = \omega_n^2 \qquad \frac{b}{m} = 2\zeta\omega_n = 2\sigma \qquad \frac{1}{k} = K$$

$$\boxed{\ddot{y} + 2\zeta\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = K\omega_n^2 u(t)}$$

ALGUMAS DEFINIÇÕES IMPORTANTES...

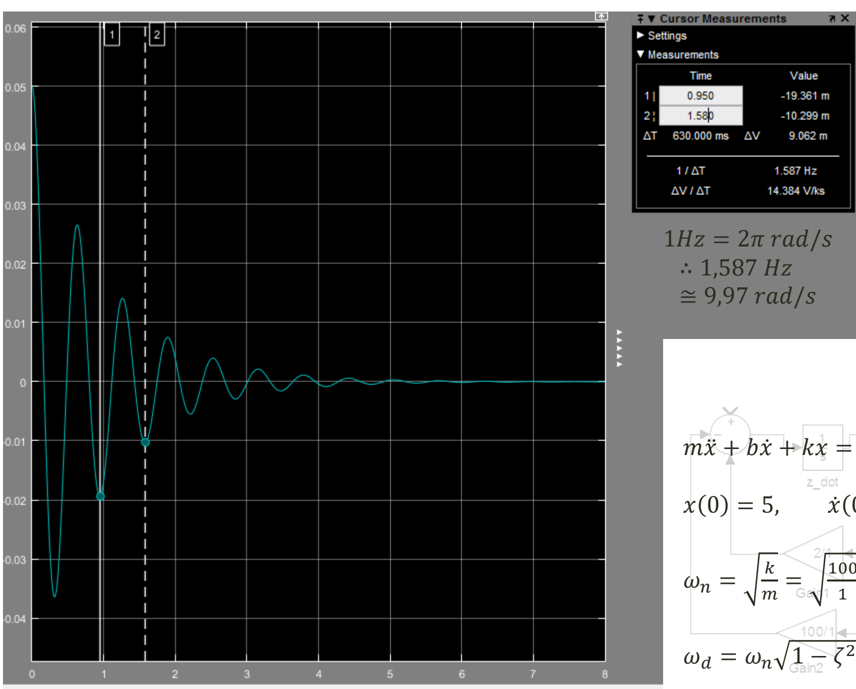
$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ***frequência natural do sistema***, isto é,

$\tau_n = \frac{1}{\omega_n}$ tempo característico ou período natural de oscilação: indica o tempo de resposta com que o sistema reage a uma perturbação de entrada;

$\zeta = \frac{b}{b_{cr}} = \frac{b}{2m\omega_n}$ ***fator de amortecimento*** adimensional, é a relação entre o amortecimento real e o crítico. Fisicamente, é uma medida do grau de amortecimento (ou do caráter oscilatório) da resposta do sistema;

K ***ganho do sistema***: é a razão entre os valores finais da resposta e de uma determinada entrada considerada

Vamos adiantar uma definição: $\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}$ é a ***frequência natural amortecida***.



$1Hz = 2\pi\ rad/s$
$\therefore 1{,}587\ Hz$
$\cong 9{,}97\ rad/s$

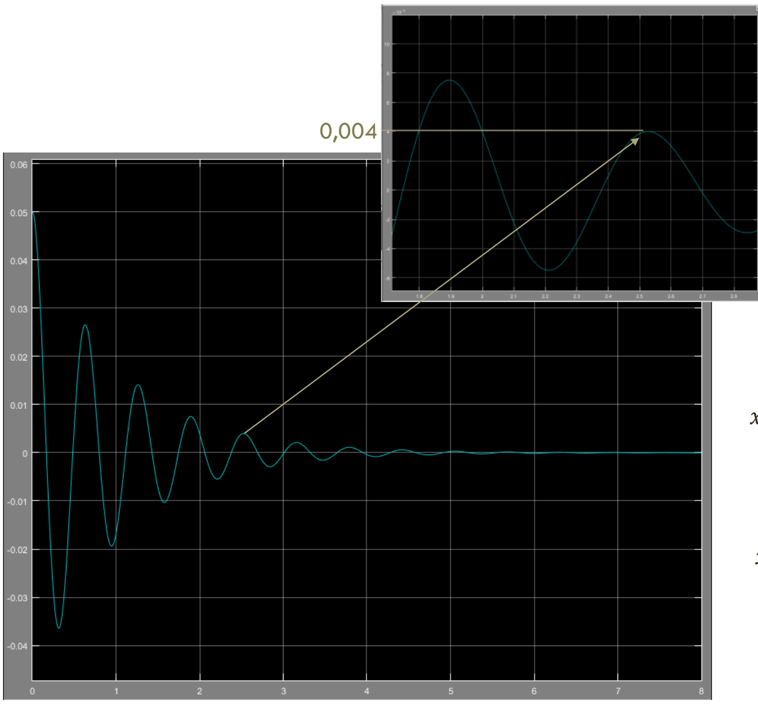
$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \ddot{x} + 2\dot{x} + 100x = 0,$

$x(0) = 5, \quad \dot{x}(0) = 0$

$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100}{1}} = 10\ rad/s \qquad \zeta = \frac{b}{2m\omega_n} = \frac{2}{20} = 0{,}1$

$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 9{,}95\ rad/s$

Simulink



$$x(t) = x(0)e^{-\zeta\omega_n t}(\cos\omega_d t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t$$

$$t = nT, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_d} \;\therefore\; x(t) = x(0)e^{-\zeta\omega_n t}$$

$$x(4T) = x(0)e^{-\zeta\omega_n 4T} = 0{,}05e^{-0{,}1(1)(4)(0{,}6315)}$$

$$x(4T) = 0{,}004\text{m}$$

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

$$s^2Y(s) + 2\zeta\omega_n sY(s) + \omega_n^2 Y(s) = K\omega_n^2 U(s)$$

$$(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)Y(s) = K\omega_n^2 U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n\, s + \omega_n^2}$$

Diagrama de blocos

$$\boldsymbol{U(s)} \longrightarrow \boxed{\frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n\, s + \omega_n^2}} \longrightarrow \boldsymbol{Y(s)}$$

EXEMPLOS

$$\boldsymbol{U(s)} \longrightarrow \boxed{\frac{3}{4s^2 + 12\,s + 1}} \longrightarrow \boldsymbol{Y(s)}$$

$K = 3$ $\zeta = 3$ $\omega_n = 0,5$

pólos:

$s = -2,9142$

$s = -0,0858$

Pólos reais e distintos

MatLab,

```
%% Exemplo 1:
num=[3];
den=[4, 12, 1];
printsys(num,den)
[z,p,k]=tf2zp(num,den)
```

CONT...

$$\boldsymbol{U(s)} \longrightarrow \boxed{\frac{3}{s^2 + 2\,s + 1}} \longrightarrow \boldsymbol{Y(s)}$$

$K = 3$ $\zeta = 1$ $\omega_n = 1$

pólos:

$s = -1$

$s = -1$

Pólos reais e duplos

MatLab,

```
%% Exemplo 2:
num=[3];
den=[1, 2, 1];
printsys(num,den)
[z,p,k]=tf2zp(num,den)
```

CONT...

$$U(s) \longrightarrow \boxed{\frac{3}{2s^2 + 2\,s + 2}} \longrightarrow Y(s)$$

$K = 1{,}5 \qquad \zeta = 0{,}5 \qquad \omega_n = 1$

pólos:

$s = -0.5000 - 0.8660i$

$s = -0.5000 + 0.8660i$

Pólos complexos conjugados

MatLab,

```
%% Exemplo 3:
num=[3];
den=[2, 2, 2];
printsys(num,den)
[z,p,k]=tf2zp(num,den)
```

CONT...

$$U(s) \longrightarrow \boxed{\frac{3}{s^2 + 1}} \longrightarrow Y(s)$$

$K = 3 \qquad \zeta = 0 \qquad \omega_n = 1$

pólos:

$s = 0.0000 - 1.0000i$

$s = 0.0000 + 1.0000i$

Pólos imaginários puros conjugados

MatLab,

```
%% Exemplo 4:
num=[3];
den=[1, 0, 1];
printsys(num,den)
[z,p,k]=tf2zp(num,den)
```

RESPOSTA NO TEMPO: SISTEMA DE 2ª ORDEM. CASO GERAL

$\boldsymbol{U(s)} \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow \boldsymbol{Y(s)}$

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n\, s + \omega_n^2}$$

Equação característica:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n\, s + \omega_n^2 = 0$$

$\Delta = 4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2$

$\Delta = 4\omega_n^2(\zeta^2 - 1)$

$$\Delta > 0 \rightarrow \zeta^2 - 1 > 0 \rightarrow \zeta^2 > 1 \rightarrow \zeta > 1$$
$$\Delta = 0 \rightarrow \zeta^2 - 1 = 0 \rightarrow \zeta^2 = 1 \rightarrow \zeta = 1$$
$$\Delta < 0 \rightarrow \zeta^2 - 1 < 0 \rightarrow \zeta^2 < 1 \rightarrow \zeta < 1$$

PÓLOS:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n\, s + \omega_n^2 = 0 \Longleftrightarrow s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$0 < \zeta < 1$

Pólos complexos conjugados

Sistema subamortecido

$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

$$-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\sigma \pm j\omega_d$$

$\frac{\sigma}{\omega_d} = \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}}$ decaimento

$\zeta = 1$

Pólo real duplo

Sistema criticamente amortecido

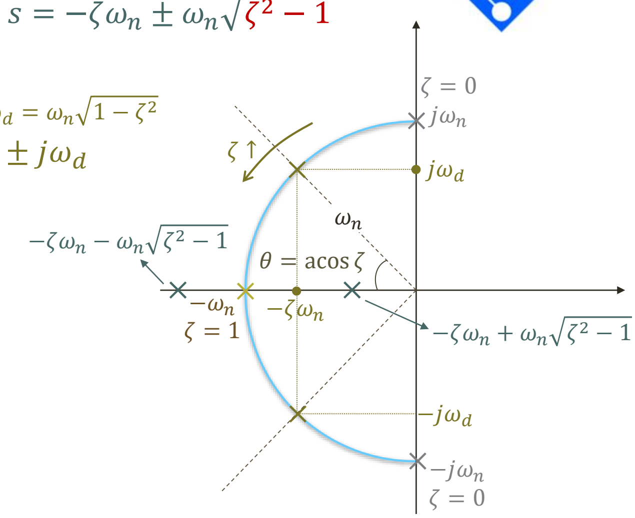
$$-\zeta\omega_n = -\omega_n$$

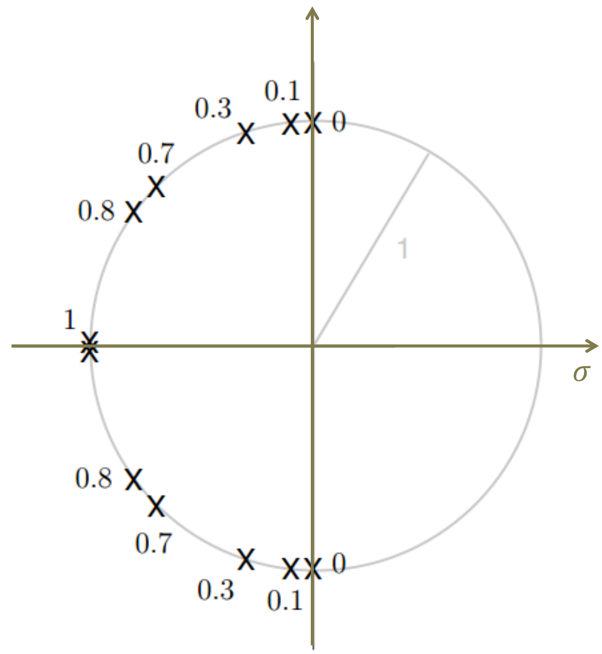
$\zeta > 1$

Pólos reais distintos

Sistema sobreamortecido

$$-\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

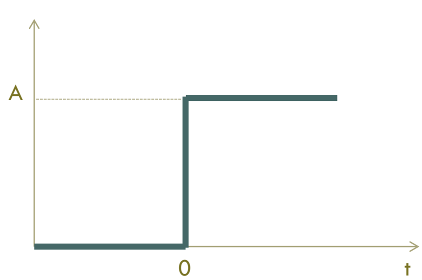




Localização dos pólos para $\omega_n = 1$ e $\zeta = 0; 0{,}1; 0{;}3; 0{,}7; 0.8; 1$.

RESPOSTA DE UM SISTEMA DE 2A ORDEM A UMA FUNÇÃO DEGRAU

$$F(t) = Au(t)$$



$$Y(s) = \boxed{\frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n\, s + \omega_n^2}}\boxed{\frac{A}{s}} = 0$$

Função de transferência de um sistema de 2a ordem

Transformada de Laplace da função degrau com amplitude A

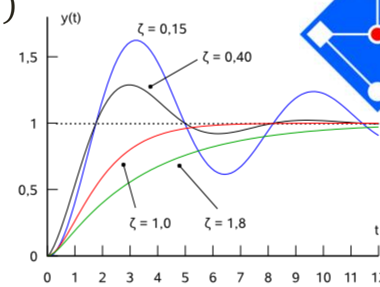
$$Y(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n\, s + \omega_n^2}\frac{A}{s} = \frac{KA\omega_n^2}{s(s-p_1)(s-p_2)}$$

$$s^2 + 2\zeta\omega_n\, s + \omega_n^2 = 0$$

as duas raízes da equação característica

$$p_1 = \omega_n\left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$$

$$p_2 = \omega_n\left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$$



Dependendo do valor de ζ podem-se distinguir três casos:

- $0 < \zeta < 1$ resposta subamortecida ou oscilatória ("underdamped")
- $\zeta = 1$ resposta criticamente amortecida
- $\zeta > 1$ resposta superamortecida ou não-oscilatória ("overdamped")

RESPOSTA SUBAMORTECIDA

$0 < \zeta < 1$

$$y(t) = KA\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t + \varphi\right)\right]$$

Polos complexos (conjugados simétricos). Sistema estável e subamortecido.

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

Portanto, a frequência da oscilação de uma resposta subamortecida é dada por

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \text{ , em radianos/tempo}$$

$$\omega_d = \frac{\omega_d}{2\pi}\sqrt{1-\zeta^2} \text{ , em ciclos/tempo}$$

Para $\zeta = 1$ tem-se $\omega_d = \omega_n$

O efeito do amortecimento é reduzir a frequência de oscilação a um valor inferior ao da frequência natural

RESPOSTA SUPERAMORTECIDA

$\zeta > 1$

$$y(t) = KA\left[1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}\left(\frac{e^{-s_2 t}}{s_2} - \frac{e^{-s_1 t}}{s_1}\right)\right]$$

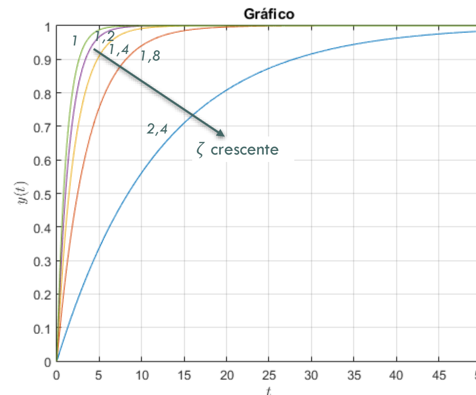
$$s_1 = -p_1 = \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n$$

$$s_2 = -p_2 = \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n$$

```
wn=1;
t=0:0.1:50;

for zeta=1:0.2:2.4
  zeta2=sqrt(zeta^2-1);
  s1=(zeta-zeta2)*wn;
  s2=(zeta+zeta2)*wn;
  y=1+wn/(2*zeta2)*(exp(-s2.*t)/s2-exp(-s1.*t)/s1);
  plot(t,y)
  hold on;
end
```

Polos reais distintos. Sistema estável e superamortecido.



observe que a resposta é não-oscilatória e sem overshoot, e se torna mais lenta à medida que ζ aumenta

RESPOSTA CRÍTICA

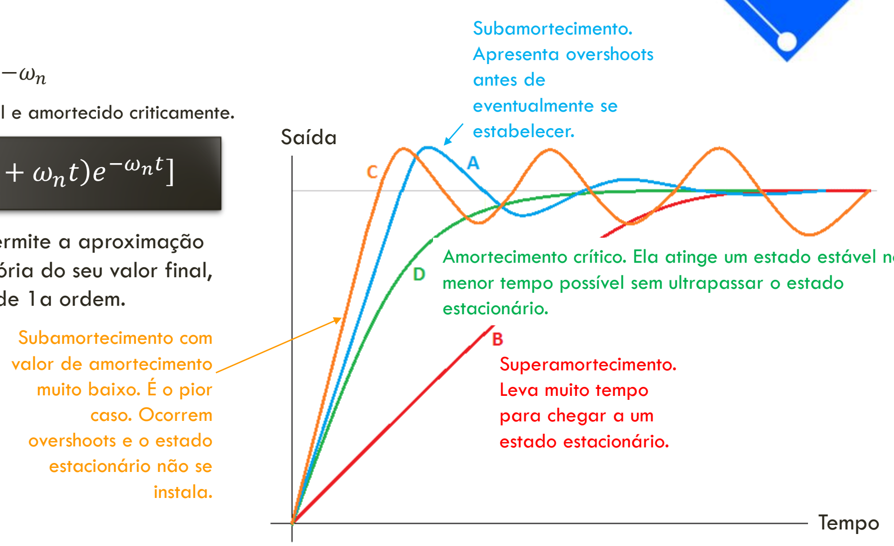
$\zeta = 1$

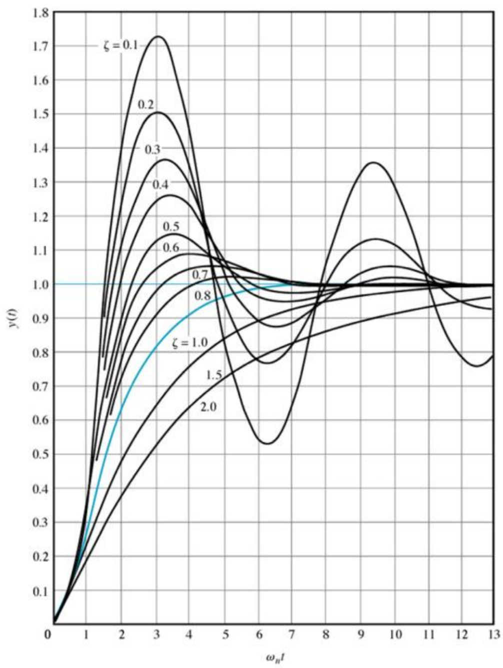
$$p_1 = p_2 = -\zeta\omega_n = -\omega_n$$

Polos reais iguais. Sistema estável e amortecido criticamente.

$$y(t) = KA\left[1 - (1 + \omega_n t)e^{-\omega_n t}\right]$$

A resposta para $\zeta = 1$ permite a aproximação mais rápida e não oscilatória do seu valor final, semelhante a um sistema de 1a ordem.





Respostas ao degrau unitário do protótipo de um sistema de segunda ordem, geradas como funções do tempo normalizado, $\omega_n t$ para vários valores de ζ.

RESUMO: SISTEMAS DE SEGUNDA ORDEM

subamortecido

$0 < \zeta < 1 \quad p_1, p_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

criticamente amortecido

$\zeta = 1 \quad p_1, p_2 = -\omega_n$

sobreamortecido

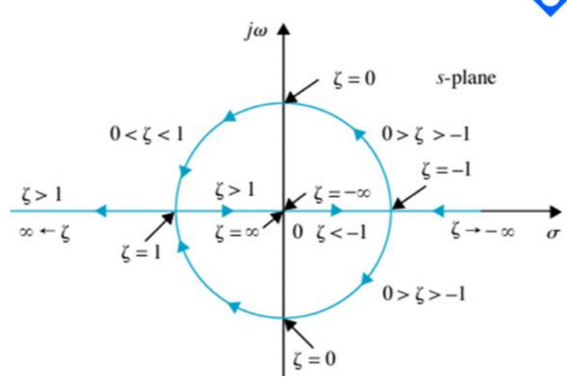
$\zeta > 1 \quad p_1, p_2 = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$

não amortecido

$\zeta = 0 \quad p_1, p_2 = \pm j\omega_n$

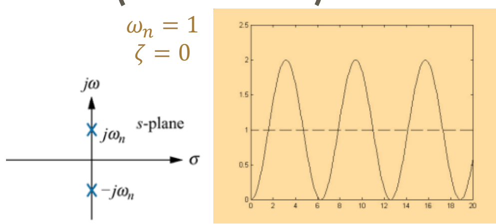
negativamente amortecido

$\zeta < 0 \quad p_1, p_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

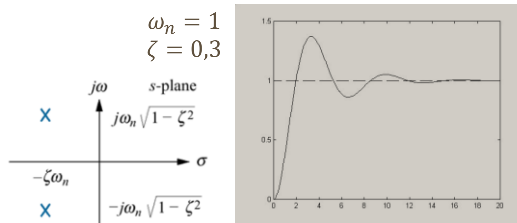


ω_n permanece constante enquanto a taxa de amortecimento ζ varia de $-\infty$ a $+\infty$.

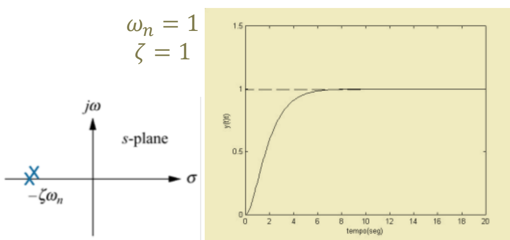
RESPOSTA NO TEMPO: SISTEMA DE 2ª ORDEM (EXEMPLOS)



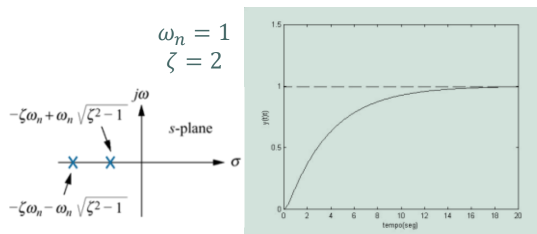
Sistema sem amortecimento



Sistema subamortecido



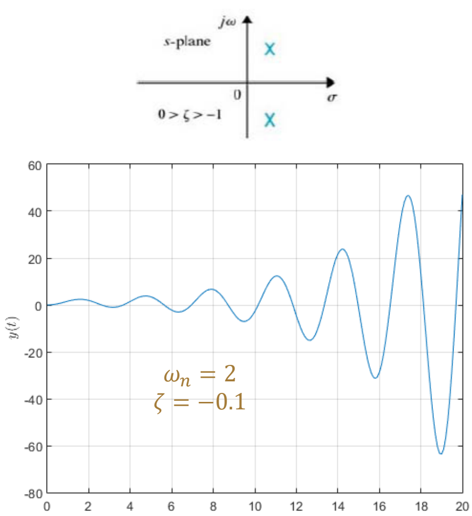
Sistema criticamente amortecido

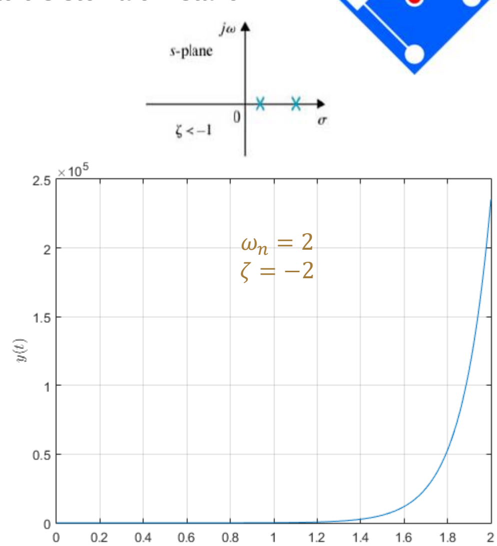


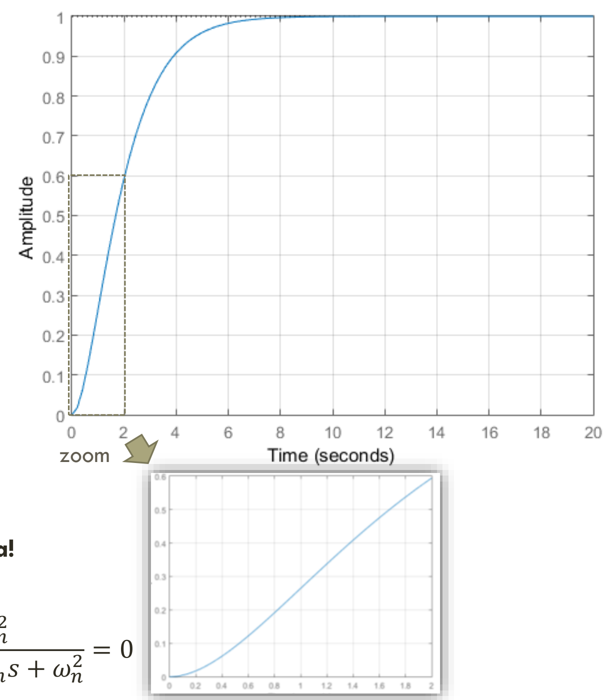
Sistema sobreamortecido

SISTEMAS INSTÁVEIS

se $\zeta < 0$ então o **sistema** é **instável**







A derivada na origem é nula!

(Teorema do Valor Inicial):

$$\lim_{t\to 0+} y(t) = \lim_{s\to\infty} \frac{s\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = 0$$

VAMOS OLHAR MAIS ATENTAMENTE A CADA RESPOSTA...

SISTEMA SUBAMORTECIDO

No caso $0 < \zeta < 1$,
A resposta ao degrau unitário

$$y(t) = K\left\{1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left[\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t\right) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t\right)\right]\right\}$$

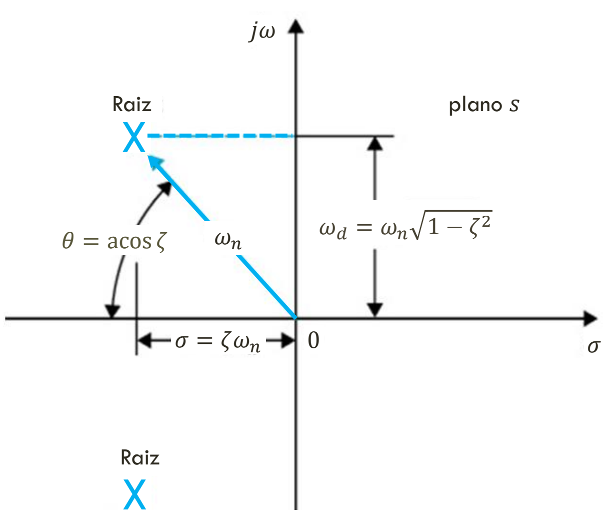
ou:

$$y(t) = K\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t + \varphi\right)\right]$$

pode ter muitas formas diferentes, dependendo dos valores de:
ζ (*coeficiente de amortecimento*),
ω_n (*frequência natural*)
K (*ganho*)

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

RESUMO: SISTEMA DE SEGUNDA ORDEM SUBAMORTECIDO



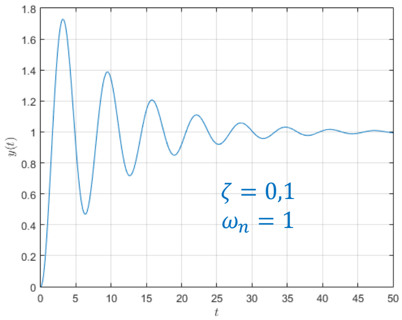
Verifique as relações entre a localização das raízes da equação característica e σ, ζ, ω_n e ω_d.

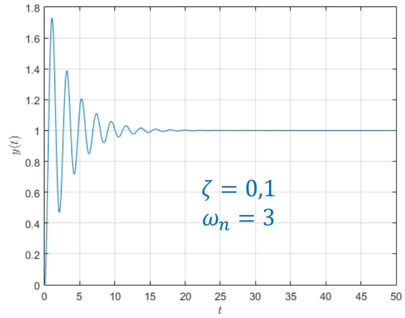
σ: parte real das raízes

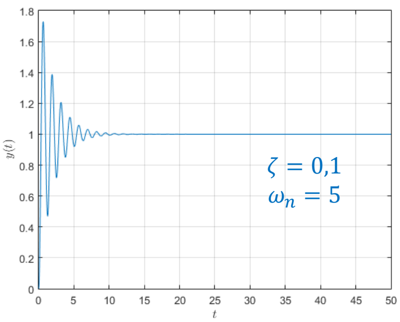
ω_n distância radial das raízes até a origem do plano s

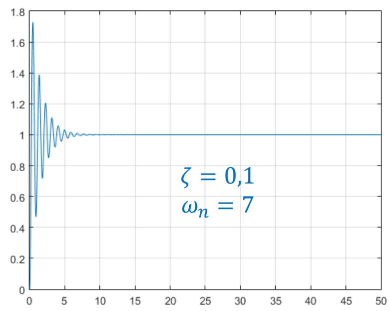
ζ : cosseno do ângulo entre a linha radial até as raízes e o eixo negativo quando as raízes estão semi-plano esquerdo do plano-s, ou,

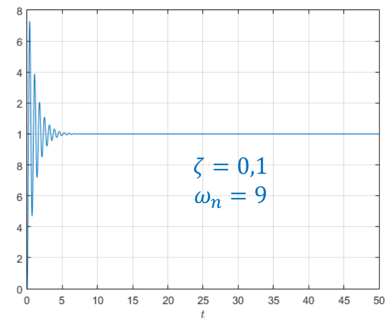
$\zeta = \cos\theta$

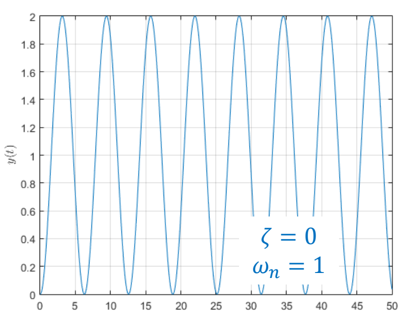

$\zeta = 0{,}1$
$\omega_n = 1$

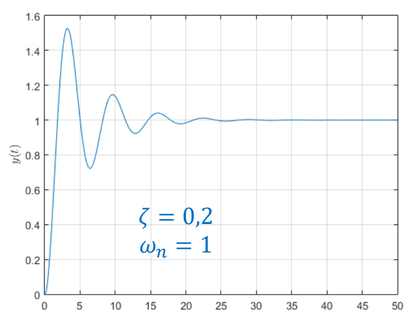

$\zeta = 0{,}1$
$\omega_n = 3$

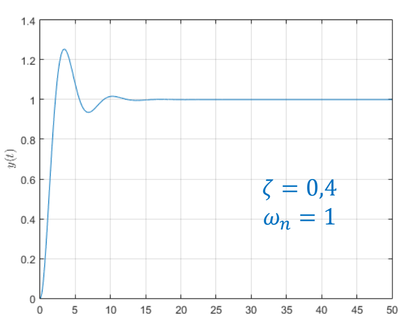

$\zeta = 0{,}1$
$\omega_n = 5$

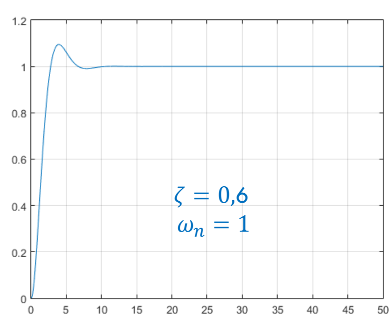

$\zeta = 0{,}1$
$\omega_n = 7$

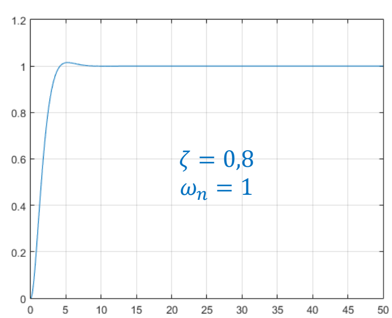

$\zeta = 0{,}1$
$\omega_n = 9$


$\zeta = 0$
$\omega_n = 1$


$\zeta = 0{,}2$
$\omega_n = 1$

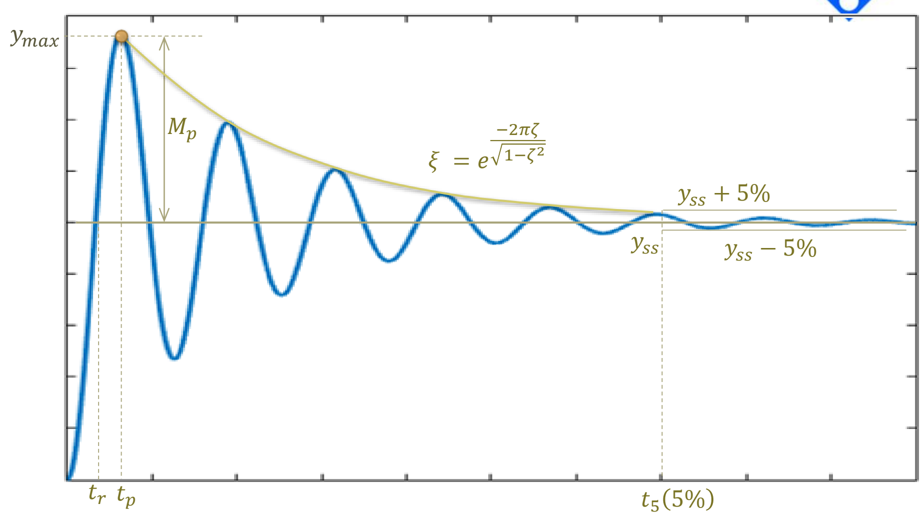

$\zeta = 0{,}4$
$\omega_n = 1$


$\zeta = 0{,}6$
$\omega_n = 1$


$\zeta = 0{,}8$
$\omega_n = 1$

RESPOSTA AO DEGRAU

Vamos calcular alguns parâmetros para a *resposta* $y(t)$ *ao **degrau unitário*** de um sistema de 2a ordem.



RESPOSTA EM ESTADO ESTACIONÁRIO y_{ss}

$$Y(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n\, s + \omega_n^2}\frac{1}{s}$$

Os teoremas do valor inicial (TVI) e do valor final (TVF) permitem que se descubra o valor inicial $y(0^+)$ e o valor final $y(\infty)$ dos sinais $y(t)$ cujas Transformadas de Laplace $Y(s)$ sejam conhecidas,

$$y(0^+) = \lim_{t\to 0^+} y(t) = \lim_{s\to\infty} s\, Y(s)$$

$$y(0^+) = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\, Y(s)$$

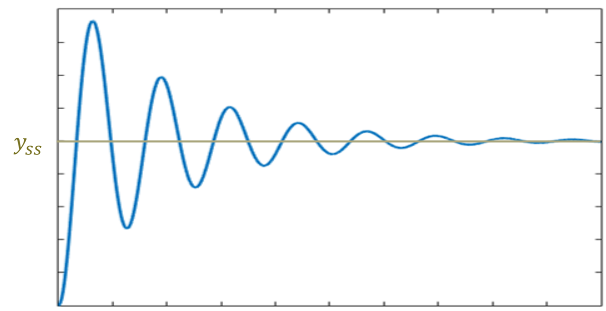
CONT...

y_{ss} **resposta em estado estacionário** ou saída em regime permanente (*steady state output*). Nesse caso, pelo TVF:

$$y_{ss} = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\,Y(s)$$

$$\lim_{s\to 0} s \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n\, s + \omega_n^2} \frac{1}{s}$$

$$\boxed{y_{ss} = K}$$



TEMPO DE SUBIDA t_r
(*RISING TIME*)

Tempo necessário para que a resposta ao degrau, $y(t)$, atinja o valor final $y_{ss} = K$ pela primeira vez.

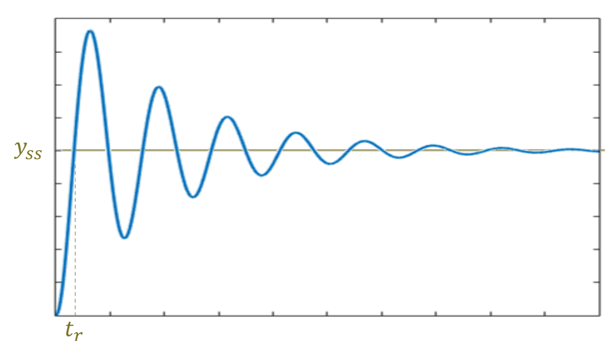
$$y(t) = K = K\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t_r} \sin(\omega_d t_r + \varphi)\right]$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t_r} \sin(\omega_d t_r + \varphi) = 0$$

$$\sin(\omega_d t_r + \varphi) = 0 \rightarrow \omega_d t_r + \varphi = \pi$$

$$\boxed{t_r = \frac{\pi - \varphi}{\omega_d} = \frac{\pi - \mathrm{atan}\left(\sqrt{1-\zeta^2}/\zeta\right)}{\omega_d}}$$



Alguns autores vinculam o tempo de subida à frequência natural: aproximadamente $1{,}8/\omega_n$

INSTANTE DE PICO t_p
(PEAK TIME)

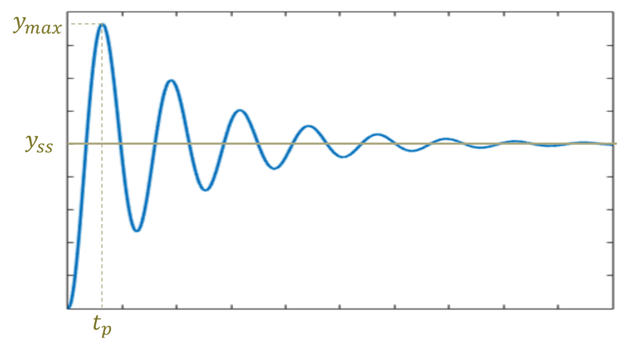
É o instante em que a reposta ao degrau $y(t)$ atinge o primeiro pico.

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0$$

$$\sin(\omega_d t) = 0$$

$$\omega_d t = 0, \pi, 2\pi, \ldots$$

$$\boxed{t_p = \frac{\pi}{\omega_d}}$$

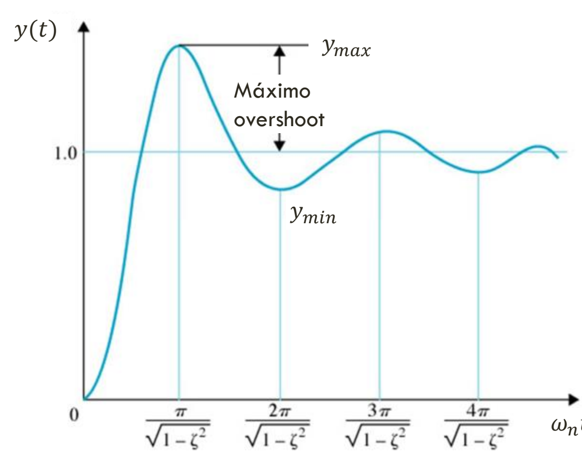


SOBRESSINAL E SUB-SINAL

$$\omega_d t = \pi, 2\pi, \ldots$$

$$t = n\frac{\pi}{\omega_d} \quad n = 1,2,3 \ldots$$

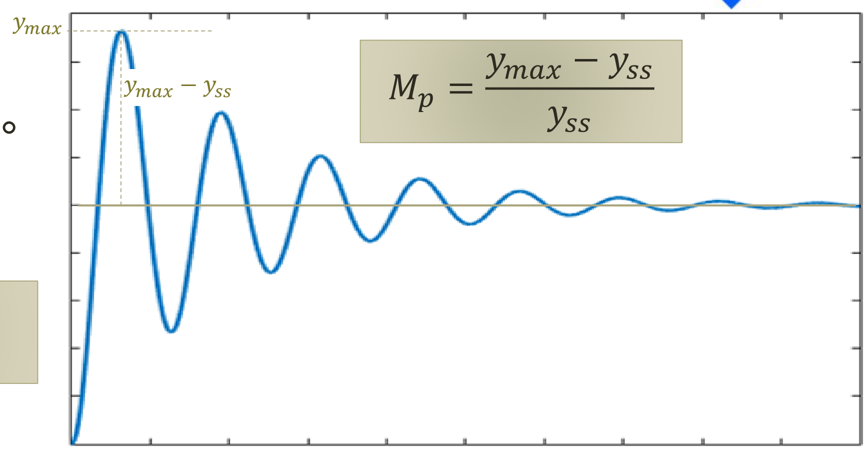
Os sobressinais e os sub-sinais da resposta ocorrem em intervalos periódicos.
Sobressinais ocorrem em valores ímpares, isto é, $n = 1, 3, 5, \ldots$ e os sub-sinais ocorrem nos valores pares de n.



SOBRESSINAL MÁXIMO
(OVERSHOOT)

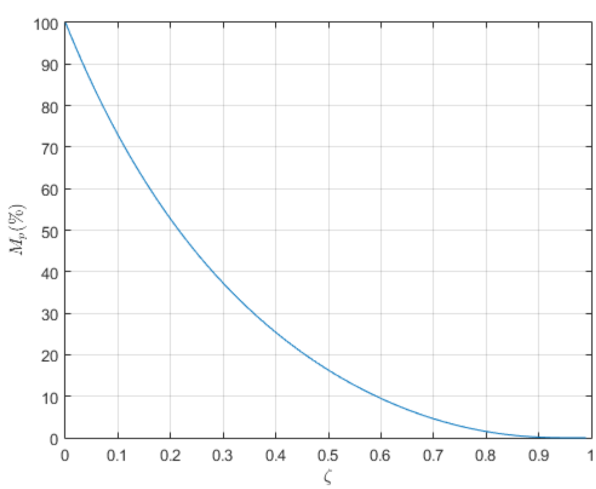
M_p é a diferença entre o valor de pico e o valor final y_{ss}. É usual a indicação em termos percentuais.

$$M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$



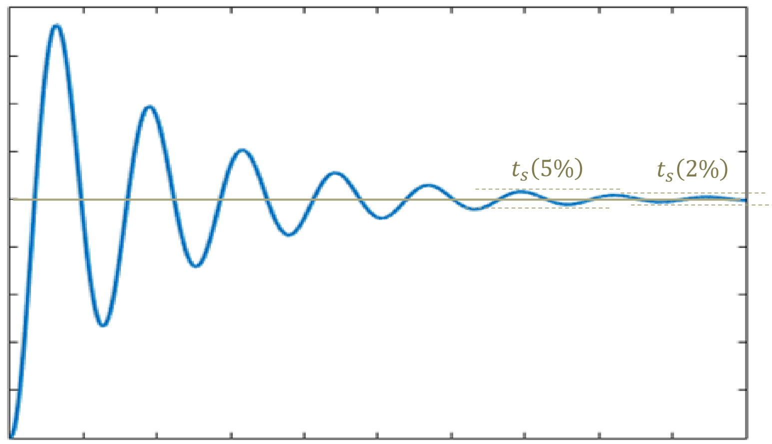
$$M_p = \frac{y_{max} - y_{ss}}{y_{ss}}$$

RELAÇÃO ENTRE O MÁXIMO SOBRESSINAL PERCENTUAL E A TAXA DE AMORTECIMENTO.



TEMPO DE ACOMODAÇÃO t_s
(SETTLING TIME)

t_s é tempo necessário para a resposta ficar dentro de uma faixa do valor final, em geral de $\pm 2\%$ a $\pm 5\%$;



$$y(t) = K\left[1 - \boxed{\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}} \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t + \varphi\right)\right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}$$

Para t_s com $\pm 2\%$ de tolerância,

$$\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\sigma t} = 0{,}02$$

$$t_s = \frac{4}{\sigma}$$

Verifica-se que o numerador da equação anterior varia de 3,91 – 4,74 para ζ variando de 0 a 0,9.

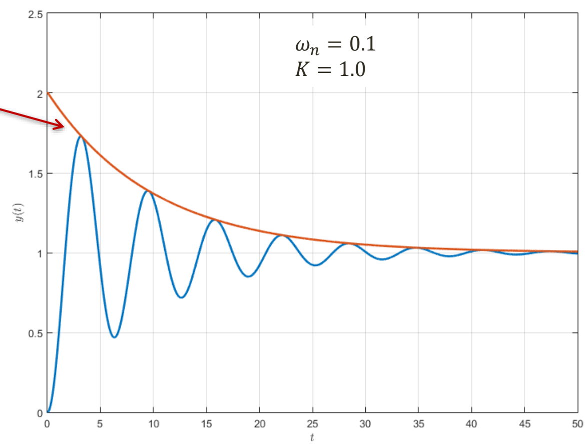
Para t_s com $\pm 5\%$ de tolerância,

$$\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\sigma t} = 0{,}05$$

$$t_s = \frac{3}{\sigma}$$

ENVELOPE DE DECAIMENTO

$$E = K\left[1 + \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\boxed{e^{-\sigma t}}\right]$$



A velocidade de decaimento da resposta transitória depende do valor da constante de tempo
$T = 1/\sigma$

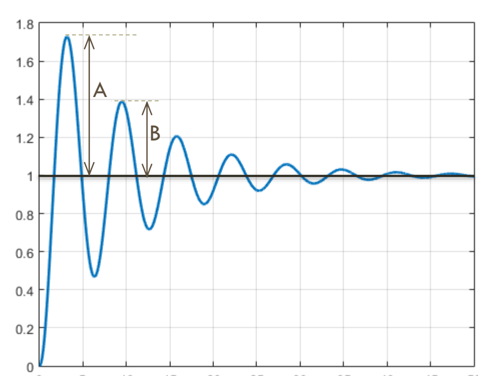
RELAÇÃO DE DECAIMENTO ξ
(DECAY RATIO)

É a razão entre as alturas de dois picos sucessivos. Em sistemas de segunda ordem, ξ é constante para par sucessivo de picos.

$$A = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$B = e^{-\frac{3\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$\xi = \frac{B}{A} = e^{\frac{-2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$



$Y(s) = \dfrac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n\, s + \omega_n^2}$	
Instante de pico	$t_p = \dfrac{\pi}{\omega_d}$
Sobressinal	$M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$
Tempo de acomodação	$t_{s,2\%} = \dfrac{4}{\sigma}$ $\quad t_{s,5\%} = \dfrac{3}{\sigma}$
Tempo de subida	$t_r = \dfrac{\pi - \text{atan}\left(\sqrt{1-\zeta^2}/\zeta\right)}{\omega_d}$
Resposta em estado estacionário	$y_{ss} = K$
Relação de decaimento	$\xi = e^{\frac{-2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$

ESTABILIDADE E VELOCIDADE DE RESPOSTA

A estabilidade dinâmica de um sistema implica que a resposta não irá crescer indefinidamente quando a entrada é finita (BIBO stability).

A velocidade de resposta indica o quão rápido o sistema responde a uma entrada ou, o quão rápido a resposta permanente cresce ou diminui se o sistema é oscilatório; ou cai, se o sistema é não oscilatório.

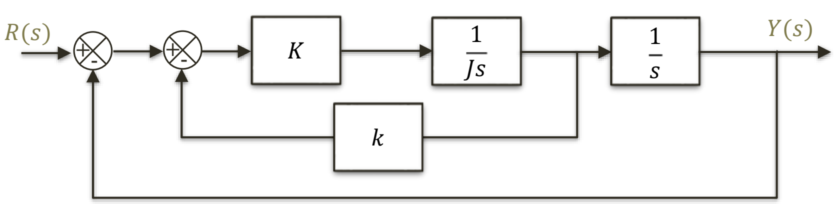
Essas duas características não são completamente independentes. Em particular, sistemas não oscilatórios (sobreamortecidos) as duas propriedades estão fortemente correlacionadas.

EXERCÍCIO

Defina cada um dos sistemas abaixo como não amortecido, subamortecido, criticamente amortecido, superamortecido. Determine o ganho, a razão de amortecimento e, se aplicável, a frequência natural.

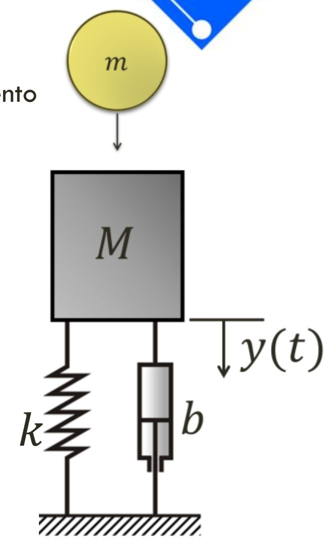
- $F(s) = \dfrac{25}{20s^2 + 36s + 45}$
- $F(s) = \dfrac{48}{s^2 + 10s + 16}$
- $F(s) = \dfrac{15}{25s^2 + 16}$
- $F(s) = \dfrac{100}{25s^2 + 40s + 16}$

CONT...



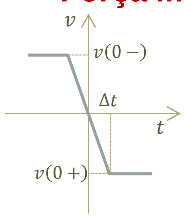
Ogata, pg 212. Determine o valor de K e k para que a resposta do sistema em cadeia fechada a uma entrada degrau de amplitude unitária tenha sobressinal máximo de 25% e o tempo de pico seja 2s. Suponha $J = 1\ Kg\ m^2$

FUNÇÃO IMPULSO



Devido ao impulso, a massa m terá velocidade inicial v_0 e deslocamento inicial nulo (intervalo de tempo muito pequeno para desenvolver deslocamento).

Força impulsiva provoca mudança instantânea na velocidade



$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2\, y(t)$$

Condições iniciais da massa M: $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 0$

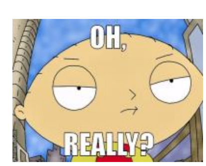
Velocidade inicial da esfera de massa m: $v(0-) = v_0$

$$Y(s) = \boxed{2mv_0}\frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n\, s + \omega_n^2}$$

Magnitude A da função impulso.

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{AK\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n\, s + \omega_n^2}\right]$$

Depende do valor do amortecimento...
Subamortecido: polos conjugados complexos
Amortecimento crítico: polos iguais reais
Superamortecido: polos reais distintos



SISTEMA SUBAMORTECIDO

$$Y(s) = A\frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n\, s + \omega_n^2}$$

$$y(t) = \frac{\omega_n KA}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\sigma t} \sin \omega_d t$$

EXEMPLO

Determine a resposta do sistema com $M = 1kg$, $b = 2Ns/m$, $k = 50N/m$, para o impacto de uma esfera de $m = 0{,}015kg$ solta de uma altura $d = 1{,}45m$.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{50}{1}} = 7{,}07$$

$$2\zeta\omega_n = \frac{b}{m} = 2 \therefore \zeta\omega_n = \sigma = 1 \to \zeta = \frac{1}{\omega_n} = 0{,}141$$

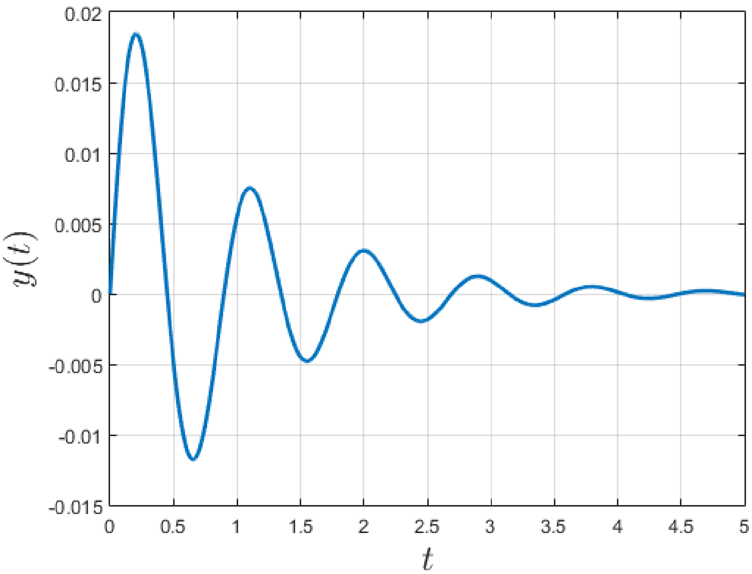
$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = \sqrt{50(1-0{,}141^2)} = 7, \quad \sqrt{1-\zeta^2} = 0{,}99$$

$$K = \frac{1}{k} = \frac{1}{50} = 0{,}02$$

$$\boldsymbol{y(t) = 0{,}02286e^{-t}\sin 7t}$$

```
%% Exemplo Impacto (Sistemas Dinâmicos, OGATA, pg 257):
t=0:0.01:5; %s
M=1; %kg
m=0.015; %kg
b=2; %Ns/m
k=50; % N/m
d=1.45; % m
g=9.81;  %m/s^2

%% Parâmetros
v0=sqrt(2*g*d);
A=2*m*v0;
wn=sqrt(k/M);
sigma=b/(2*M);
zeta=sigma/wn;
wd=sqrt(1-zeta^2)*wn;
K=1/k;
Ampl=wn*K*A/sqrt(1-zeta^2);
y=Ampl*exp(-sigma.*t).*sin(wd.*t);
plot(t,y,'LineWidth',2)
xlabel('$$t$$','Interpreter','latex','FontSize',18)
ylabel('$$y(t)$$','Interpreter','latex','FontSize',18)
grid on
```



EXEMPLO

Obter a resposta para o impulso unitário do seguinte sistema,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{1}{s^2 + 0{,}2s + 1}$$

Usando MatLab,

```
%% Funcao Impulso
num=[0  0    1];
den=[1  0.2  1];
impulse(num,den,50);
grid
title('Resposta Impulso unitário para G(s)','FontSize',12)
```

CONT...

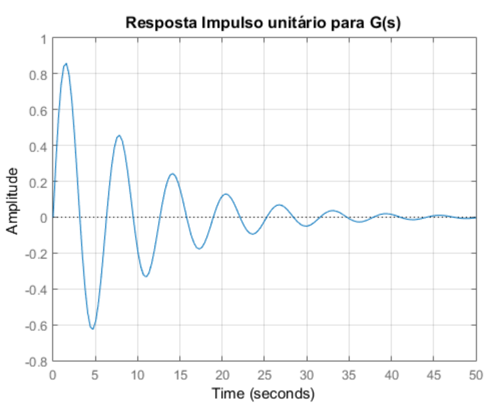
Para condições iniciais nulas, a resposta de $G(s)$ ao impulso unitário é a mesma de $sG(s)$ à função degrau unitária.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = Y(s) = \frac{1}{s^2+0,2s+1} = G(s).1$$

$$= \frac{s}{s^2+0,2s+1}\frac{1}{s} = [sG(s)].\frac{1}{s}$$

Usando MatLab,

```
%% Funcao Degrau
num=[0  1    0];
den=[1  0.2  1];
step(num,den,50);
grid
title('Resposta Degrau unitário para sG(s)','FontSize',12)
```



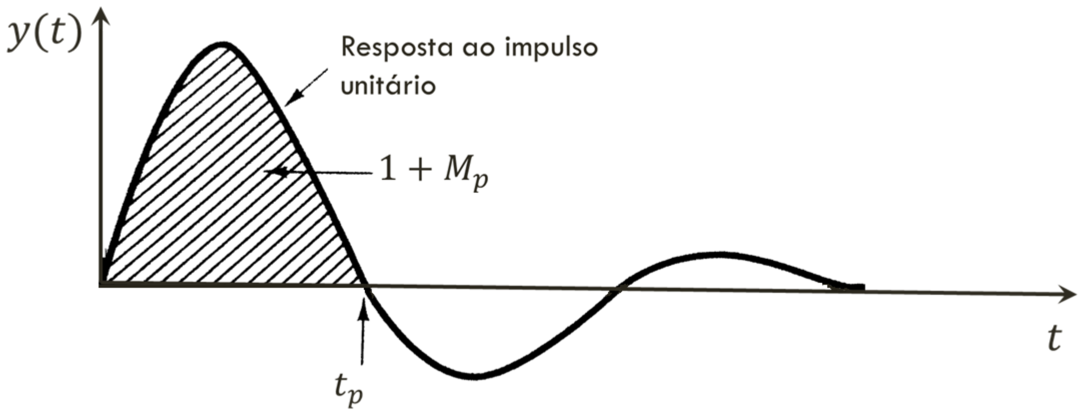


Figura extraída de [6], pág. 163.

FUNÇÃO IMPULSO

Subamortecido

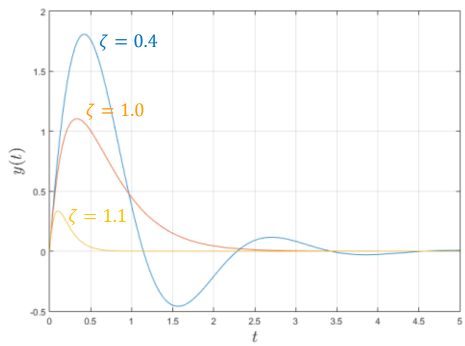
$$y(t) = \frac{\omega_n K A}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\sigma t} \sin \omega_d t$$

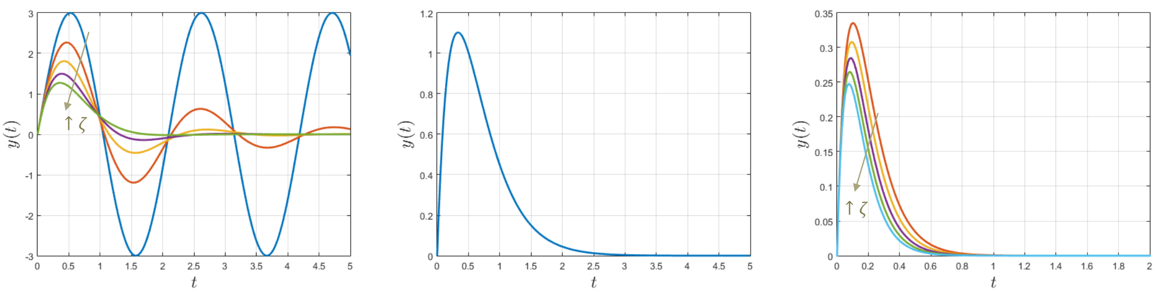
Criticamente amortecido

$$y(t) = K A \omega_n^2 t e^{-\omega_n t}$$

Superamortecido

$$y(t) = \frac{\omega_n K A}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left[e^{-\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t} - e^{-\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t} \right]$$





COMO SERIA A RESPOSTA...???

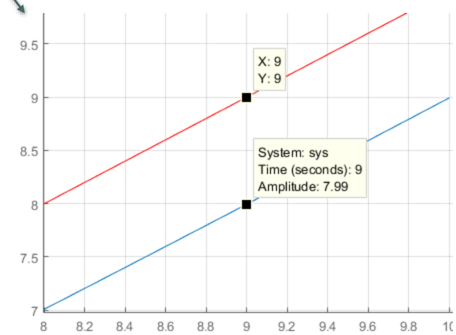
Obter a resposta para uma **função rampa** do seguinte sistema,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+s+1}\frac{1}{s^2} = \frac{1}{(s^2+s+1)\,s}\frac{1}{s} = \left[\frac{G(s)}{s}\right].\frac{1}{s}$$

Usando MatLab,

```
%% Funcao Rampa
num=[0  0  1];
den=[1  1  1  0];
step(num,den,50);
grid
title('Resposta Degrau unitário para G(s)/s','FontSize',12)
```



$$y(t) = t - \frac{2\zeta}{\omega_n} + e^{-\sigma t}\left[\frac{2\zeta}{\omega_n}\cos\omega_d t + \frac{2\zeta^2 - 1}{\omega_d}\sin\omega_d t\right]$$

A vibração de uma máquina pode ser detectada com uma barra engastada desde que a barra consiga vibrar à mesma frequência da máquina.

E A RESPOSTA PERMANENTE?!?!

RESPOSTA DE SISTEMAS DE 2ª ORDEM A UMA FUNÇÃO HARMÔNICA

$u(t) = A \sin \omega t$

$$Y(s) = \boxed{\frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}} \boxed{\frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}}$$

Transformada de Laplace de $u(t)$

$$Y(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2} + \frac{A_3}{s - p_3} + \frac{A_4}{s - p_4}$$

Os quatro polos de $Y(s)$ são.

$$p_1 = \left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n$$
$$p_2 = \left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n$$

$$p_3 = i\omega$$
$$p_4 = -i\omega$$

O comportamento da resposta $y(t)$ dependerá da natureza dos pólos do sistema.

RESPOSTA SUBAMORTECIDA

$0 < \zeta < 1$

Um par de raízes complexas conjugadas (p_1 e p_2) e o par de raízes puramente imaginárias (p_3 e p_4) resultarão na seguinte expressão

$$y(t) = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t + e^{-\zeta \omega_n t}[A_3 \cos \omega_d t + A_4 \sin \omega_d t]$$

Note que para $t \to \infty$, o termo contendo $e^{-\zeta \omega_n t}$ tende a zero,

$$y_{ss}(t) = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t$$

Esta solução estacionária $y_s(t)$ é válida para qualquer $\zeta > 0$.

A amplitude de saída é diferente da amplitude A de entrada e depende do ganho K e da relação de frequências r.

a resposta atrasa em relação à entrada por um ângulo de fase φ

$$y_s(t) = \boxed{\frac{KA}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}} \sin(\boxed{\omega t} + \boxed{\varphi})$$

a resposta é também uma onda senoidal com freqüência ω igual à onda senoidal do sinal de entrada

$$\varphi = -\tan^{-1}\left(\frac{2\zeta r}{1 - r^2}\right)$$

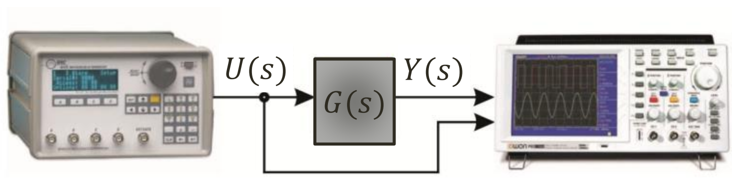
$$r = \frac{\omega}{\omega_n}$$

Quando um sinal senoidal é aplicado na entrada de um sistema linear, será obtido na saída também um sinal com mesma forma e freqüência do sinal de entrada, porém haverá uma alteração na amplitude e na fase do sinal.

RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

É a resposta em regime permanente de um sistema submetido a um sinal de entrada senoidal.

Varia-se a freqüência do sinal de entrada dentro de um certo intervalo e estuda-se a resposta resultante.



Razão de amplitude normalizada para a resposta estacionária,

$$M_s(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

pode ser maior ou menor do que 1, dependendo de r e ζ.

$M_s(\omega)$ atinge seu máximo para,

$$\frac{dM_s(\omega)}{d\omega} = \left(\sqrt{1-2\zeta^2}\right)\omega_n = \omega_r$$

FREQUÊNCIAS IMPORTANTES...

$$\omega_r = \omega_n\left(\sqrt{1-2\zeta^2}\right)$$

freqüência de ressonância: máxima amplitude

freqüência natural: amplitude infinita para sistemas sem amortecimento; defasagem $\varphi = -90^0$

$$\omega_n$$

freqüência natural amortecida: aquela que o sistema vibra livremente

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

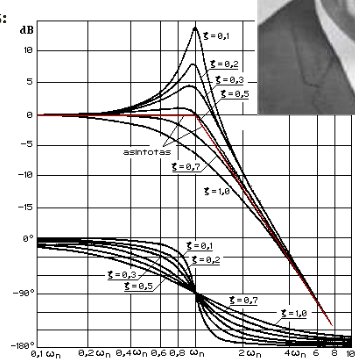
DIAGRAMA DE BODE

Os diagramas de Bode são uma das formas de caracterizar sinais ***no domínio da frequência.***

O diagrama de Bode e representado em por duas curvas:

Diagrama de módulo
Magnitude em dB $M(\omega)|_{dB} = 20\log M(\omega)$ vs $\log r,\omega$

Diagrama de fase
Ângulo de fase em graus φ vs r,ω



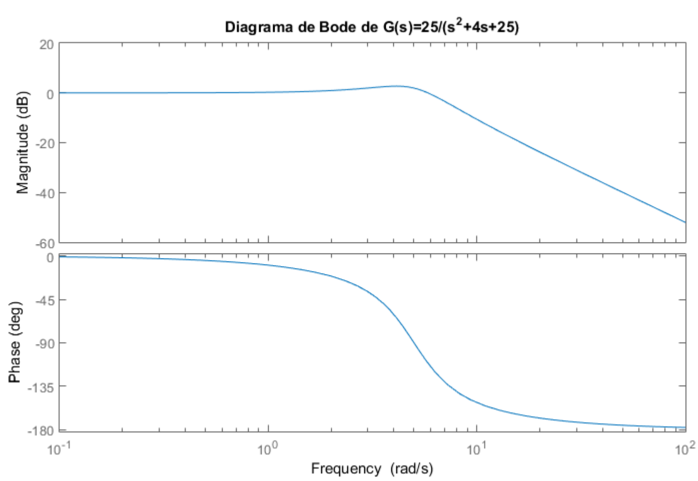
Hendrik Wade Bode (1905-1982)

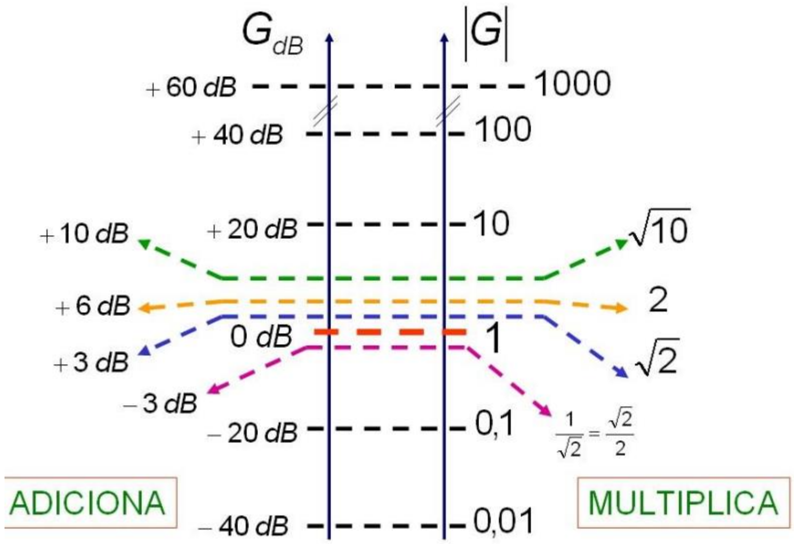
MATLAB

Construa o Diagrama de Bode da seguinte função:

$$G(s) = \frac{25}{s^2+4s+25}$$

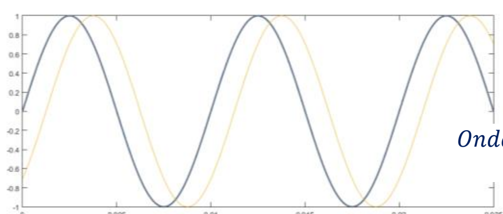
```
num=[0 0 25];
den=[1 4 25];
bode(num,den)
title('Diagrama de Bode de G(s)=25/(s^2+4s+25)')
```



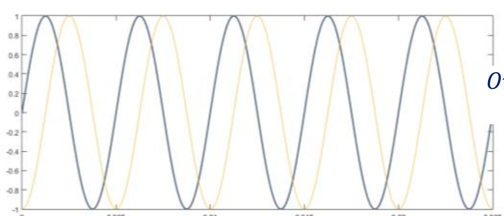


Relação entre ganho absoluto e valor correspondente em dB.
Figura extraída de CONTROLO DE SISTEMAS DINÂMICOS, de Rui Neves-Silva.

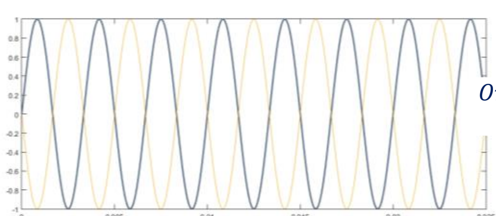
in
out



$Onda\ senoidal\ de\ 100Hz$
$Atraso\ de\ 45^0$

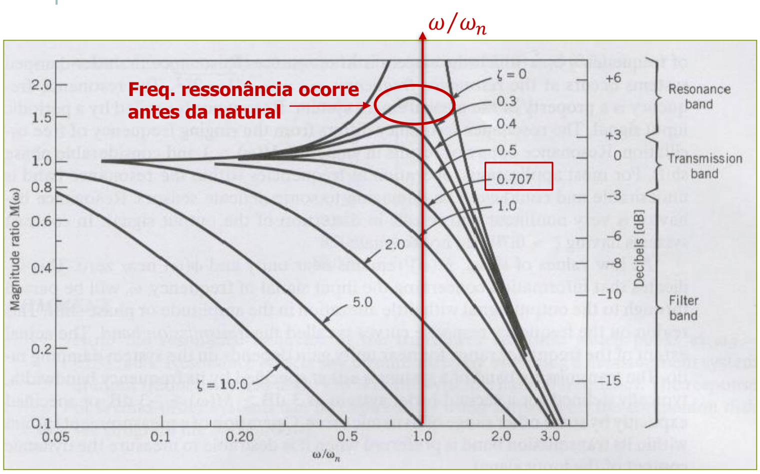


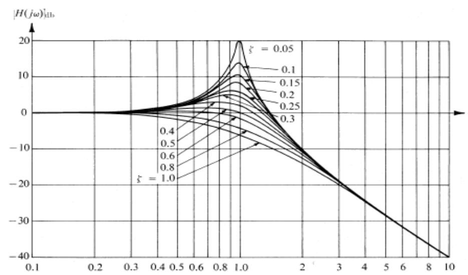
$Onda\ senoidal\ de\ 200Hz$
$Atraso\ de\ 90^0$



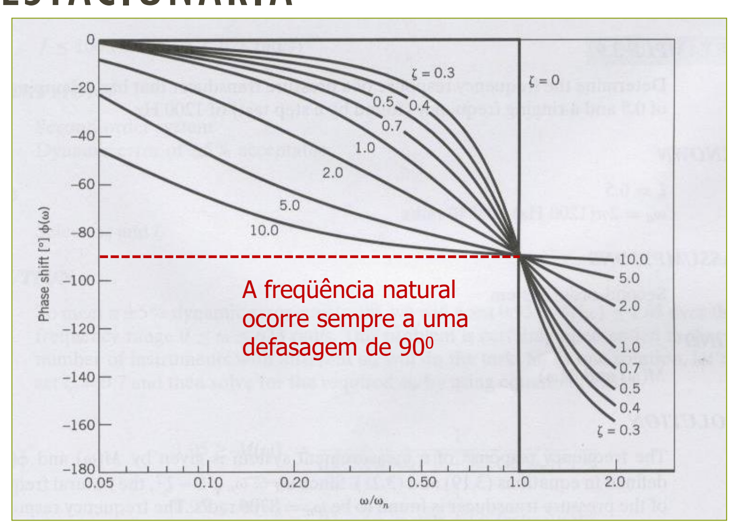
$Onda\ senoidal\ de\ 300Hz$
$Atraso\ de\ 180^0$

RESPOSTA NA FREQÜÊNCIA (SEM TRANSIENTE)



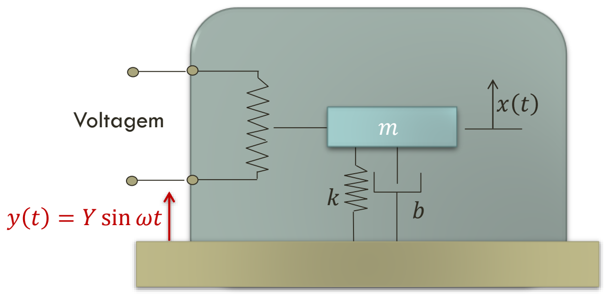


RESPOSTA NA FREQUÊNCIA DA PARTE ESTACIONÁRIA



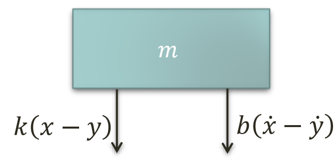
a resposta atrasa em relação à entrada por um ângulo de fase φ. Pode-se verificar que φ tende assintoticamente para 180^o à medida que ω aumenta

MODELAGEM DE UM ACELERÔMETRO



$y(t)$: movimento da base

$x(t)$: movimento da massa sísmica



$z(t) = x(t) - y(t)$

Qual a relação entre a compressão do sistema $z(t)$ e a aceleração da base $\ddot{y}(t)$?!?!

EXERCÍCIO

Qual a frequência natural mínima aceitável para um acelerômetro se desejamos medir sinais de até $10\ kHz$ com não mais de 3% de erro na amplitude e $-0{,}75^o$ na fase? Assume-se uma relação de amortecimento $\zeta = 0{,}05$.