

Exemplo 5.3

Deseja-se projetar um controlador $H(s)$ do tipo PID para o sistema ilustrado na Figura ?? onde a planta é dada por:

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}.$$

O controlador $H(s)$ deve ser tal que garanta as seguintes especificações:

- 1 Erro estacionário $e_{ss} = 0$ para entrada a degrau;
- 2 Tempo de assentamento $t_s < 4\text{seg}$ (critério de 2%);
- 3 Máximo sobresinal $M_p < 5\%$.

O controlador PID possui a seguinte função de transferência:

$$\begin{aligned} H(s) &= K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \Rightarrow \\ &= K_p \frac{(T_d T_i s^2 + T_i s + 1)}{T_i s} \Rightarrow \\ &= K_p \frac{(s + z_1)(s + z_2)}{s} \end{aligned}$$

Onde z_1 e z_2 podem ser obtidos através da solução da seguinte equação:

$$T_d s^2 + s + \frac{1}{T_i},$$

cuja solução é:

$$s = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4T_d}{T_i}}}{2T_d}.$$

Ou seja, um controlador PID introduz uma função de transferência com um pólo na origem e dois zeros que podem ser alocados através da escolha de T_d e T_i . Ao invés de selecionar valores para T_d e T_i é mais interessante alocar os zeros z_1 e z_2 (lembre-se que na verdade os zeros são $-z_1$ e $-z_2$) já que vamos utilizar o lugar das raízes.

Vamos escolher os zeros de tal forma a obter o lugar das raízes com parte complexa. Vamos fazer por exemplo, $z_1 = -3 + j1$ e $z_2 = z_1^*$. Fazendo isto, obtemos a seguinte função de transferência em malha aberta:

$$G(s)H(s) = K_p \frac{(s^2 + 6s + 10)}{s^3 + 5s^2 + 6s}.$$

O lugar das raízes resultante está ilustrado na Figura 1.

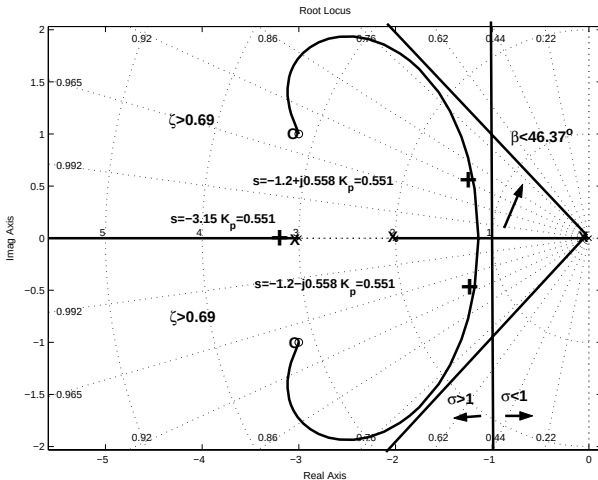


Figura: Lugar das raízes e lugar geométrico para $t_s < 4\text{seg}$ e $M_p < 5\%$.

Escolha 1

Vamos escolher por exemplo o par de pólos complexos conjugados $s = -1.2 \pm j0.558$ que corresponde a um coeficiente de amortecimento $\zeta = 0.90$ e uma frequência natural $\omega_n = 1.32 \text{ rad/seg}$. O ganho proporcional $K_p = 0.55$ e o terceiro pólo $s = -3.1$.

Para estes valores o tempo derivativo $T_d = 0.17$ e o tempo integral $T_i = 0.75$. O sistema de controle em malha fechada pode ser escrito como:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{0.55s^2 + 3.3s + 5.5}{s^3 + 5.55s^2 + 9.3s + 5.5}.$$

A resposta a degrau do sistema em malha fechada está ilustrada na Figura 2. Note que o tempo de assentamento t_s corresponde a 3.28seg e o Máximo sobresinal $M_p = 0.1\%$.

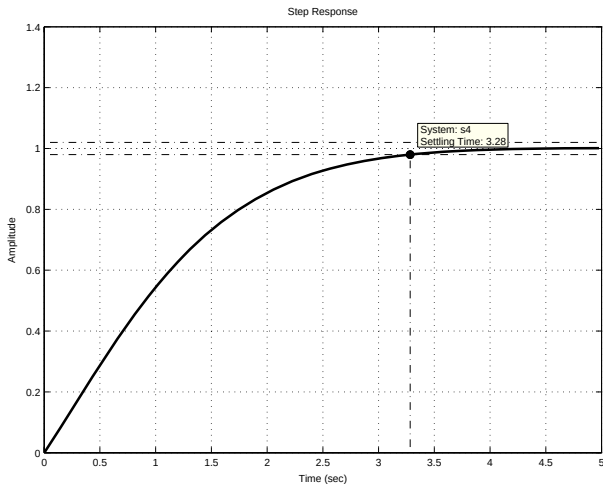


Figura: Resposta a degrau do sistema em malha fechada.

Utilizando a equação para o tempo de assentamento t_s obtemos:

$$t_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} = \frac{4}{0.9 \times 1.32} = 3.36 \text{ seg.}$$

O sistema padrão similar corresponde a:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1.74}{s^2 + 2.38s + 1.74}.$$

A resposta a degrau deste sistema está ilustrado na Figura 3. O tempo de assentamento obtido $t_s = 3.58$ e o Máximo sobresinal $M_p = 0.1\%$.

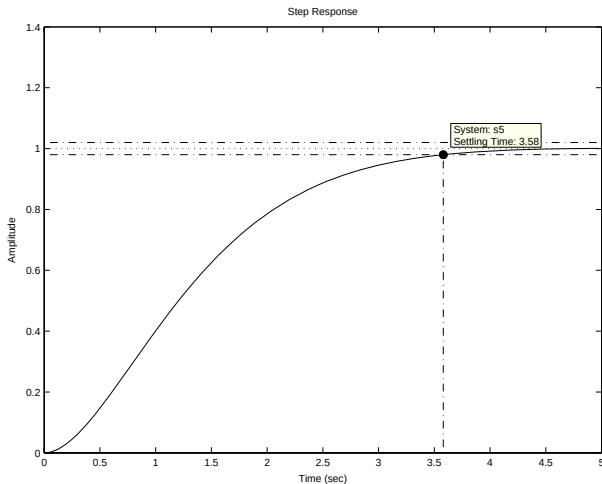


Figura: Resposta a degrau do sistema padrão em malha

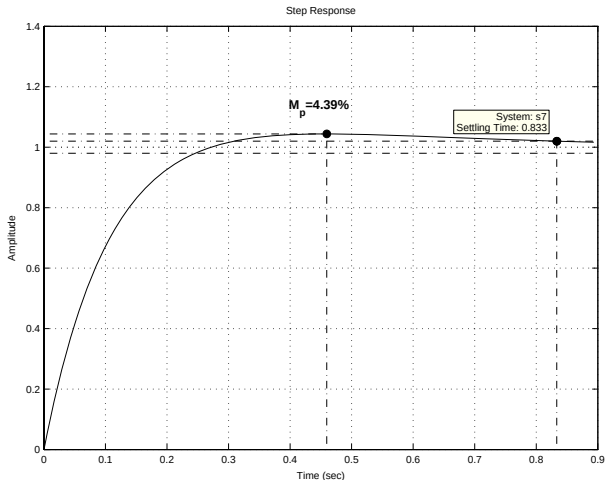
Escolha 2

Vamos escolher agora um outro par de pólos complexos conjugados $s = -3.1 \pm j1.29$ que corresponde a um coeficiente de amortecimento $\zeta = 0.92$ e uma frequência natural $\omega_n = 3.36 \text{ rad/seg}$. O ganho proporcional associado vale $K_p = 10.4$, e o terceiro pólo é $s = -9.2$.

A função de transferência em malha fechada pode ser escrita como

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{10.4s^2 + 62.4s + 104}{s^3 + 15.4s^2 + 68.4s + 104}.$$

A resposta a degrau do sistema em malha fechada está ilustrada na Figura 4. Note que o tempo de assentamento t_s corresponde a 0.83seg e o Máximo sobresinal $M_p = 4.39\%$.



Utilizando a equação para o tempo de assentamento t_s obtemos:

$$t_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} = \frac{4}{0.92 \times 3.36} = 3.1 \text{ seg.}$$

O sistema padrão similar corresponde a:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2} = \frac{11.29}{s^2 + 6.2s + 11.29}.$$

A resposta a degrau deste sistema está ilustrado na Figura 5. O tempo de assentamento obtido $t_s = 2.44\text{seg}$ e o Máximo sobresinal $M_p = 0.05\%$.

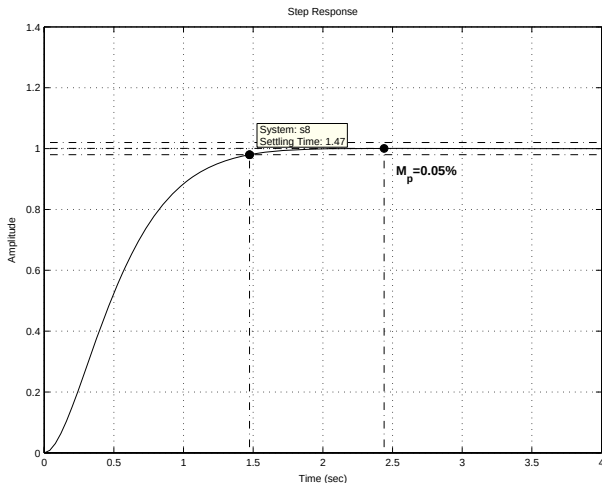


Figura: Resposta a degrau do sistema padrão em malha