1 GEOMETRIA DESCRITIVA

1.1 OBJETIVOS

O objetivo principal é apresentar ao leitor os fundamentos da Geometria Descritiva, que é uma ferramenta gráfica bidimensional para a solução de problemas geométricos no espaço. Nossa experiência indica que o tema, apesar de ser de fácil leitura, é de difícil aprendizado. A melhor forma de se aprender a matéria, é complementar o esforço de compreensão com exercícios que ajudem a firmar os conceitos e ganhar prática com os novos elementos, com a representação e com notação característica.

1.2 SISTEMAS DE PROJEÇÃO

Até antes de aprender multiplicação de matrizes, era óbvio que um ente ***a*** multiplicado por um elemento ***b***, resultaria em um ente ***a x b***, que era igual a ***b x a***. Em outras palavras, a propriedade comutativa era óbvia. Depois da primeira mordida na aula de multiplicação de matrizes nos damos conta de uma realidade: a comutatividade não é óbvia e, com isso, temos a sensação de que o chão sob nossos pés não nos sustenta firmemente. No entanto, após algum tempo, voltamos a ganhar firmeza e percebemos claramente que a nossa compreensão da matemática aumentou.

O mesmo acontece com o **Desenho** e a **Geometria Descritiva**. Existem inúmeros **Sistemas de Projeção**, e depois que se atinge certo nível de maturidade, pode-se formular problemas algébricos, resolver problemas de geodésicas (linhas de menor comprimento), ou até mesmo projetar elementos geométricos 4D em sistemas de projeção 2D. Mas paremos essas considerações iniciais por aqui e iniciemos a jornada “à maturidade”.

Apresentaremos agora dois **Sistemas de Projeção**, o **Cilíndrico Ortogonal** e o **Cônico**. Em ambos os sistemas há três elementos principais: o ***Objeto a ser Projetado***, o ***Quadro de Projeção*** e o ***Centro de Projeção***, mostrados na Figura 1.1.

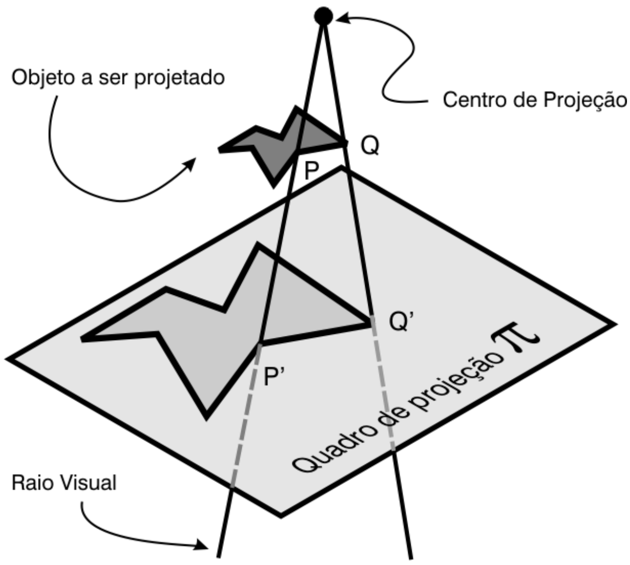


Figura 1.1: Elementos principais dos Sistemas de Projeção.

Um raio de luz (ou mais tecnicamente ***Raio Visual)*** parte do ***Centro de Projeção O***, passa por um ponto genérico ***P*** do objeto, e atinge o **Quadro de Projeção π** em ***P’***. Dizemos que o ponto ***P'*** é a *projeção de* ***P*** *em* π. Projetando-se todos os pontos do objeto, obtém-se a sua projeção.

Quando o **Centro de Projeção O** está a uma distância finita (cuidado com os conceitos de finito e infinito[1]), aqueles objetos que estão mais próximos do **Centro de Projeção** têm projeção maior do que aqueles mais distantes, como mostrado na Figura 1.2.

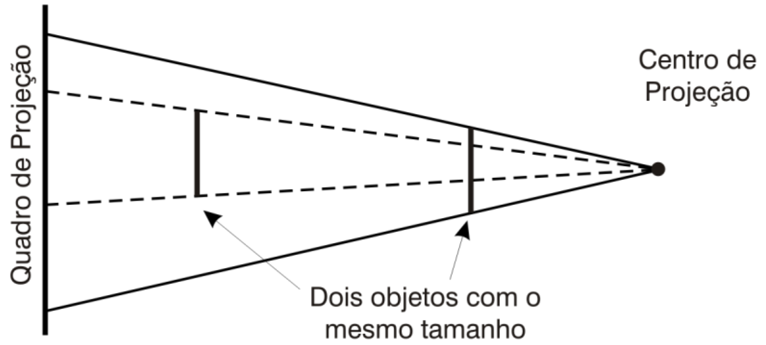


Figura 1.2: Efeito da proximidade do *Objeto a ser Projetado* **ao** *Centro de Projeção***.**

Usando agora a abstração, coloque o **Centro de Projeção** a uma distância infinita do **Quadro de Projeção**, mantendo o **Objeto** a uma distância finita. O resultado é que a distância do **Objeto** ao **Quadro de Projeção** não influencia mais o tamanho da **Projeção** com relação ao **Objeto a ser Projetado** (ver Figura 1.3). Note que agora, devido ao conceito de infinito, não há sentido em falarmos de distância ao **Centro de Projeção**.

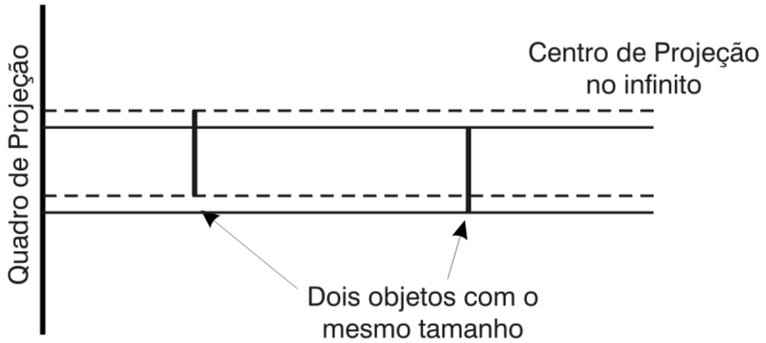


Figura 1.3: *Centro de Projeção* **no infinito.**

Quando o **Centro de Projeção** está a uma distância finita, temos o **Sistema Cônico de Projeção** (Figura 1.1), e quando está a uma distância infinita, temos o **Sistema Cilíndrico de Projeção** (Figura 1.4)[2].

---

[1] Se você consegue dar um valor limitante para distância, por maior que seja ela é finita. Por exemplo, se digo que a distância entre você e o prédio do IFUSP é menor que um milhão de anos luz, então essa distância é finita.

[2] Trata-se então de uma abstração, certo?

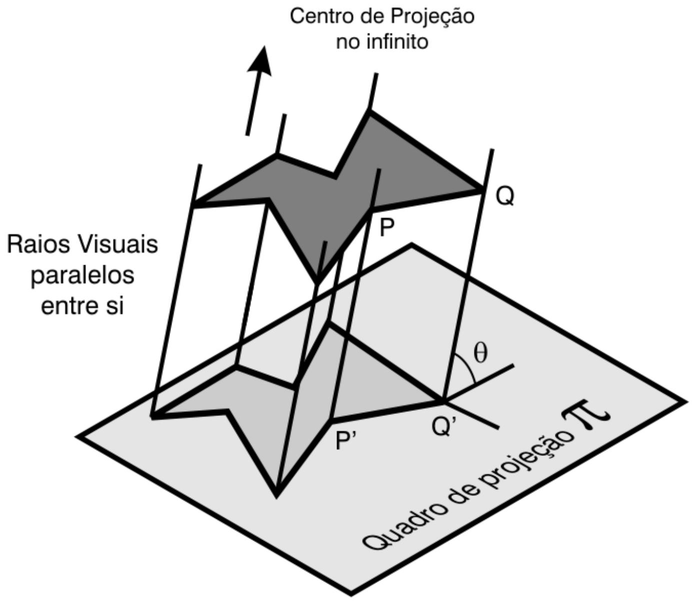


Figura 1.4: *Sistema Cilíndrico de Projeção***.**

Continuando com a especialização, se os **Raios Visuais** são perpendiculares ao **Quadro de Projeção**, e o **Centro de Projeção** está a uma distância infinita do **Quadro de Projeção** (Figura 1.5), então temos o **Sistema Cilíndrico Ortogonal.**

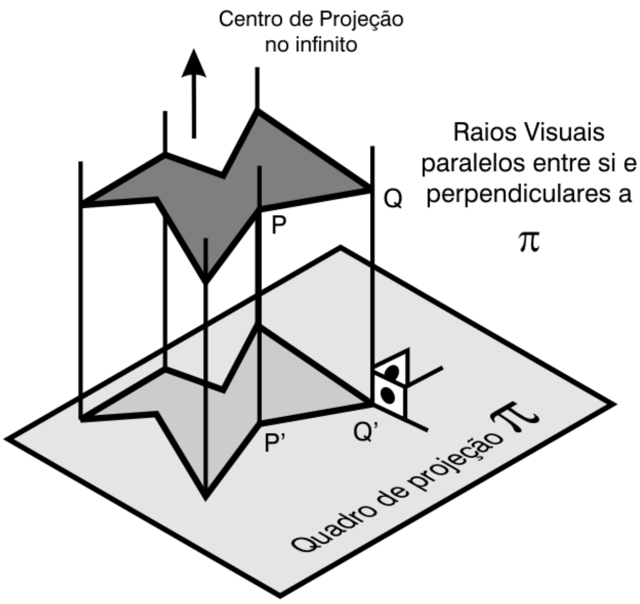


Figura 1.5: Sistema Cilíndrico Ortogonal de Projeção**.**

Destacam-se duas propriedades são importantes no **Sistema Cilíndrico Ortogonal**:

- Um segmento de reta paralelo ao **Quadro de Projeção** é projetado em ***Verdadeira Grandeza***, isto é, o tamanho da projeção é igual ao tamanho do próprio segmento no espaço.

- Sejam duas retas ortogonais entre si (no espaço). Se pelo menos uma delas é paralela ao **Quadro de Projeção**, então as projeções das duas retas são perpendiculares entre si. Em outra situação as projeções não serão perpendiculares. Veja as Figura 1.6 e Figura 1.7.

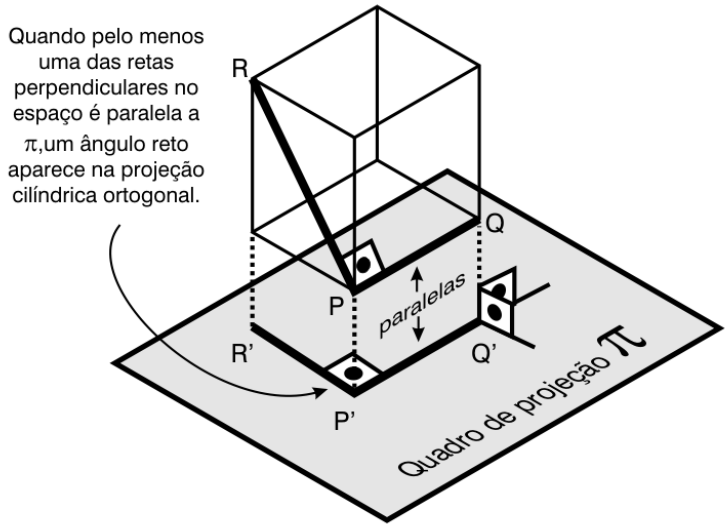


Figura 1.6: Quando o perpendicularismo se mantém.

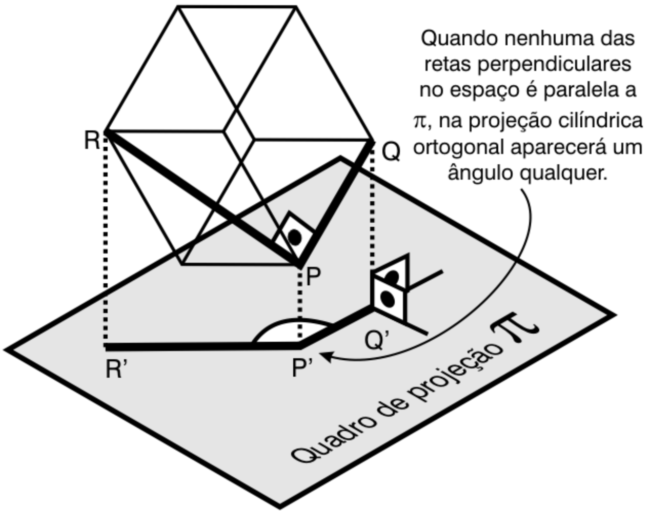


Figura 1.7: Quando o perpendicularismo não se mantém.

Passaremos agora a estudar os elementos principais da Geometria Descritiva que são: **Planos, Retas e Pontos**.

1.3 ELEMENTOS PRINCIPAIS DA GEOMETRIA DESCRITIVA

A Geometria Descritiva foi criada por Gaspar Monge (1746-1818), um matemático francês que serviu a Napoleão em sua campanha pelo Egito, foi seu Ministro da Marinha, e tinha vários interesses tanto na Matemática quanto na Física e Química. Foi amigo de Lavoisier e Fourier. Para termos uma idéia do avanço científico da época, em 1800 Volta inventa a pilha elétrica!

A motivação para a criação da Geometria Descritiva foi o projeto de fortes militares, que naturalmente envolvia problemas geométricos tridimensionais complexos. Após sua invenção, ela foi conservada como segredo militar por vários anos pelo próprio Napoleão. Certamente, a Geometria Descritiva não era "óbvia", como hoje pode parecer.

Afinal, qual era o grande “segredo” de Gaspar Monge? Era o uso simultâneo de *dois* **Sistemas de Projeção Cilíndricos Ortogonais**, perpendiculares entre si, como mostrados na Figura 1.8.

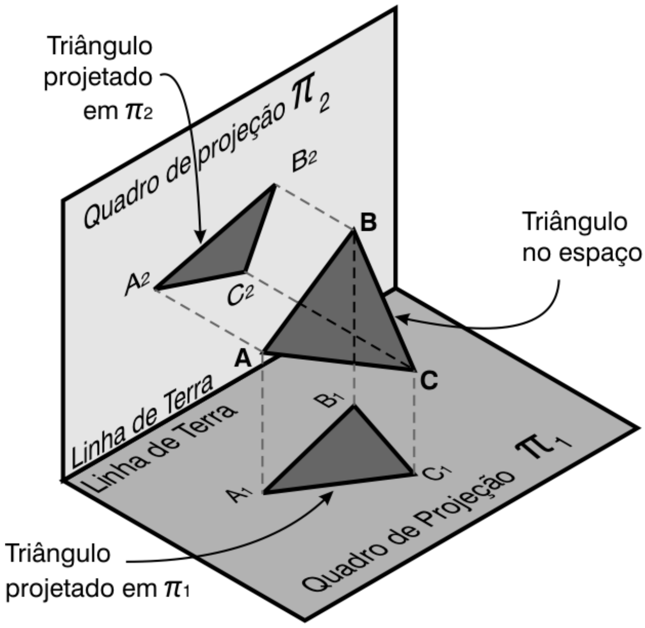


Figura 1.8: Sistema de Monge.

Como você já deve ser capaz de intuir, um ponto no espaço é representado no sistema mongeano como na Figura 1.9.

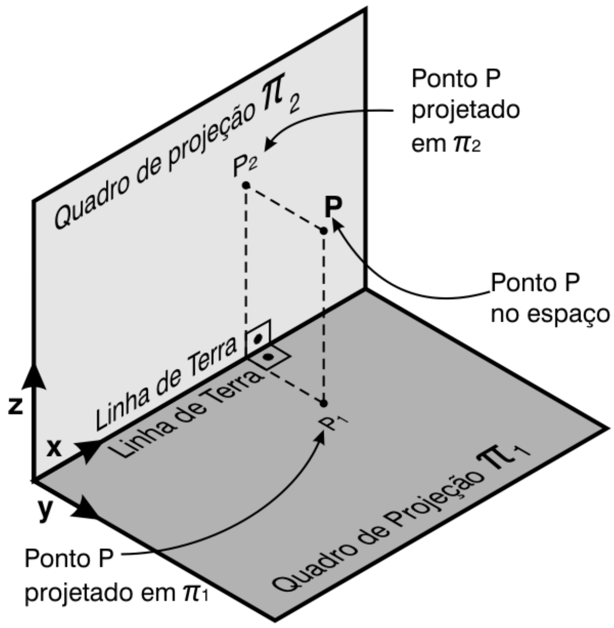


Figura 1.9: Projeção de um ponto em dois planos perpendiculares entre si.

Falando um pouco mais formalmente, um ponto *P* no espaço tridimensional é localizado por três coordenadas, *x, y e z.* Através da projeção em dois planos $\pi 1$ e $\pi 2$, é possível representar graficamente, no plano, as três coordenadas de *P.*

A reta resultante da interseção dos planos $\pi 1$ e $\pi 2$ *é* denominada *Linha de Terra (L. T.).*

Para ter o resultado da representação plana (no papel), o plano $\pi 2$ (com as projeções nele resultantes) é rotacionado em torno da L.T. de modo a ficar coplanar com $\pi 1$, como é indicado na Figura 1.10.

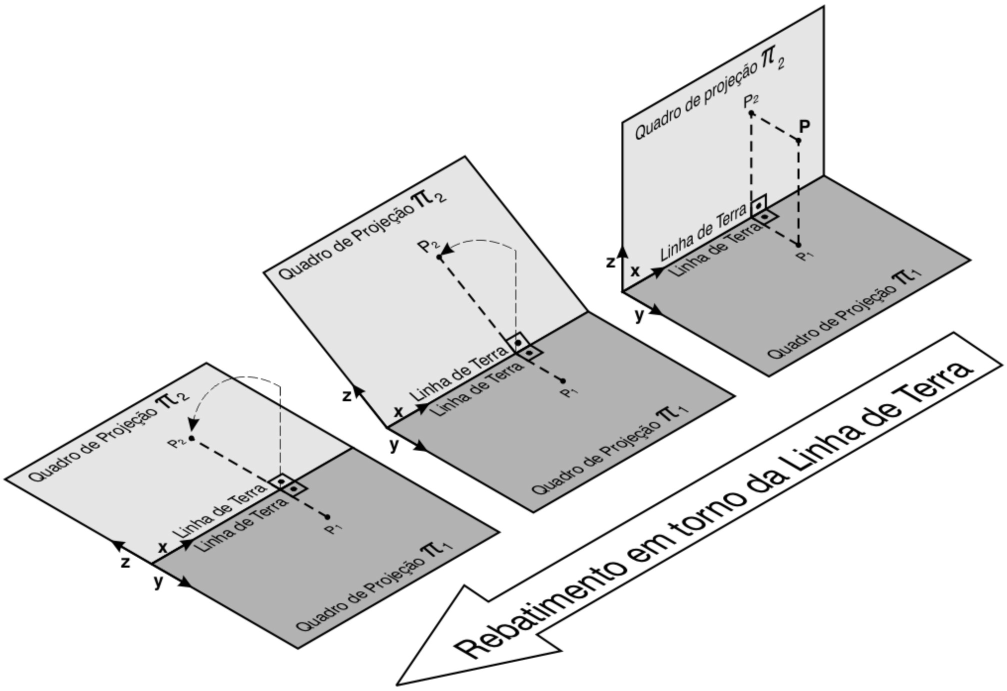


Figura 1.10: Rotação (rebatimento) do plano $\pi 2$ em torno da Linha de Terra (L.T.).

Assim, a posição de um dado ponto P pode ser totalmente descrita por suas projeções em $\pi 1$ e $\pi 2$, dispostos em um único plano (Figura 1.11) denominado **Épura**. Na Épura, logo acima e abaixo da Linha de Terra normalmente são identificadas as regiões positivas[3] dos planos que dão origem a ela.

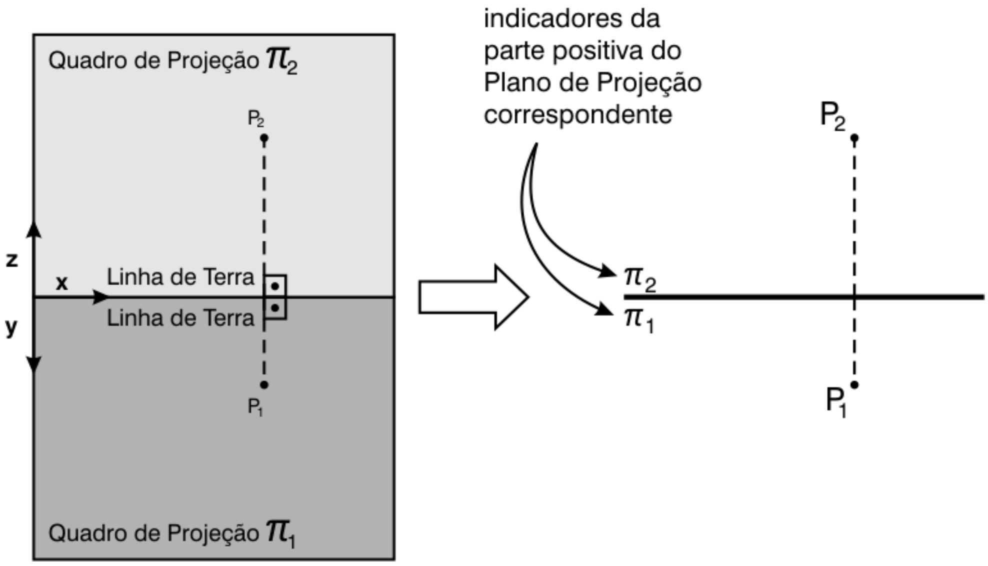


Figura 1.11: Épura.

[3] Veremos mais adiante as partes positivas e negativas dos Planos de Projeção.

O segmento que une as projeções do ponto *P*, *P1* e *P2*, *é* denominado *Linha de Chamada.* Perceba que ela deve ser perpendicular à Linha de Terra. Convencionaremos neste curso, designar o plano $\pi 1$, que contém os eixos *x* e y, de **Plano Horizontal de Projeção**, e o plano $\pi 2$, que contém os eixos *x e z*, de **Plano Vertical de Projeção**. A projeção de um ponto no **Plano Horizontal de Projeção** é usualmente denominada **Projeção Horizontal**, e a projeção sobre o **Plano Vertical de Projeção**, de **Projeção Vertical**.

Em resumo, um ponto no espaço pode ser completamente especificado dadas as suas projeções ortogonais em dois planos perpendiculares, uma vez que temos, no conjunto das projeções, as três coordenadas *x, y, z* de cada ponto.

Os planos vertical e horizontal de projeção, dividem o espaço em quatro espaços chamados *Diedros* como é mostrado na Figura 1.12.

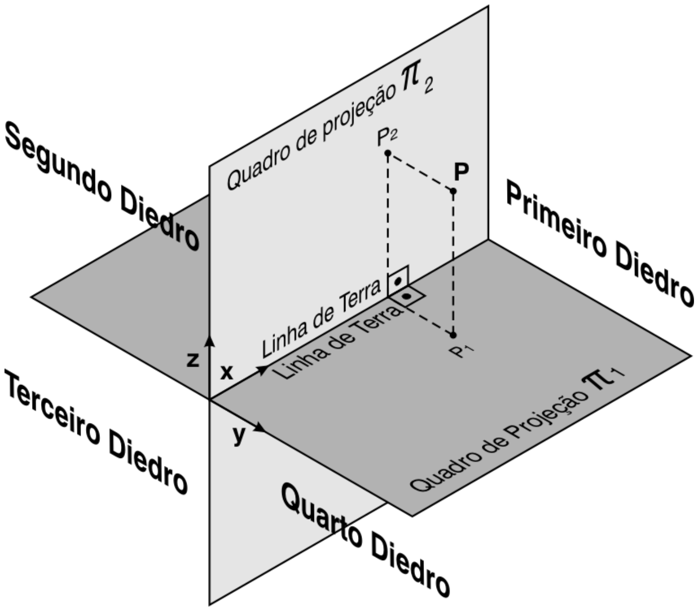


Figura 1.12: Divisão do espaço em quatro diedros.

Exercício 1.1: Um ponto pode estar em qualquer um dos quatro diedros Faça quatro Épuras indicando a posição de pontos nos quatro diedros diferentes.

Exercício 1.2: Escreva uma justificativa simples para o fato das projeções de um ponto estarem sobre uma reta perpendicular à Linha de Terra.

1.4 PONTOS E RETAS

1.4.1 Objetivos

Os elementos geométricos principais para a resolução de qualquer problema espacial são pontos e retas. Neste capítulo examinaremos esses entes procurando fomentar o amadurecimento de idéias relacionadas ao espaço geométrico, representado no sistema de Monge.

1.4.2 Estudo do ponto

A distância *z* de um ponto *P* ao Plano Horizontal de Projeção é denominada **Cota**. Na Épura, a cota é a distância acima da Linha de Terra até a Projeção Vertical do ponto, como é mostrado na Figura 1.13. Um ponto pertencente ao Plano Horizontal de Projeção tem cota nula e, portanto, na Épura a sua Projeção Vertical deve estar na Linha de Terra. A distância correspondente à coordenada *y* de um ponto *P é* denominada **Afastamento**. Na Épura, o Afastamento é a distância abaixo da Linha de Terra até a Projeção Horizontal do ponto. A coordenada *x,* fixada a partir de uma origem arbitrária, é denominada **Abscissa**.

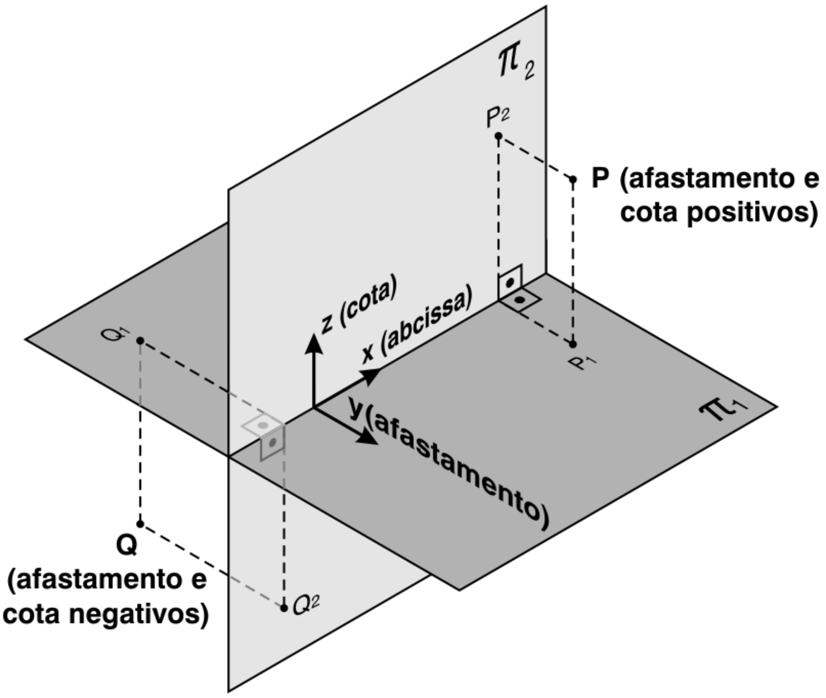
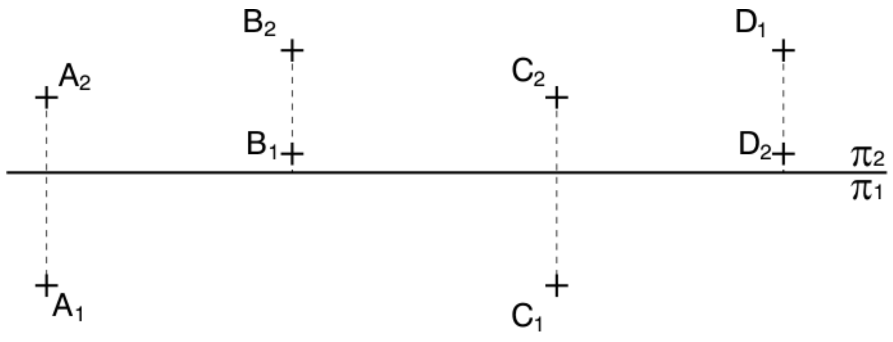


Figura 1.13: Cota, afastamento e abscissa de um ponto.

Um ponto pertencente ao Plano Vertical de Projeção tem coordenada *y* nula e, portanto, a sua Projeção Horizontal deve estar sobre a Linha de Terra. E importante notar que é possível a existência de <u>cotas e afastamentos negativos</u>. Por exemplo, um ponto no segundo diedro tem cota positiva, mas afastamento negativo. Um ponto no terceiro diedro tem cota e afastamento negativos.

Exercício 1.3: Os pontos A, B, C e D são dados em Épura. Determinar:
a) As projeções dos pontos A' e B' simétricos de A e B com relação ao Plano Horizontal de projeção.
b) As projeções dos pontos C' e D', simétricos de C e D com relação ao Plano Vertical de projeção.



1.4.3 Estudo da reta: Elementos principais

Uma forma de se especificar em G.D. uma reta r é fornecendo dois pontos por onde ela passa. Uma outra forma é fornecendo as suas projeções em π1 e π2 como mostrado na Figura 1.14. Perceba que já estamos usando a nova ferramenta (Épura) que acabamos de apresentar. Há quatro pontos e dois segmentos de reta na Épura, mas eles representam apenas *um* segmento de reta e *dois* pontos.

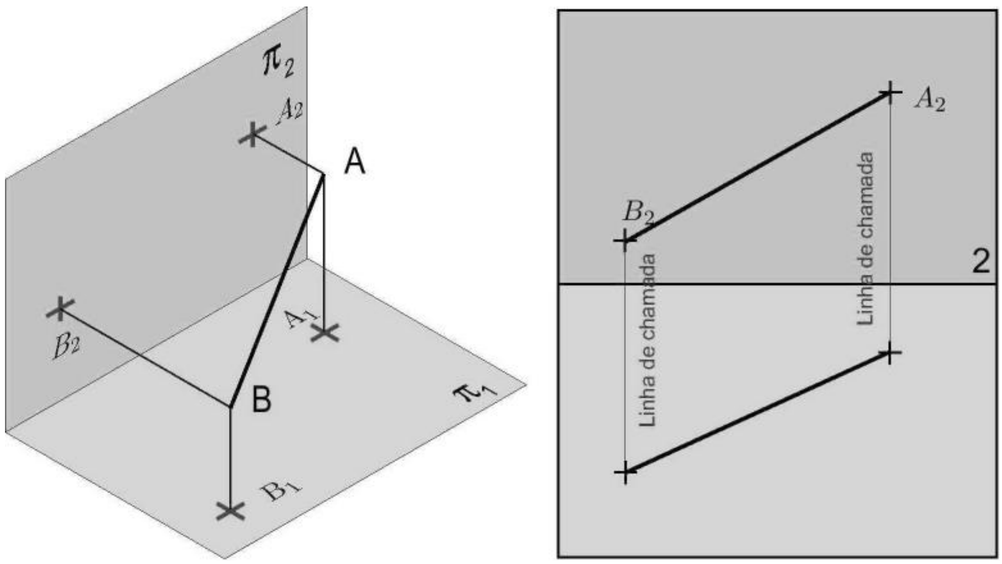
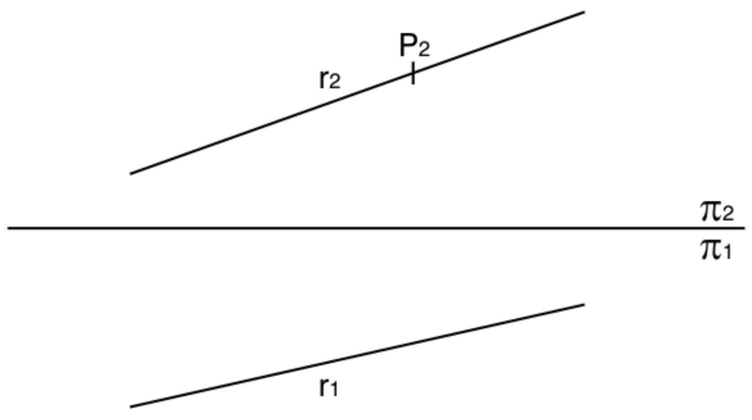


Figura 1.14: Projeções de uma reta na Épura.

Exercício 1.4: São representados em Épura uma reta r e uma projeção do ponto $P \in r$. Determinar a projeção do ponto P em $\pi 1$.



Na designação das projeções da reta usa-se como índice o número do Plano de Projeção correspondente. Assim, por exemplo, a projeção em $\pi 2$ é designada por *r2*.

Os ***Traços*** de uma reta são pontos resultantes das interseções da reta com os Planos de Projeção. Exemplos são mostrados nas Figura 1.15 e Figura 1.16. É muito importante compreender as Épuras associadas.

O Traço de uma reta *r* no plano $\pi 1$ é designado por $r \cap \pi 1$, e no plano $\pi 2$ por $r \cap \pi 2$.

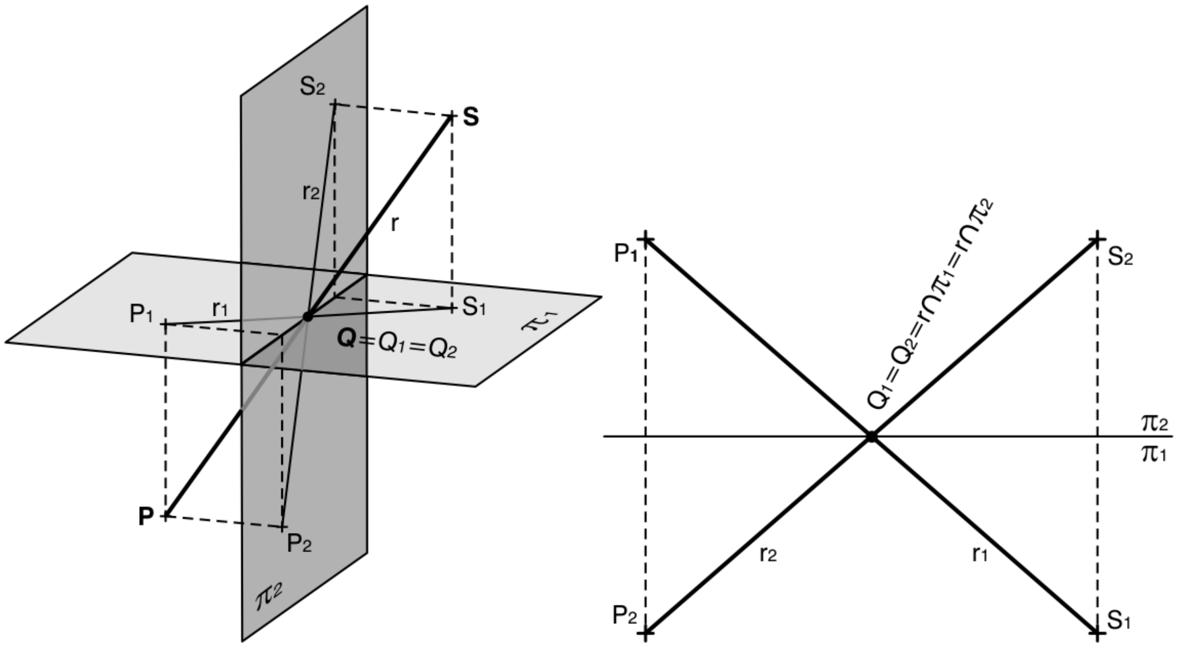


Figura 1.15: Perspectiva e Épura do Traço de uma reta na Linha de Terra.

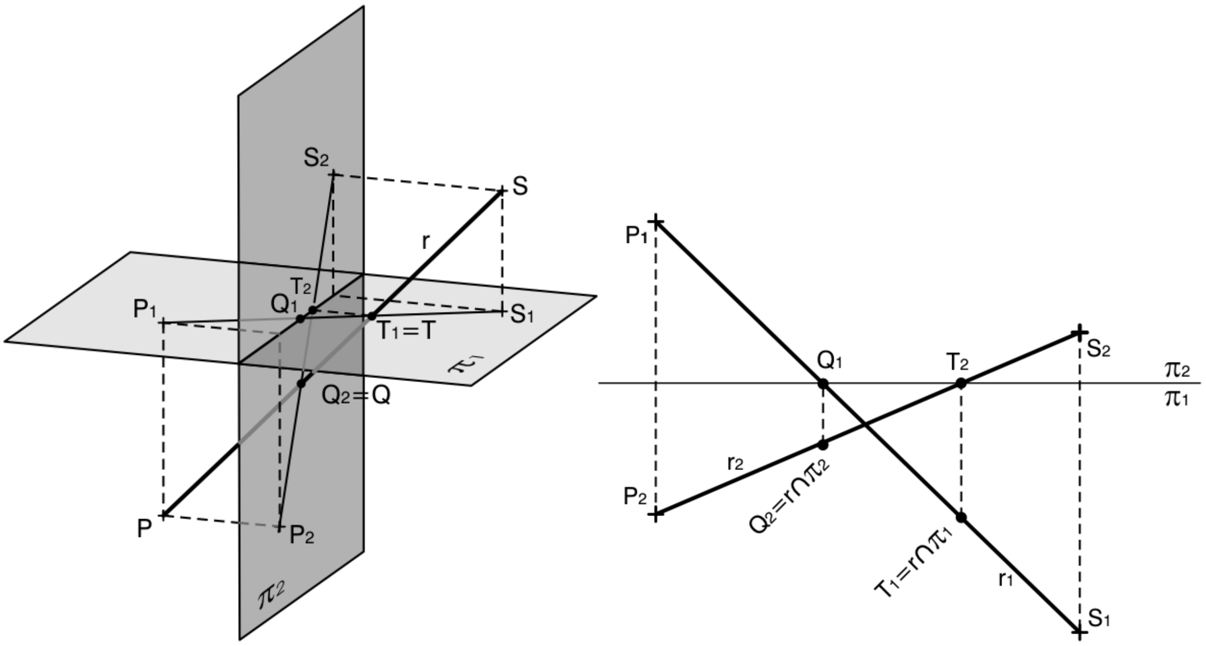


Figura 1.16: Perspectiva e Épura dos Traços de uma reta fora da Linha de Terra.

Veja que o Traço no Plano Horizontal tem cota nula e, portanto, na Épura, a Projeção Vertical de tal Traço *deve estar sobre a Linha de Terra.* Raciocínio análogo pode ser feito para o Traço no Plano Vertical. Note também que as Linhas de Chamada são sempre perpendiculares à Linha de Terra.

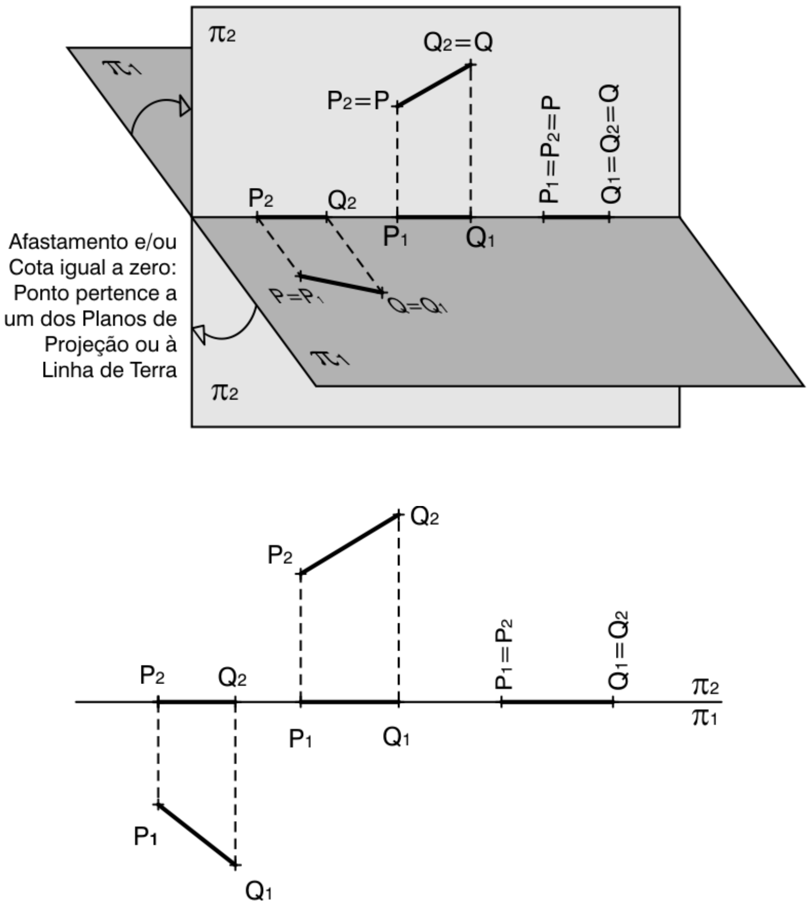
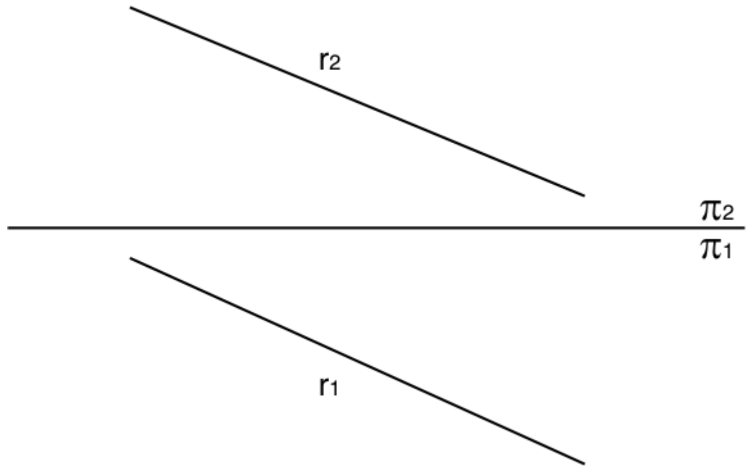
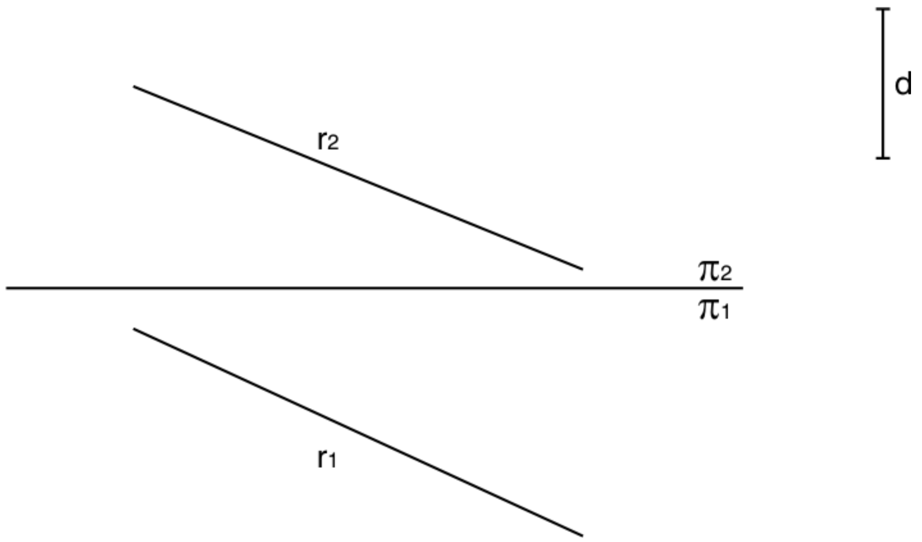


Figura 1.17: Perspectiva e Épura de retas em posições particulares.

Exercício 1.5: Determinar os Traços da reta r no Plano Horizontal π1 e vertical π2. Se você acertou, deve ter marcado no papel quatro pontos.



Exercício 1.6: Determinar os Traços da reta r com os Planos de Projeção. Obter na reta r o ponto A de afastamento igual ao comprimento d e o ponto B de cota d/2.



1.5 PLANOS

1.5.1 Objetivos

Prosseguiremos analisando os principais elementos da Geometria Descritiva. Veremos agora os planos e suas relações com pontos e retas, os quais vimos no 1.4. Temos agora três elementos; assim o número de combinações, inter-relações entre eles, é necessariamente maior que quando tínhamos apenas pontos e retas para estudar. Concretamente, algumas das relações a serem estudadas são:

- Interseção de plano com os Quadros de Projeção $\pi 1$ e $\pi 2$;
- Pertinência de ponto a plano;
- Interseção de plano com plano;
- Interseção entre reta e plano.

1.5.2 Interseção de plano com os Quadros de Projeção

A interseção de um plano qualquer com um Quadro de Projeção se chama *Traço.* Assim, a interseção de um plano $\boldsymbol{\alpha}$ com $\pi 1$ chama-se *Traço de α em $\pi 1$* e é simbolizado por $a \cap \pi 1$ ou, simplesmente, $\alpha\pi 1$. Um caso análogo acontece com a interseção com $\pi 2$ (veja Figura 1.18).

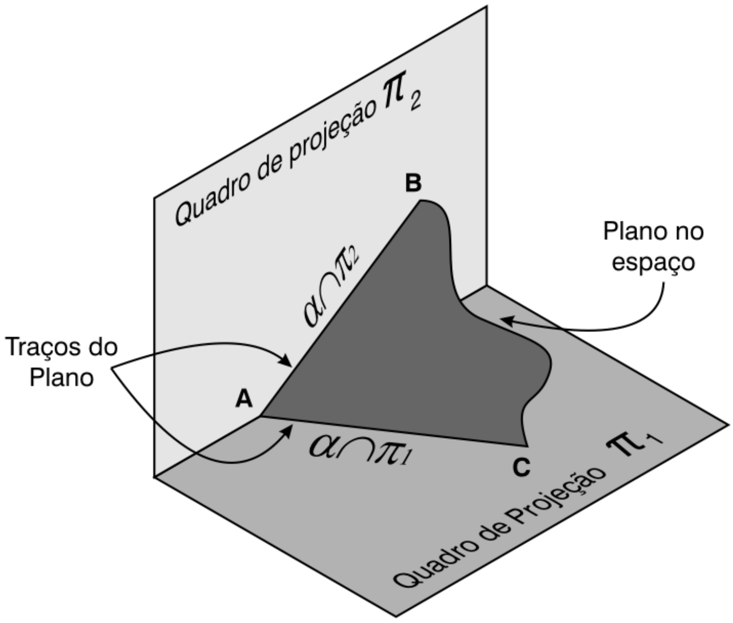


Figura 1.18: Traços de um plano α no espaço.

Se você atentar bem, $\alpha \cap \pi 1$ e $\alpha \cap \pi 2$, que são retas, se interceptam em um ponto A[4] pertencente à Linha de Terra. Isso deveria realmente acontecer, pois a Linha de Terra é resultado da interseção $\pi 1 \cap \pi 2$, e interseção de reta e plano é um ponto. Daí:

$$(\pi 1 \cap \pi 2) \cap \alpha = A \qquad\qquad (\pi 1 \cap \alpha) \cap (\pi 2 \cap \alpha) = A$$

[4] A rigor, {A}, mas vamos relaxar.

A Épura fica então como a Figura 1.19.

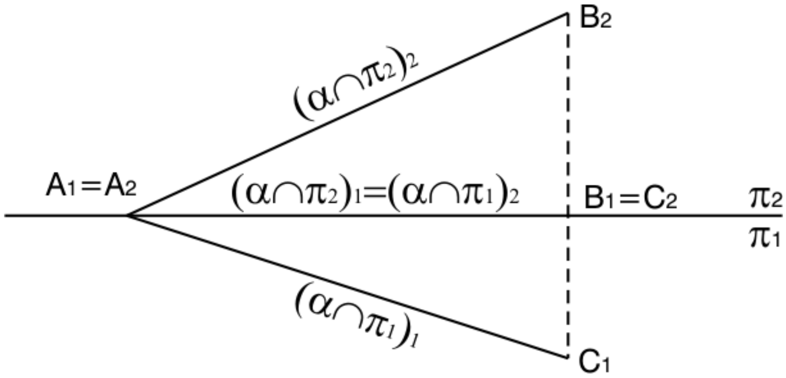


Figura 1.19: Épura dos Traços de um plano.

A Figura 1.19 é realmente importante. Note que cada Traço do plano α, que são retas, tem *duas* projeções. Por exemplo, a reta $\alpha\cap\pi1$ tem as projeções $(\alpha\cap\pi1)1$ e $(\alpha\cap\pi1)2$. Ocorre que a projeção $(\alpha\cap\pi1)1$ está exatamente sobre o plano π1 e a projeção $(\alpha\cap\pi1)2$, exatamente sobre a Linha de Terra. Então, para evitarmos confusão de linhas, símbolos e índices, convencionaremos que representaremos apenas a projeção mais significativa do Traço, ou seja, aquela que não coincidir com a Linha de Terra. Deste modo, com essa simplificação, a Épura da Figura 1.19 fica sendo como mostrada na Figura 1.20. Simplifica-se também a notação: de $\alpha\cap\pi1$ para $\alpha\pi1$, por exemplo.

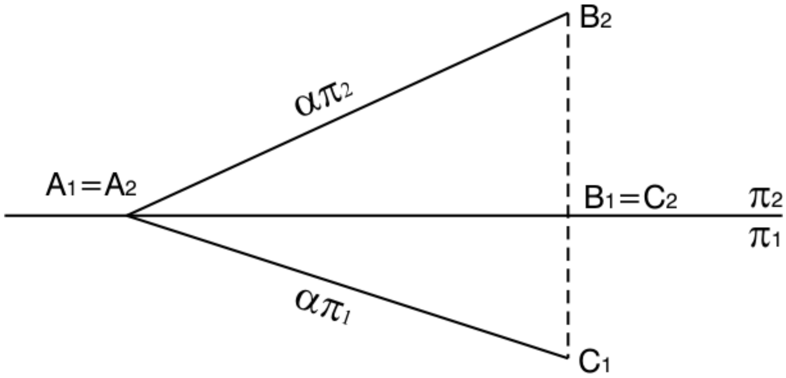


Figura 1.20: Épura simplificada dos Traços de um plano.

Um plano no espaço fica definido de várias maneiras: a) quando são dados três de seus pontos; b) quando são definidos um ponto e uma reta a ele pertencentes; c) dadas duas retas coplanares; d) sua normal (lembra-se do curso de Álgebra Linear?) e um ponto; e) uma reta contida no plano e o requisito de que o plano deve ser paralelo a uma outra reta, etc.

Realmente, existem várias formas de se especificar um plano no espaço, mas *convencionaremos* que um plano somente é conhecido se os Traços nos Planos de Projeção são dados.

Como exemplo suponha que são dados três pontos *A, B e C* pertencentes a um plano α, e pede-se determinar os Traços de α. Para achar um ponto pertencente ao Traço em π1, basta unir dois pontos dados, digamos *A* e *B,* e determinar o Traço da reta *AB* em π1. Determinando-se os Traços de, digamos, *AB* e *AC,* nos Planos de Projeção, e ligando pontos correspondentes, pode-se determinar os Traços do plano *a* . A situação toda está ilustrada na Figura 1.22.

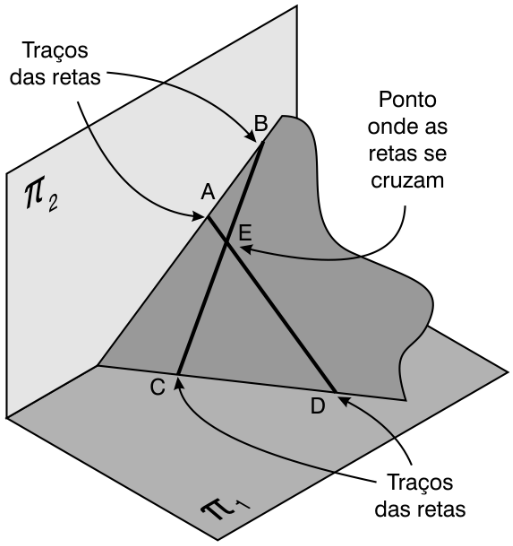


Figura 1.21: Traços de um plano e Traços de retas nele contidas.

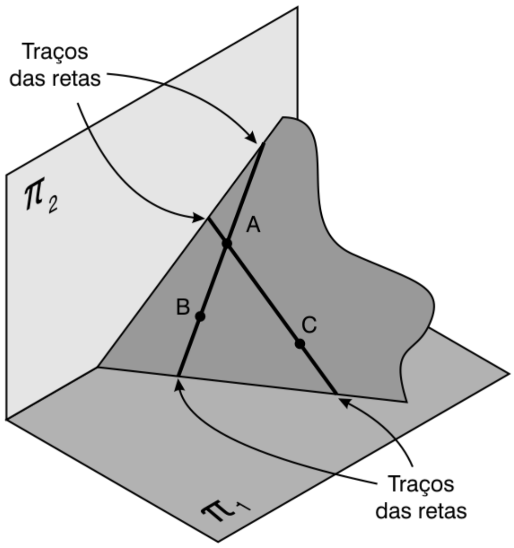
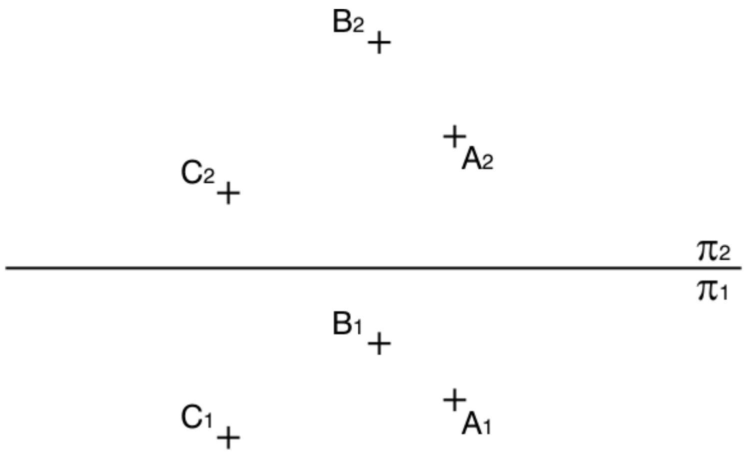


Figura 1.22: Traços de um plano a partir dos Traços de retas que passam por 3 pontos contidos no plano.

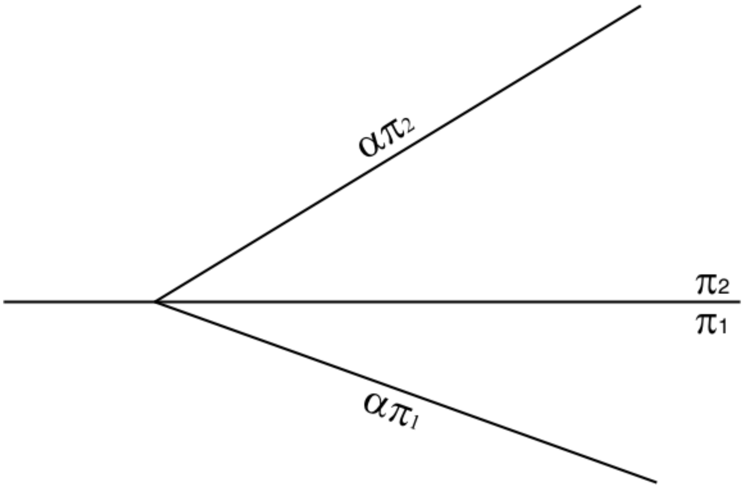
Exercício 1.7: Determinar os Traços do plano α definido pelos pontos A, B e C indicados na Épura abaixo.



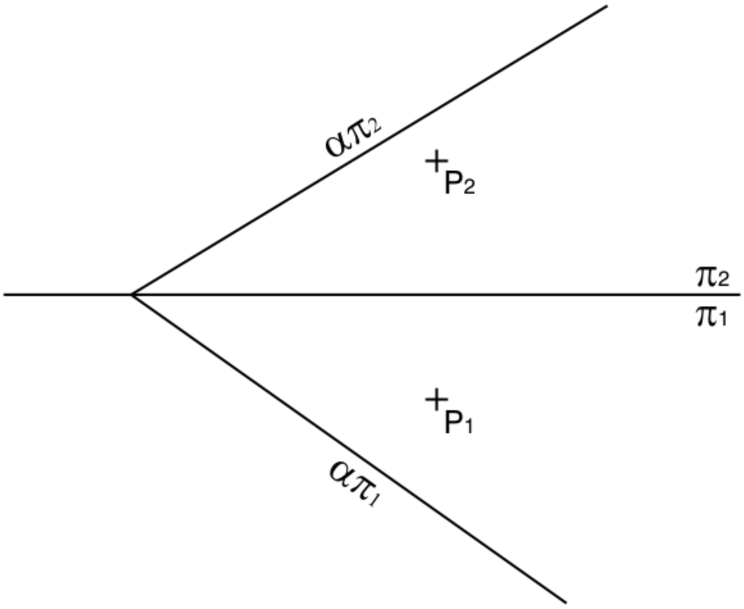
1.5.3 Pertinência de ponto a plano

Para se determinar se um ponto P pertence a um plano α, deve-se recair primeiro no problema da pertinência de ponto a reta. Se $r \subset \alpha$ e $P \in r$, então $P \in \alpha$.

Exercício 1.8: Seja α dado pelos seus Traços nos Planos de Projeção. Forneça uma reta qualquer r contida em α e destaque os seus Traços.



Exercício 1.9: Verifique se o ponto $P \in \alpha$.



Um problema natural que pode surgir para você é a determinação do ponto de uma determinada reta que tem distância *zero* a um plano, ou seja, a interseção de uma reta com um plano. Para se resolver esse problema, é necessário primeiro atacar outro, que é a interseção entre dois planos.

1.5.4 Interseção de plano com plano

Partimos do fato que a interseção entre dois planos é uma reta[5]. Ora, se é uma reta, bastam dois pontos para determiná-la. Seja a Épura na Figura 1.23 onde estão representados dois planos α e β.

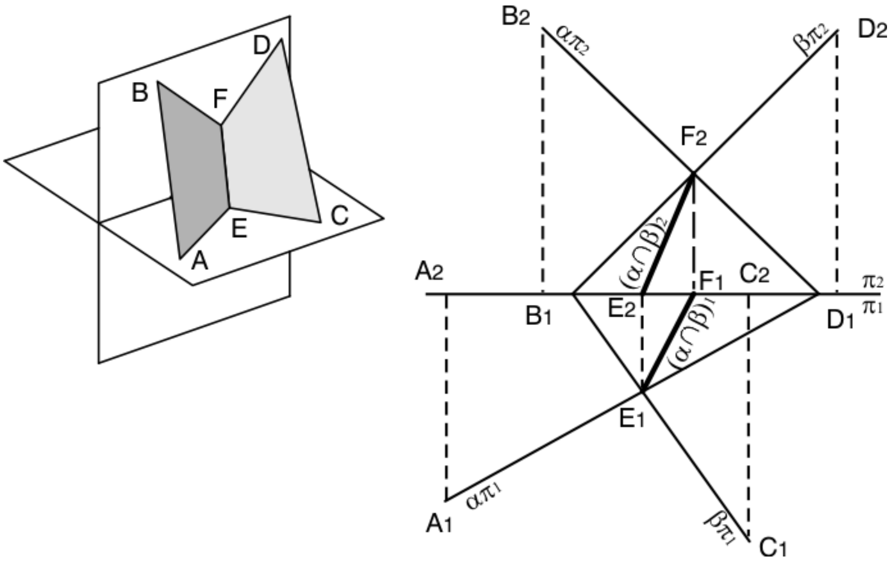


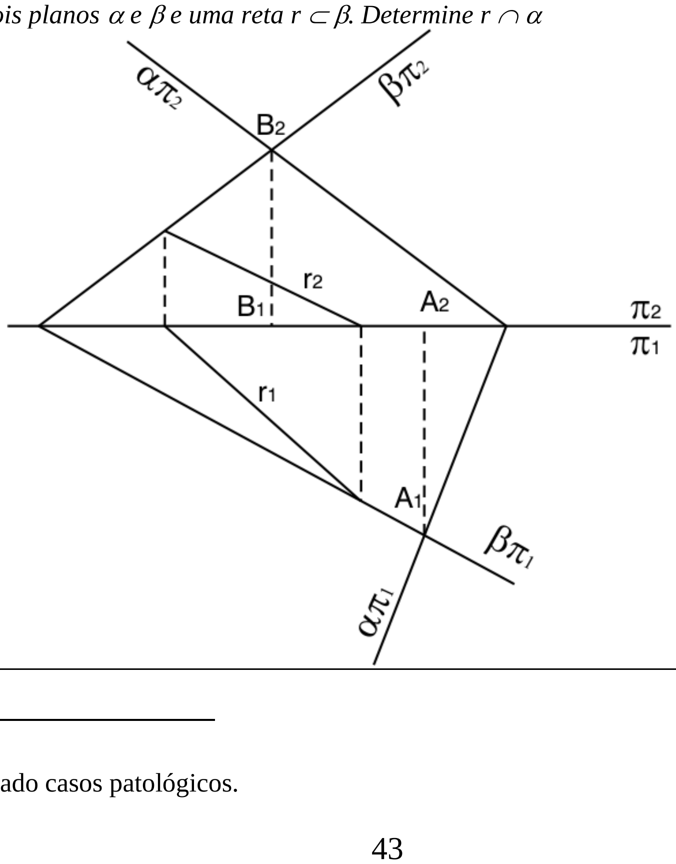
Figura 1.23: Interseção de dois planos.

Uma conjectura plausível é afirmar que os pontos *E e F* pertencem à interseção $\alpha \cap \beta$. E realmente pertencem? A resposta é sim, pelo seguinte argumento:

$$E = (\alpha \cap \pi 1) \cap (\beta \cap \pi 1) \Rightarrow E \in (\alpha \cap \beta)$$

$$F = (\alpha \cap \pi 2) \cap (\beta \cap \pi 2) \Rightarrow F \in (\alpha \cap \beta)$$

Exercício 1.10: Sejam dois planos α e β e uma reta $r \subset \beta$. Determine $r \cap \alpha$



[5] Deixemos de lado casos patológicos.

No último exercício, você deve ter concluído que a interseção $r \cap \alpha$ é dada por $r \cap (\alpha \cap \beta)$.

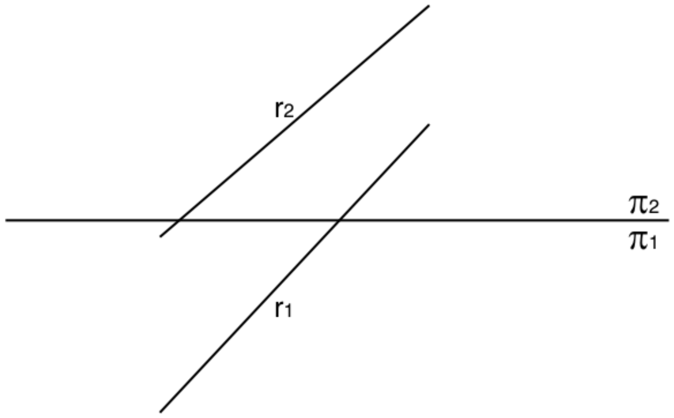
A grande lição é que para se determinar a interseção de uma reta com um plano, é fundamental ter à disposição um plano que passe pela reta. Se esse plano não é dado, criamos um em uma posição *arbitrária*[6].

1.5.5 Interseção de reta com plano

Da última seção tiramos que para se determinar a interseção de reta com plano, é necessário primeiro criarmos um plano que contenha a reta. Existem infinitos planos, basta escolher um!

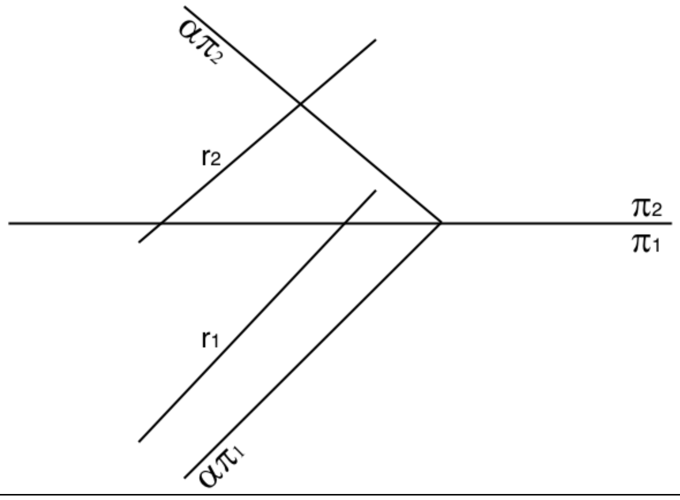
Suponha que seja dada uma reta no espaço e seja pedido que se passe um plano qualquer por ela. Pensando em termos de Épura, a única restrição é que os Traços do plano passem pelos Traços da reta nos Planos de Projeção. Só.

Exercício 1.11: Dada a reta r, represente um plano arbitrário que contenha r.



Agora suponha que no exercício anterior seja acrescido um plano α, e que seja pedida a interseção de α com *r*. Sei que você sabe resolver!

Exercício 1.12: Dados a reta r e o plano α. Determine $r \cap \alpha$.



[6] Arbitrária, e não "aleatória" como muitos estudantes dizem. Esse erro dá até arrepios!

1.5.6 Posições Particulares de Planos

Mostramos a seguir ilustrações e épuras de posições particulares de planos no espaço.

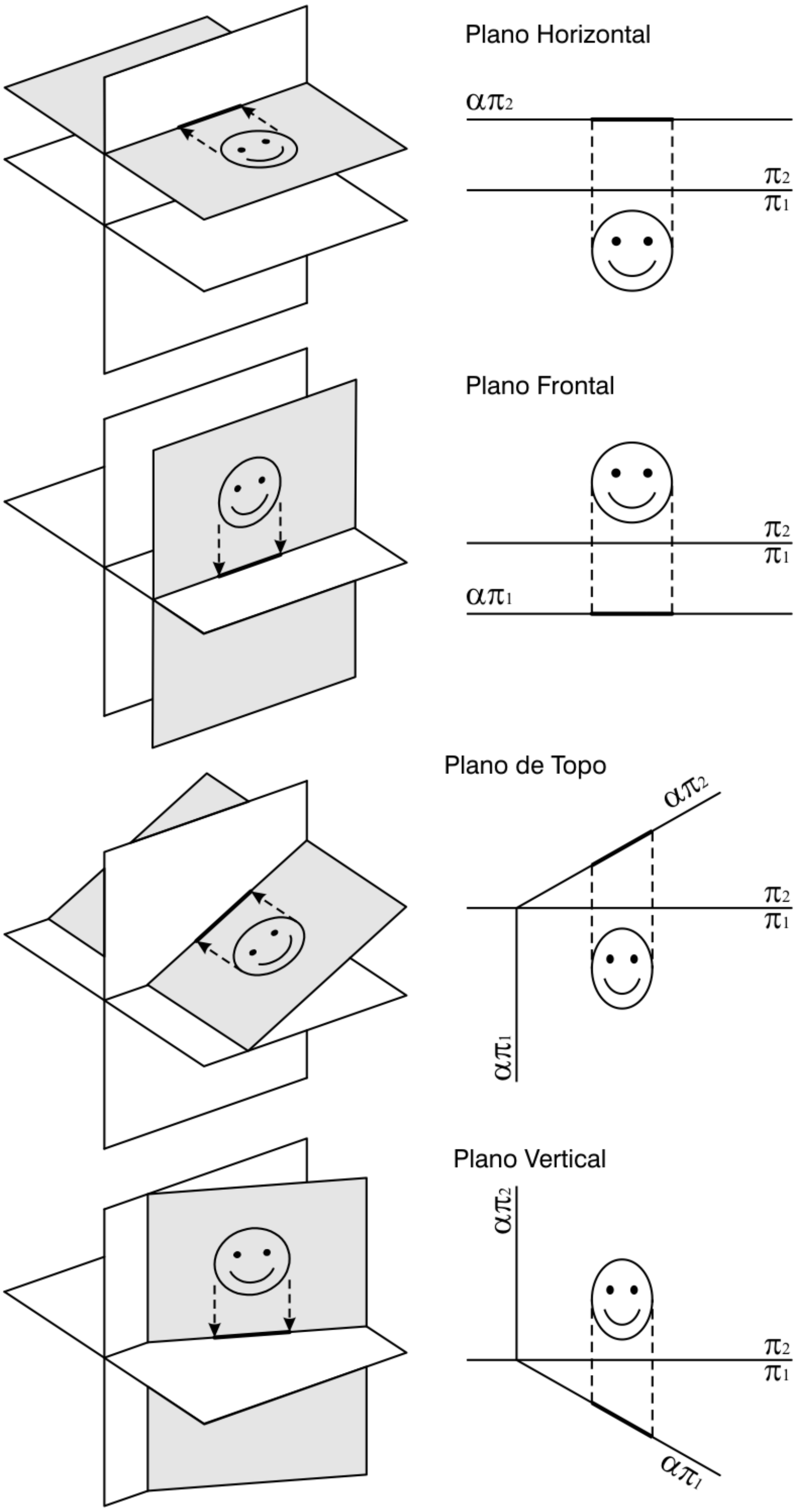


Figura 1.24: posições particulares de planos no espaço e a nomenclatura usual.

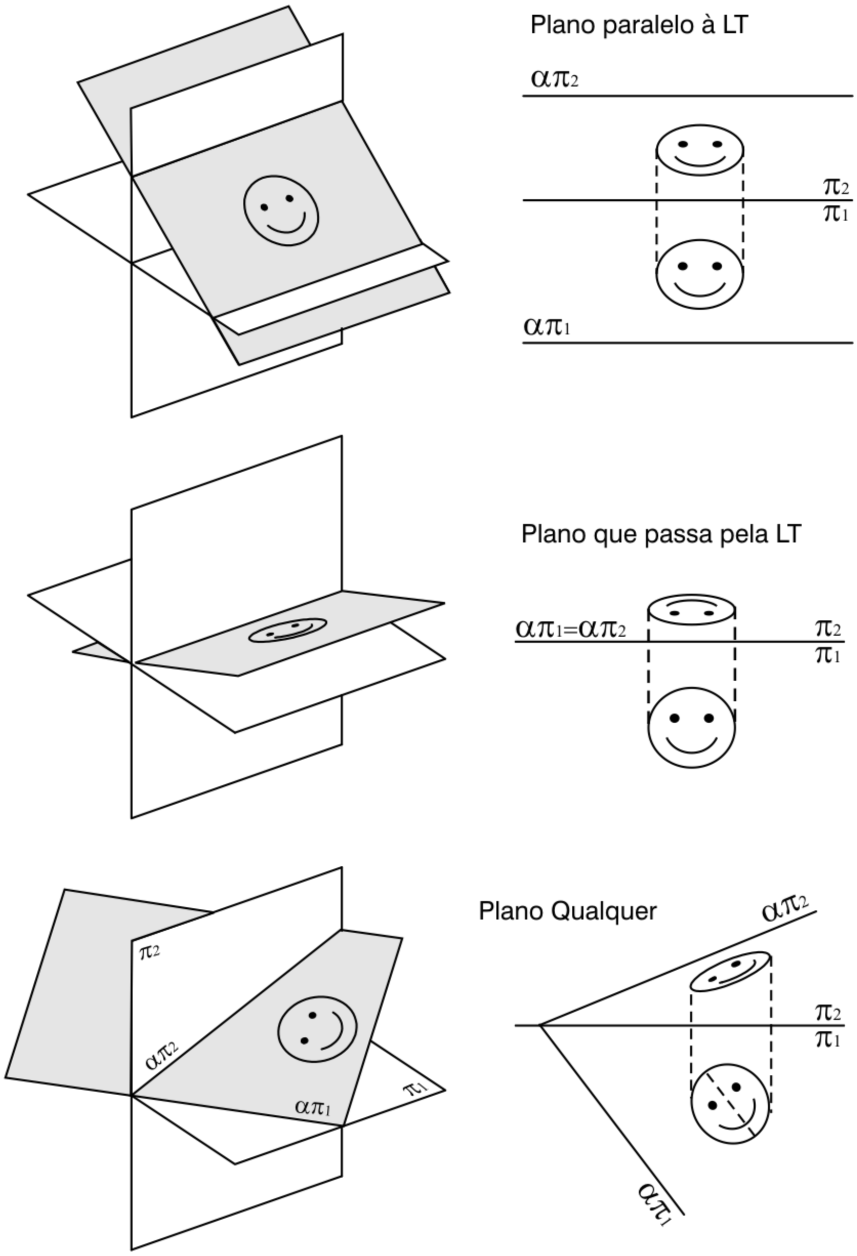


Figura 1.25: posições particulares de planos no espaço e a nomenclatura usual (continuação)

1.6 MÉTODOS

1.6.1 Objetivos

Veremos agora métodos geométricos poderosos para resolver problemas mais difíceis. Se você realmente *aprender o* conteúdo dessa aula, ficará bem claro que a resolução de problemas em Geometria Descritiva não se baseia em um amontoado de regras arbitrárias, mas sim em operações bem fundamentadas na geometria projetiva.

Concretamente, veremos dois métodos: Resolução de problemas na Épura por **Rotação de Objetos** e por **Mudança de Planos de Projeção**.

1.6.2 Rotações

Um problema clássico é a determinação da *Verdadeira Grandeza* de entes geométricos, como segmentos de reta e áreas de polígonos, quando estes estão representados na Épura. Suponha que você deva obter o comprimento do segmento *AB* representado na Épura da Figura 1.26.

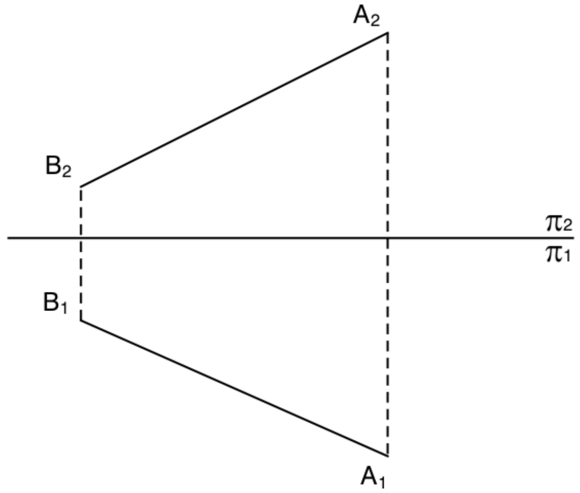


Figura 1.26: Segmento para achar V.G.

Naturalmente, você poderia usar o teorema de Pitágoras, mas queremos usar métodos de desenho puramente (com auxílio de régua e compasso). Como fazer?

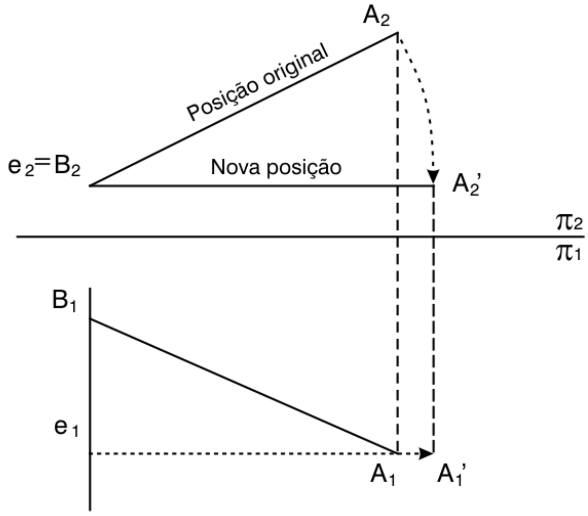
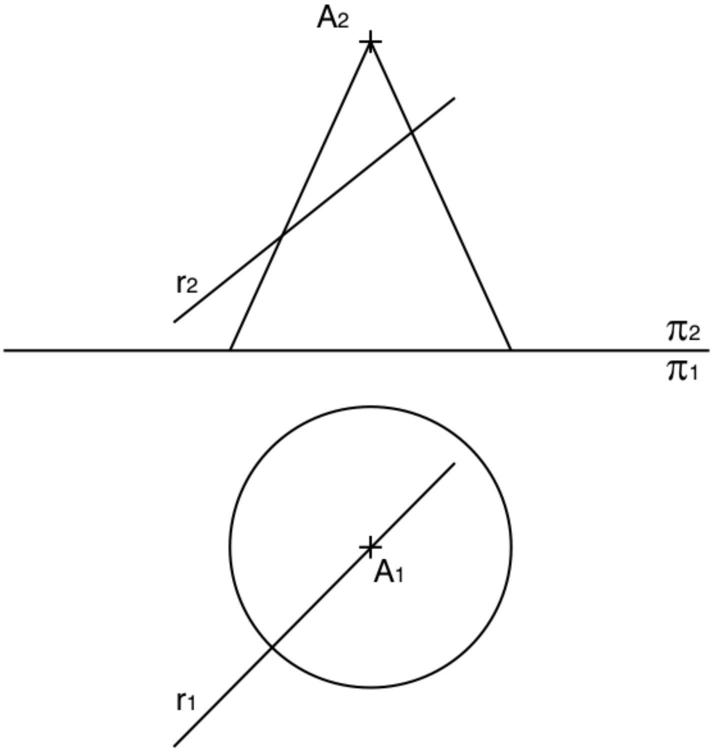


Figura 1.27: Rotação de Segmento.

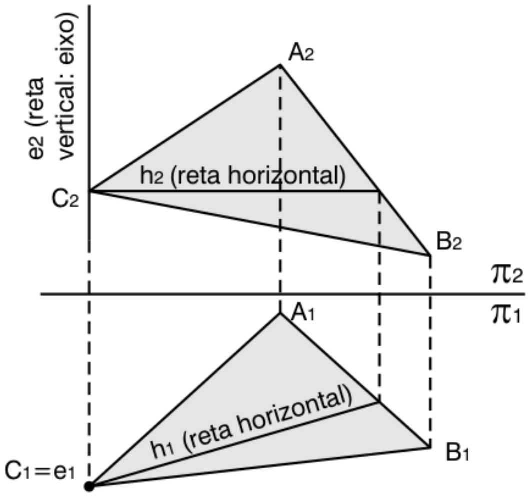
Uma saída seria *rotacionar AB* em torno de um eixo perpendicular à $\pi 2$ (reta e) passando por B, até que *AB* fique paralelo a $\pi 1$. Daí é só medir com a régua a projeção de *AB* na nova posição. A operação está apresentada na Figura 1.27.

Exercício 1.13: Determinar a interseção da reta r com o cone γ usando a técnica da rotação. Note que r está em uma posição particular que facilita grandemente a resolução do problema.

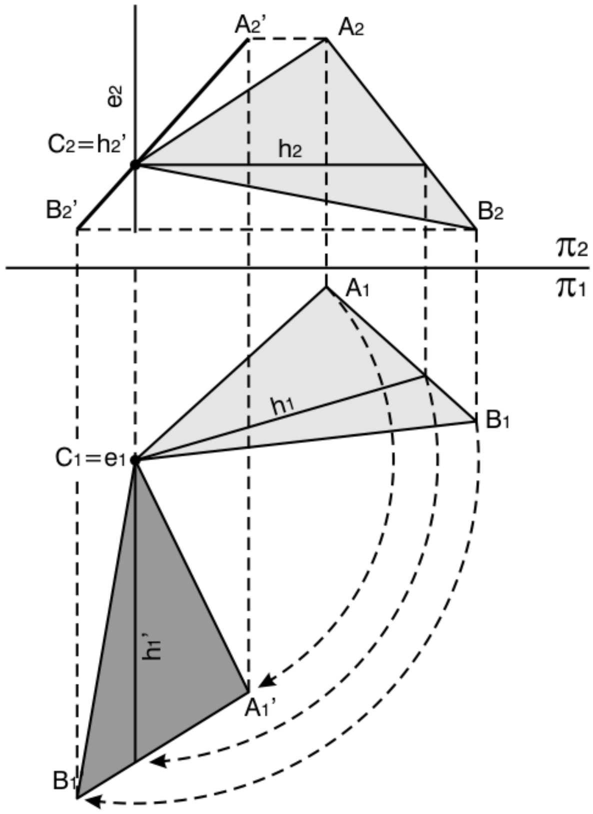


Um problema mais sofisticado seria saber se dada uma figura plana, pode-se, de alguma forma, rotacioná-la para obter a sua verdadeira grandeza. A resposta é afirmativa. Precisamos apenas de duas rotações consecutivas. Primeiramente, é necessário localizar uma reta horizontal *h* que servirá de eixo. Como não necessariamente este eixo está numa posição conveniente, isto é, perpendicular à $\pi 2$, fazemos uma rotação de *h* e de toda a figura, de forma que *h* se posicione perpendicularmente à $\pi 2$. O segundo passo é rotacionar a figura em torno da nova posição de *h.* A operação é ilustrada na Figura 1.28.

Primeiro passo: identificar reta horizontal e estabelecer o eixo (reta vertical) em um local conveniente.



Segundo passo: rotacionar todos os pontos sobre o eixo vertical de modo a que a reta horizontal fique na posição de topo (um ponto na projeção vertical). Note que o ponto C não se desloca uma vez que ele está contido no eixo.



Terceiro passo: rotacionar todos os pontos sobre um eixo de topo (aproveitando a reta h que agora está na posição de topo) de modo a que todos eles passem a pertencer a um plano horizontal.

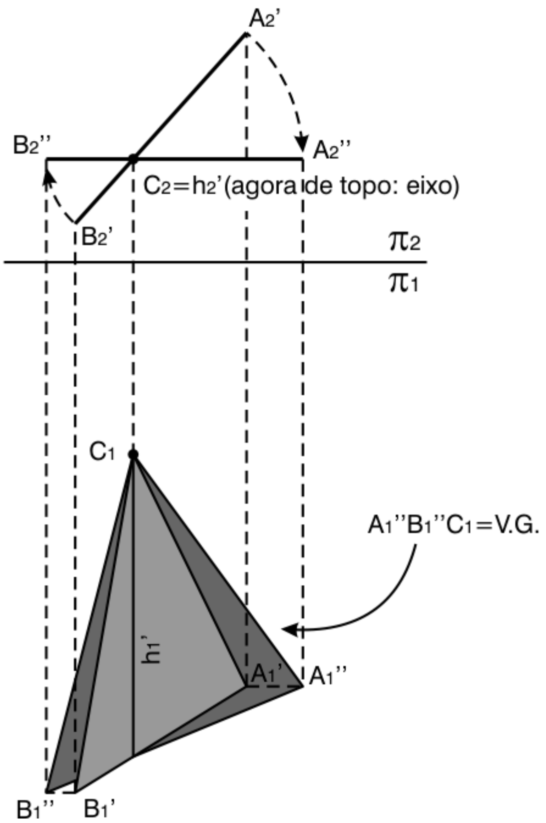


Figura 1.28: Rotação de um triângulo no espaço.

1.6.3 Mudança de planos

A primeira coisa a ser feita é uma “mudança de mentalidade”. Desde que começamos o nosso curso, a Épura sempre foi representada com a Linha de Terra paralela à borda inferior do papel (ou do monitor!). Nada impede que a Linha de Terra fosse colocada de modo inclinado.

De certa forma, podemos dizer que existem fundamentalmente dois tipos de Mudança de Plano de Projeção: Mudança de Plano Horizontal de Projeção ($\pi 1 \Rightarrow \pi 3$), ver Figura 1.29, e Mudança de Plano Vertical de Projeção ($\pi 2 \Rightarrow \pi 3$), ver Figura 1.30. Essa nomenclatura não é muito precisa, mas pode ajudar a entender o processo.

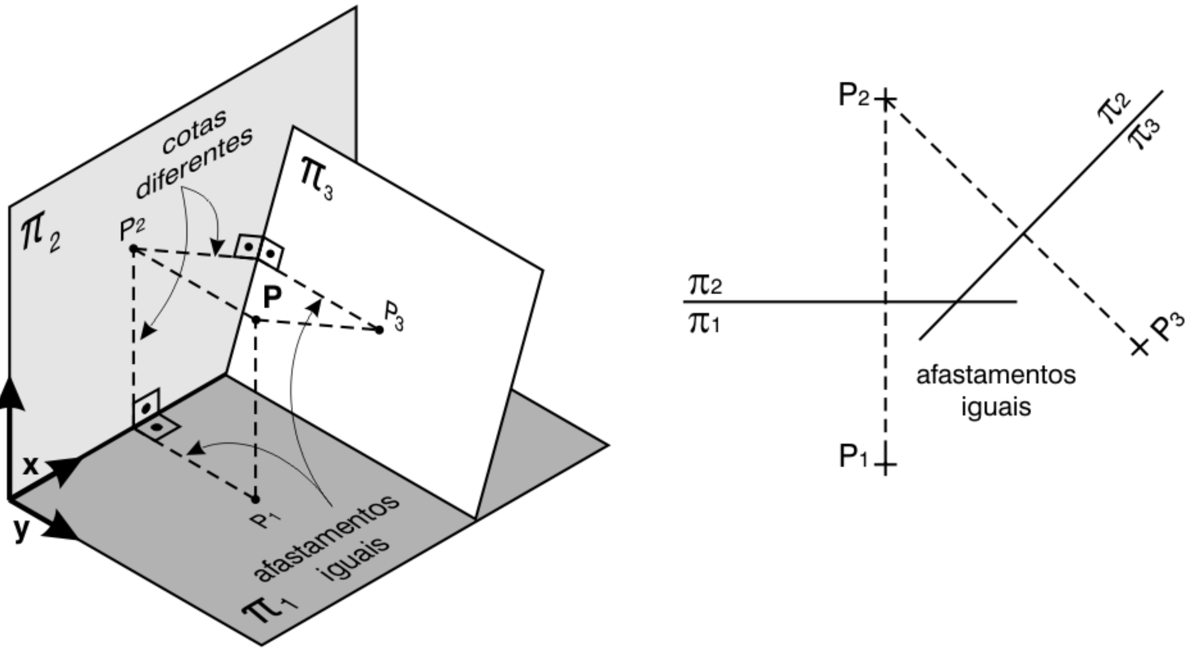


Figura 1.29: Mudança de Plano Horizontal de Projeção ($\pi 1 \Rightarrow \pi 3$)

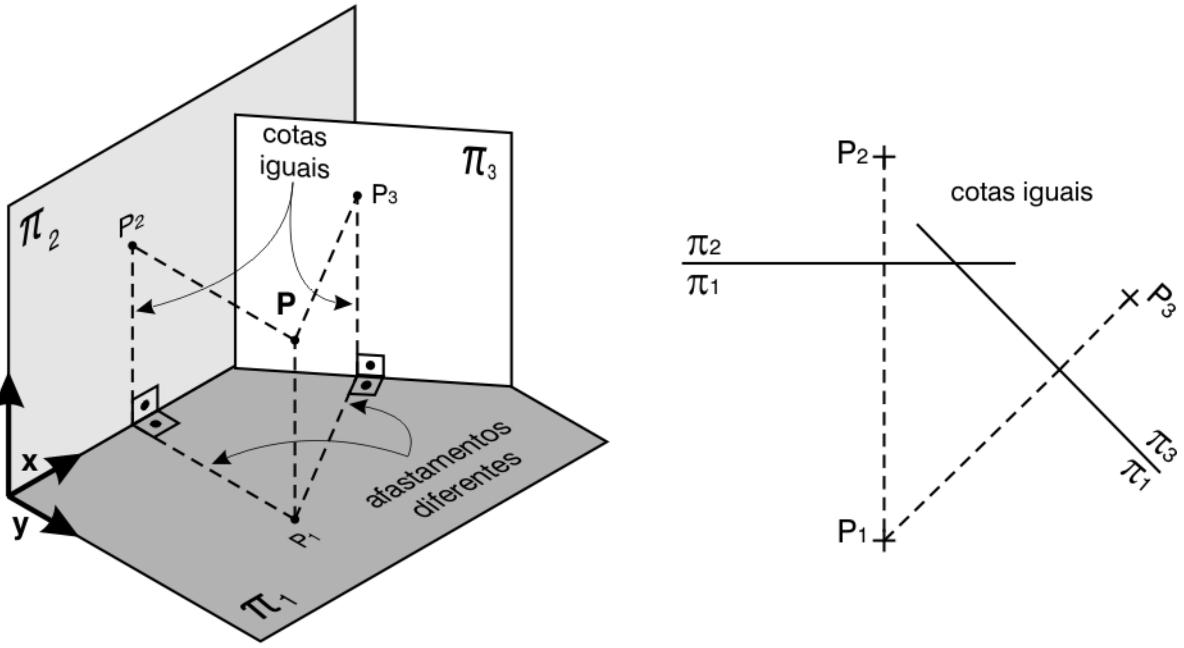


Figura 1.30: Mudança de Plano Vertical de Projeção ($\pi 2 \Rightarrow \pi 3$)

Note que no segundo caso a *cota* do ponto, ou a distância do ponto P à π1 é constante, independente da posição do Plano Vertical (π2, π3 e outros arbitrariamente colocados).

Pode-se então colocar o Plano Vertical π3 onde quisermos, sendo que na Épura, a cota dos pontos representada em π3 deve ser a mesma representada em π2.

A essa operação de colocarmos Planos de Projeção adicionais chamamos de *Mudança de Planos.* Ela pode ser usada para a obtenção da VG de figuras no espaço.

Por exemplo, seja novamente o segmento *AB* da Figura 1.26. A obtenção de sua VG por mudança de planos está mostrada na Figura 1.31.

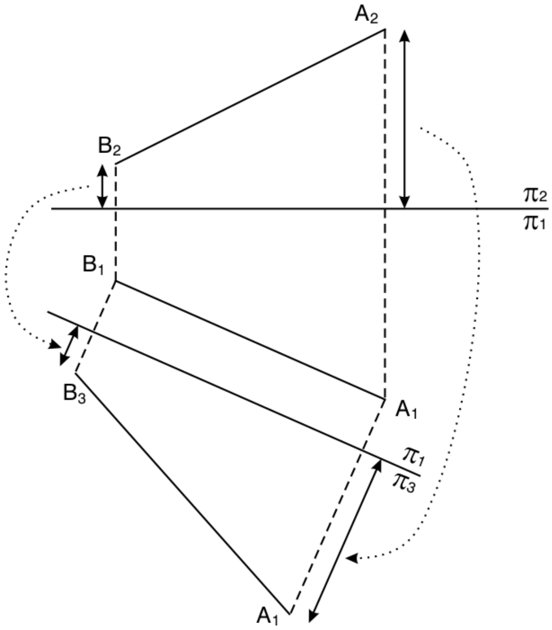
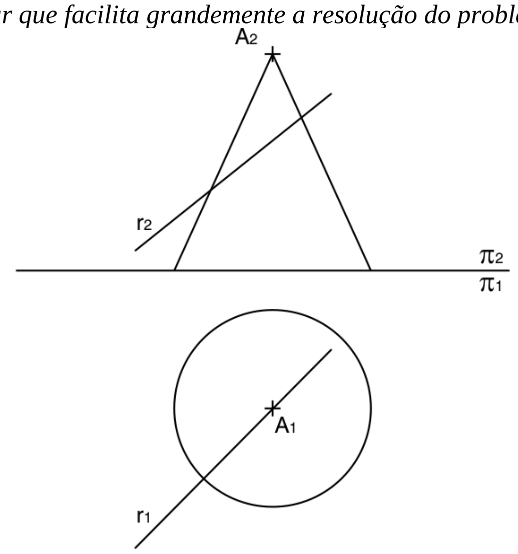


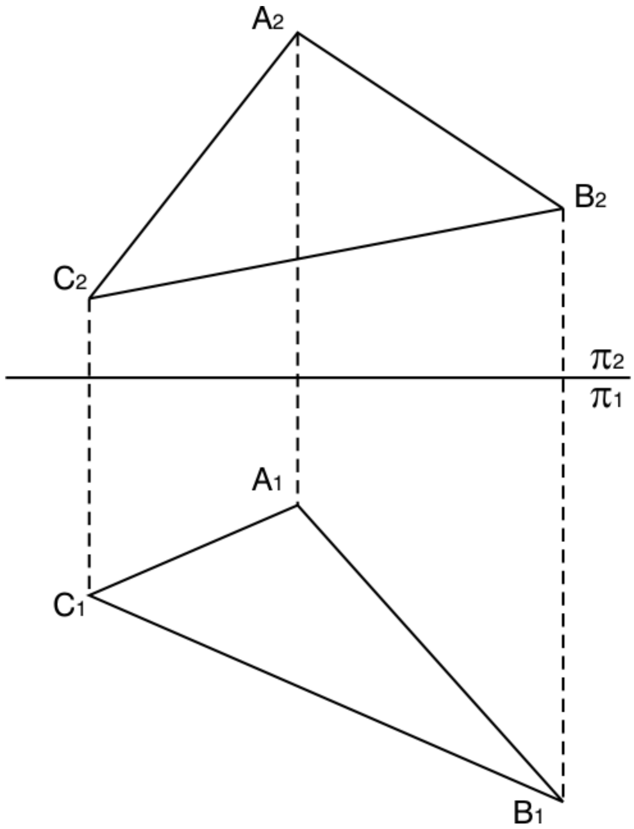
Figura 1.31: Obtenção da VG de um segmento de reta.

Exercício 1.14 :Determinar a interseção a reta r com o cone γ usando a técnica da mudança de planos. Note que r está em uma posição particular que facilita grandemente a resolução do problema.

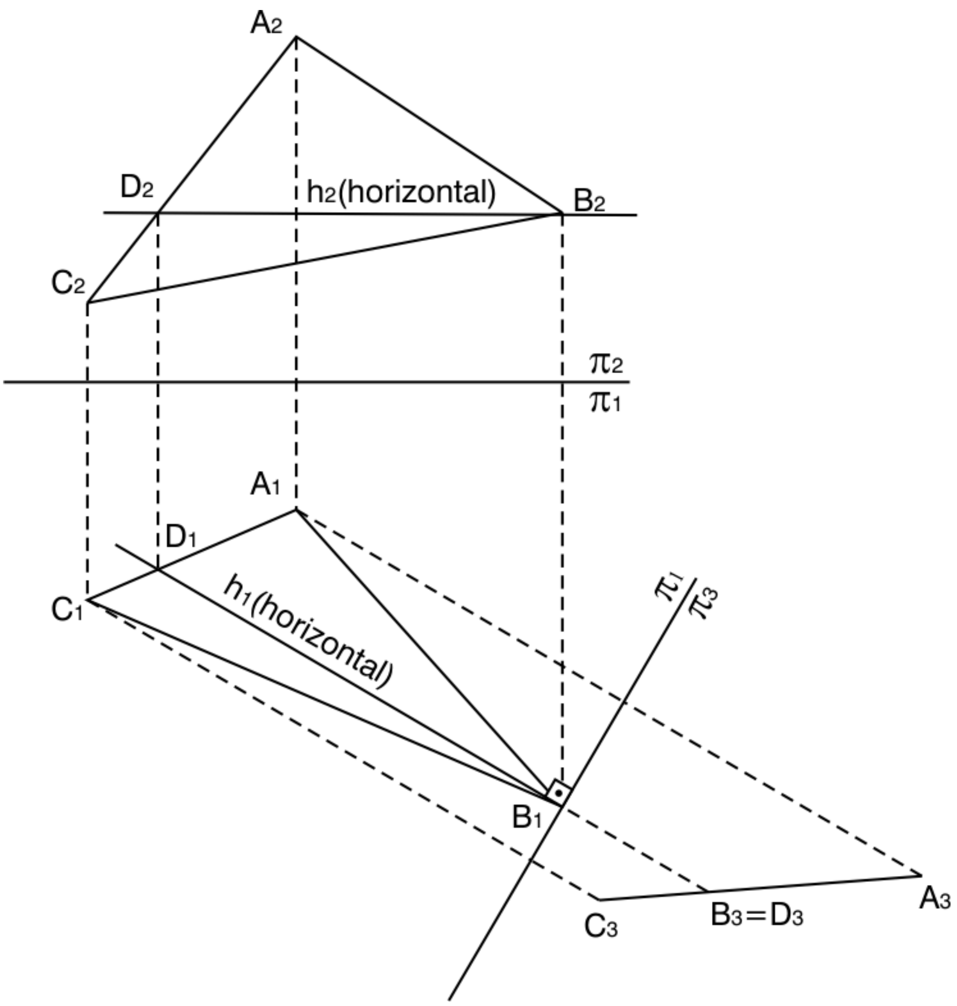


O próximo exercício é importante.

Exercício 1.15: Determinar um Plano de Projeção (sua Linha de Terra) perpendicular ao plano definido pelos pontos A, B e C. Além disso, determinar a projeção do triângulo ABC no novo Plano de Projeção (deve dar apenas um segmento de reta).

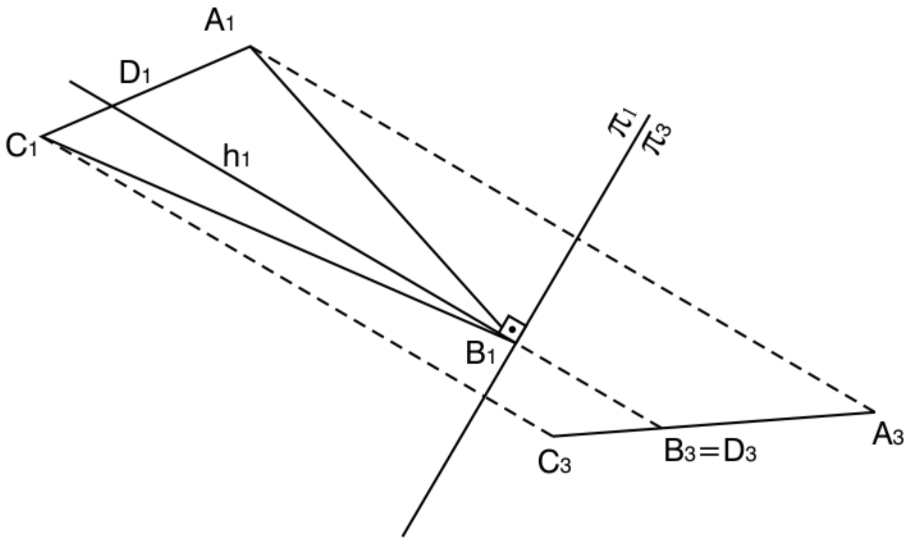


Como esse exercício é importante, aqui está a sua resolução:



O próximo problema será apenas um exercício de aplicação.

Exercício 1.16: Determinar a VG do triângulo ABC representado na Épura. Note duas coisas:
A Épura deste problema é igual à Épura da solução do exercício anterior. O triângulo está em uma posição particular.



Agora a próxima questão, natural, é perguntar se podemos usar o método de mudança de planos para se resolver o problema de determinar a VG de uma figura plana colocada em uma posição qualquer do espaço. A resposta é afirmativa, e se você realmente está entendendo a exposição, você já sabe qual é o procedimento. O procedimento de solução pode ser resumido assim:

Mudar o Plano de Projeção de modo a fazer com que a figura plana fique perpendicular ao novo Plano de Projeção. O resultado do passo anterior define um novo problema, que é o de se determinar a VG de uma figura em uma posição particular.

Resolva agora o problema completo:

Exercício 1.17: Determinar a VG do triângulo definido pelos pontos A, B, e C.