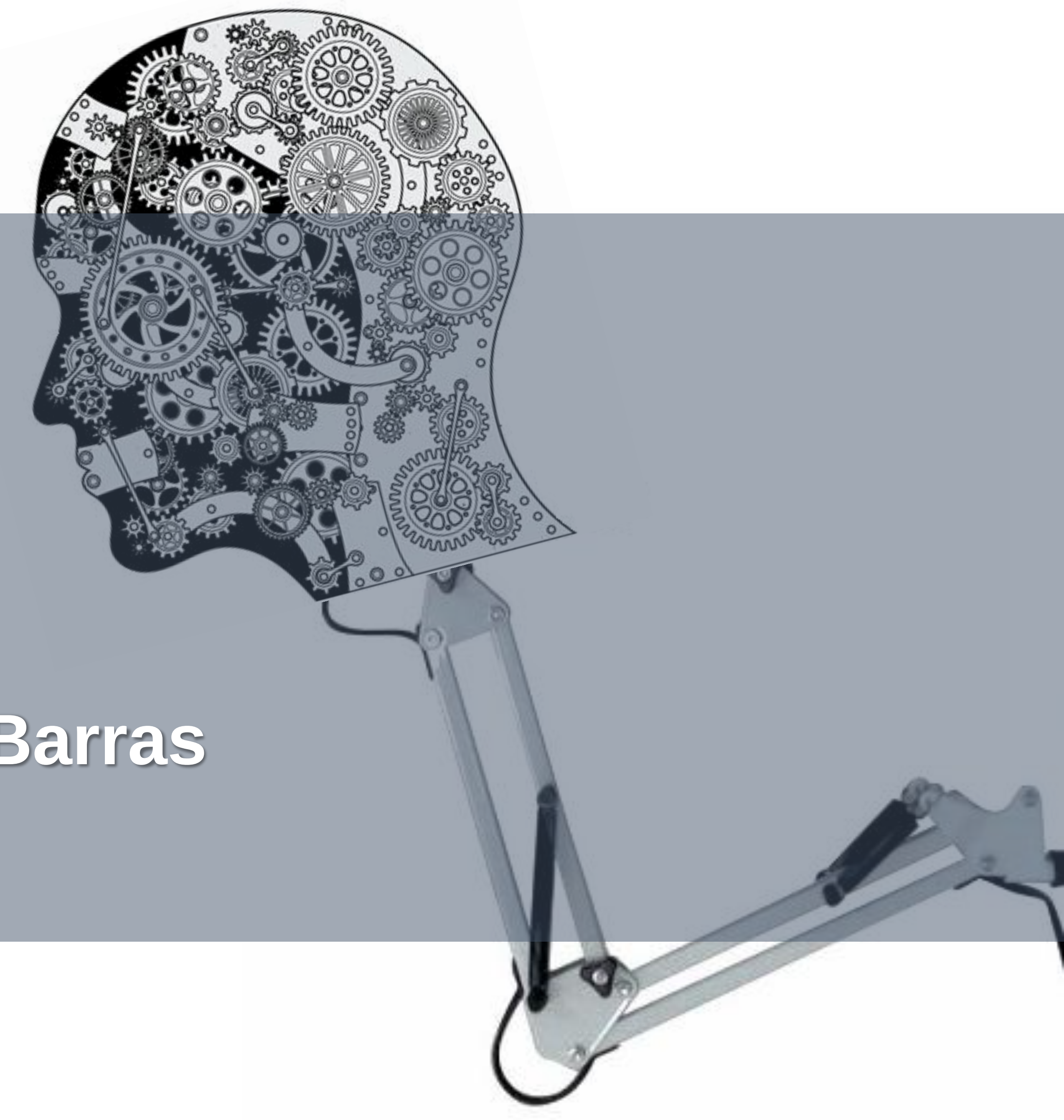
Escola de Engenharia de São Carlos
Departamento de Engenharia Mecânica

SEM 104 - Mecanismos

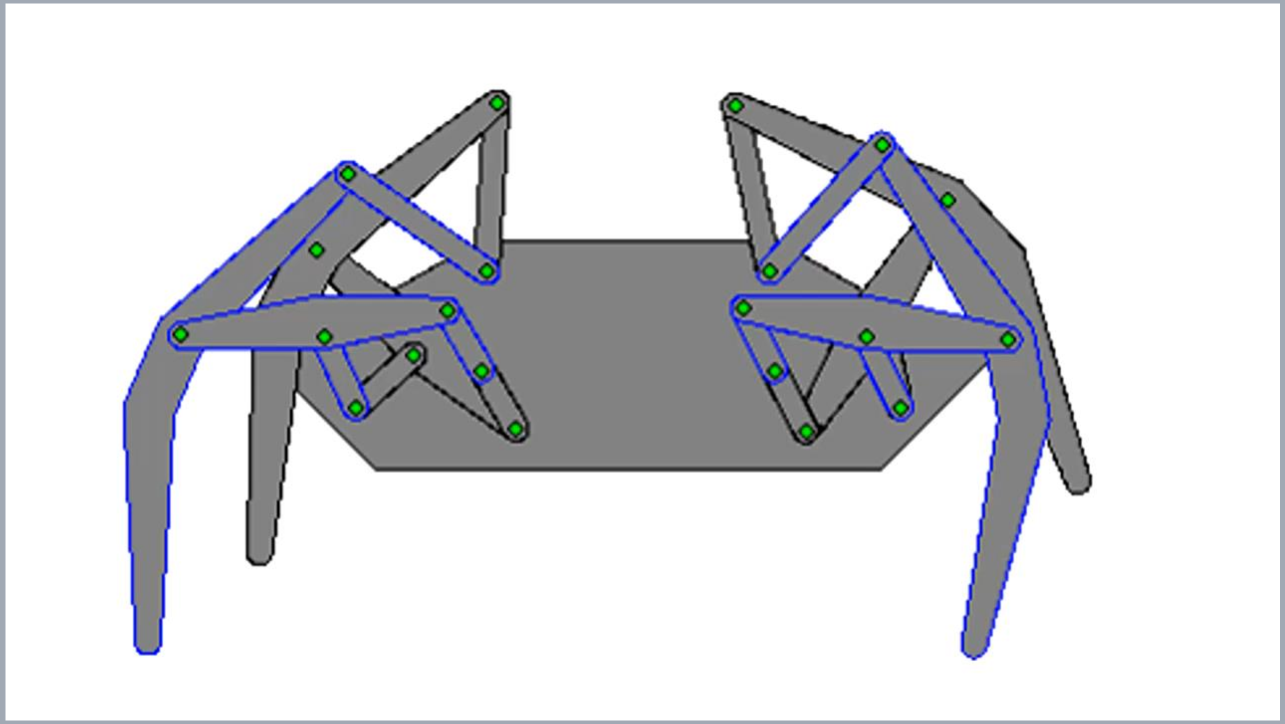
Prof. Rodrigo Nicoletti

AULA 7 – Mecanismo de N Barras

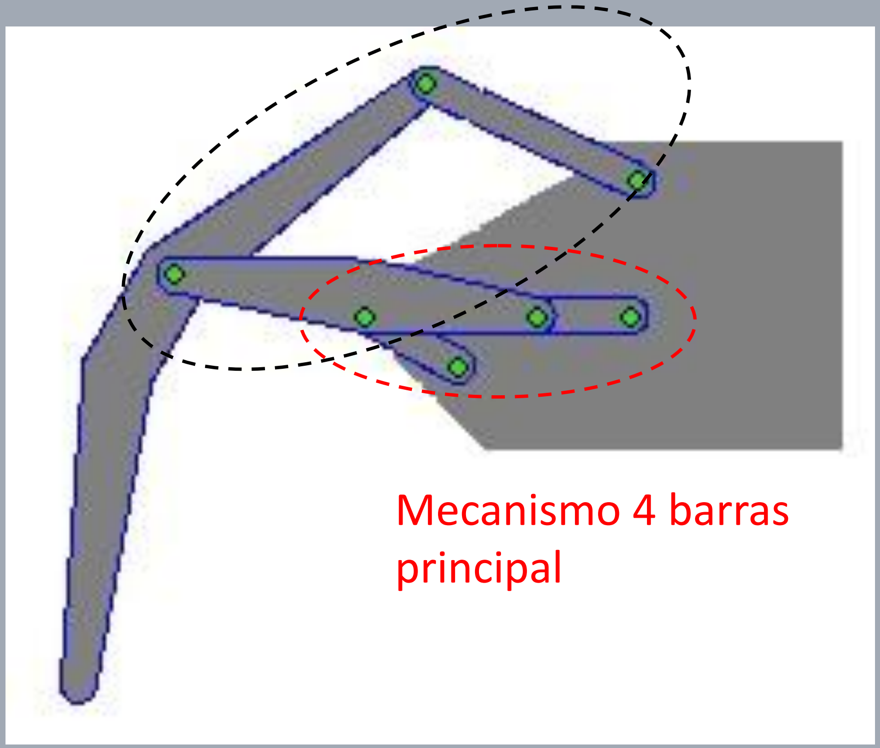


Mecanismo de Klann

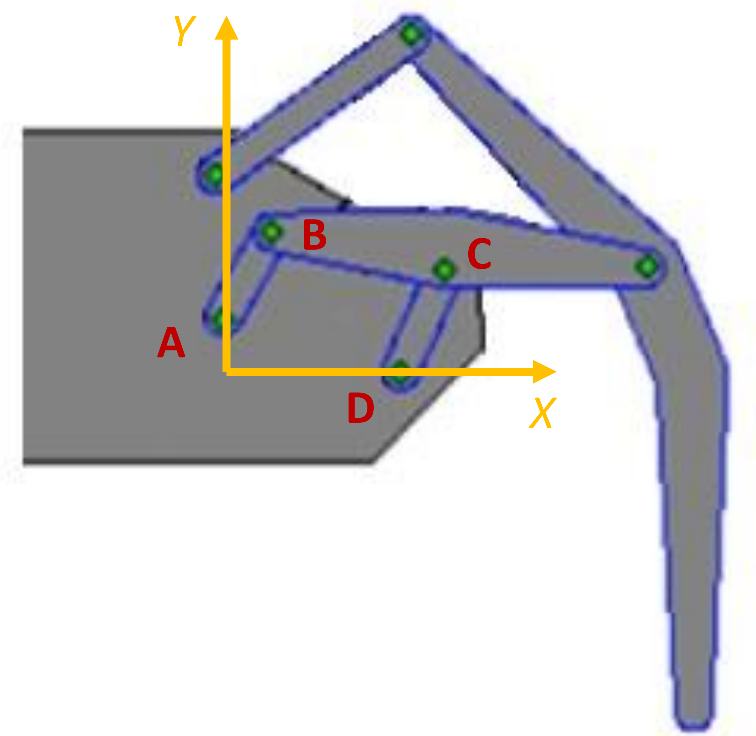
Análise de Posição



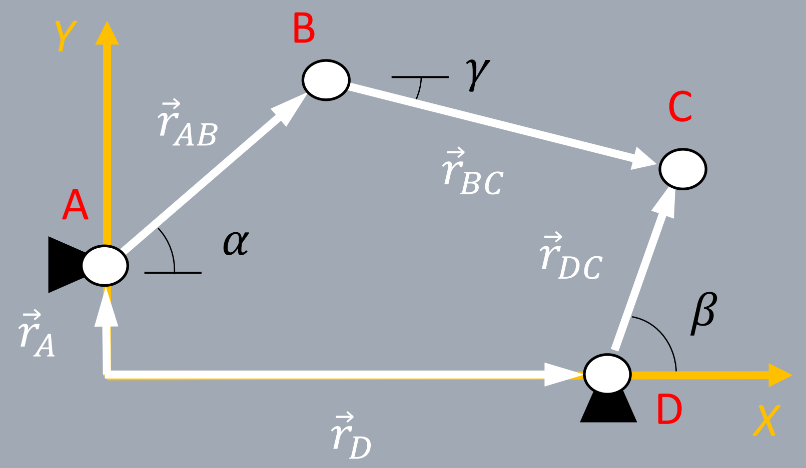
Mecanismo 5 barras
secundário



Análise de Posição



1) Faça a análise de posição do mecanismo principal (4 barras)



$$\begin{cases} L_{AB}\cos\alpha + L_{BC}\cos\gamma - L_{DC}\cos\beta - x_D = 0 \\ L_{AB}\sin\alpha - L_{BC}\sin\gamma - L_{DC}\sin\beta + y_A = 0 \end{cases}$$

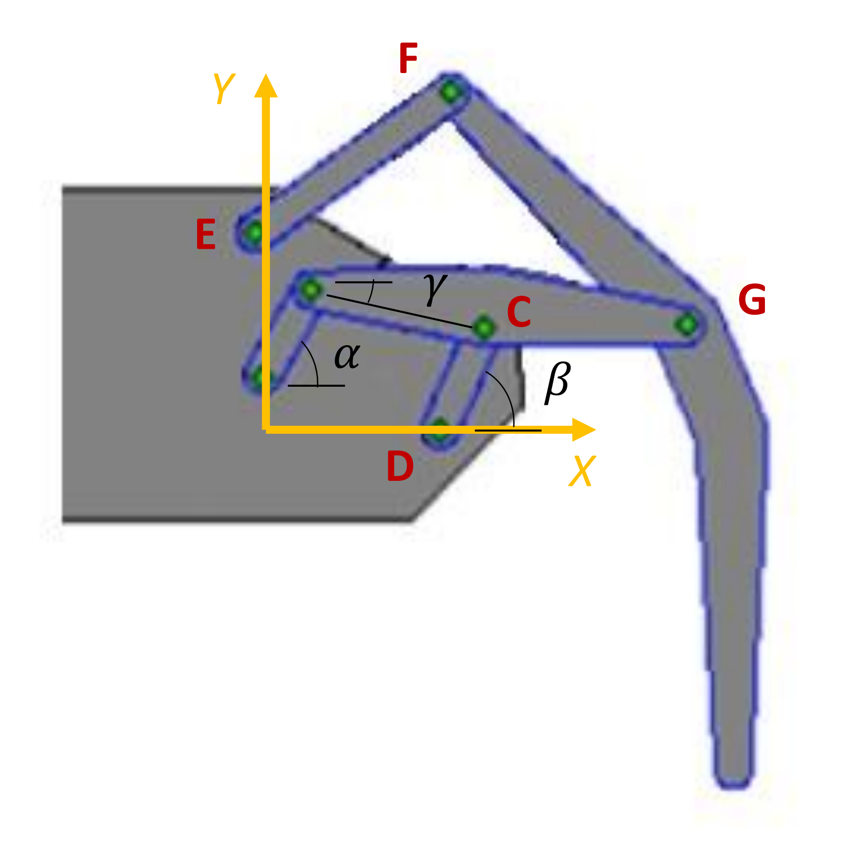
Equação de Posição do Mecanismo Principal

Assim, é possível encontrar:

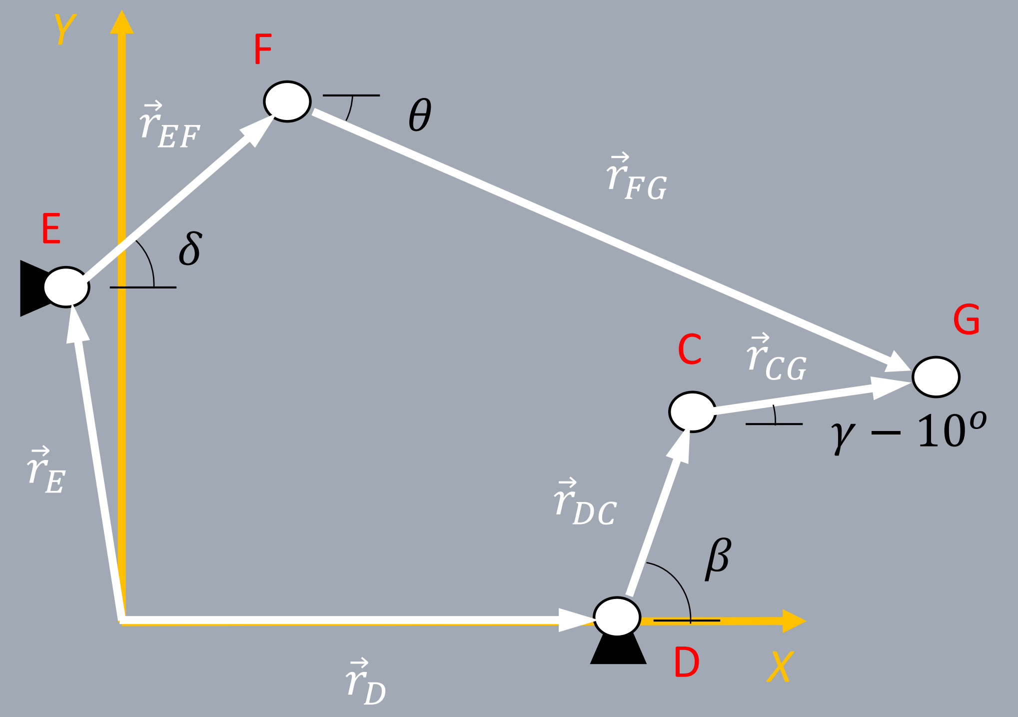
$$\beta = \beta(\alpha)$$
$$\gamma = \gamma(\alpha)$$

α é o ângulo de entrada do mecanismo (motor)

Análise de Posição



2) *Faça a análise de posição do mecanismo secundário (5 barras)*



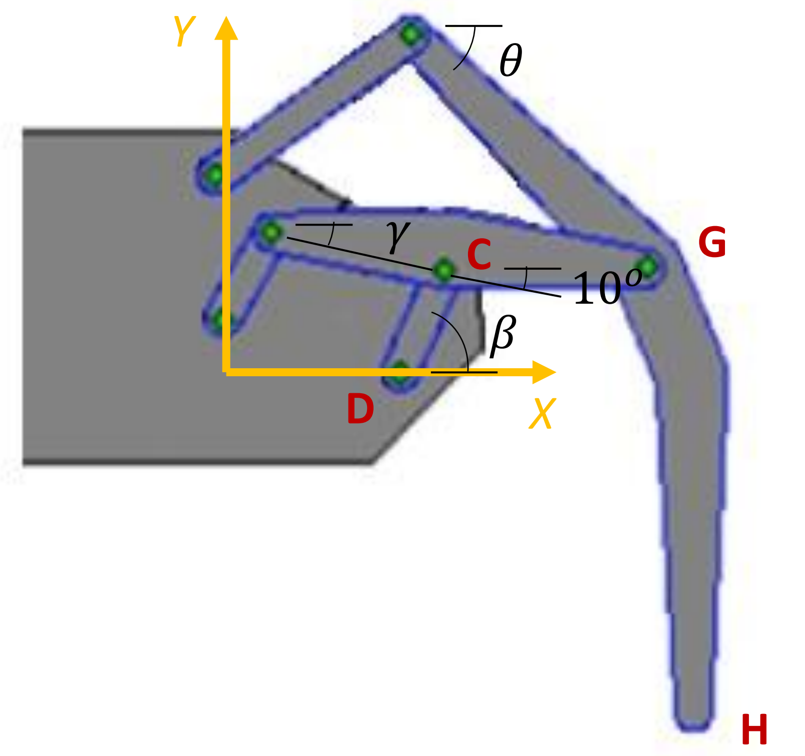
Assim, é possível encontrar:

$$\delta = \delta(\beta, \gamma)$$
$$\theta = \theta(\beta, \gamma)$$

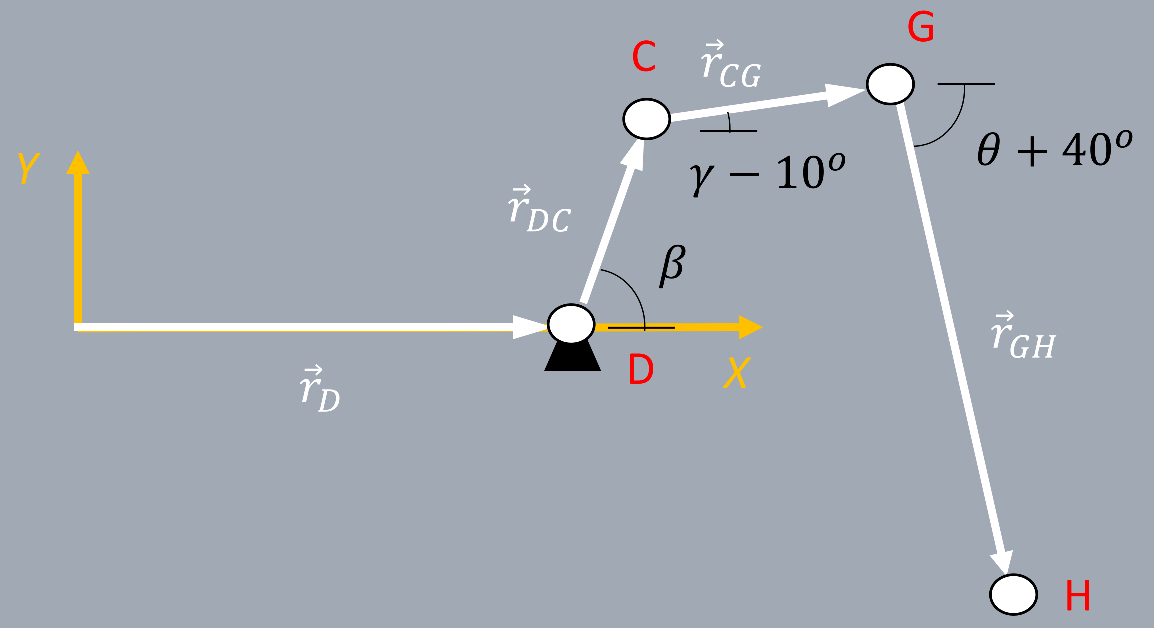
$$\begin{cases} L_{EF}\cos\delta + L_{FG}\cos\theta - L_{CG}\cos(\gamma - 10^o) - L_{DC}\cos\beta - x_D + x_E = 0 \\ L_{EF}\sin\delta - L_{FG}\sin\theta + L_{CG}\sin(\gamma - 10^o) - L_{DC}\sin\beta + y_E = 0 \end{cases}$$

Equação de Posição do Mecanismo Secundário

Análise de Posição



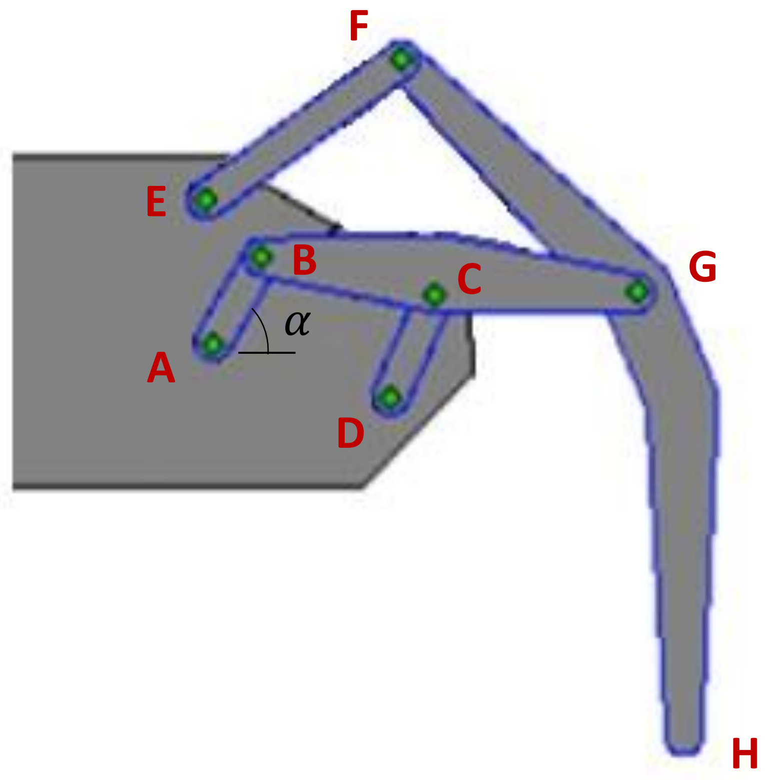
3) Encontre a equação de posição do ponto de interesse (ponto H)



$$\begin{cases} x_H = x_D + L_{DC}\cos\beta + L_{CG}\cos(\gamma - 10^o) + L_{GH}\cos(\theta + 40^o) \\ y_H = L_{DC}\sin\beta - L_{CG}\sin(\gamma - 10^o) - L_{GH}\sin(\theta + 40^o) \end{cases}$$

Equação de Posição do Ponto de Interesse H

Análise de Posição



Portanto, sabendo-se o **ângulo de entrada α**, pode-se encontrar:

$$\begin{matrix} \beta = \beta(\alpha) \\ \gamma = \gamma(\alpha) \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \delta = \delta(\beta,\gamma) \\ \theta = \theta(\beta,\gamma) \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_H = x_H(\beta,\gamma,\theta) \\ y_H = y_H(\beta,\gamma,\theta) \end{matrix}$$

Resolvendo-se:

$$\begin{cases} L_{AB}\cos\alpha + L_{BC}\cos\gamma - L_{DC}\cos\beta - x_D = 0 \\ L_{AB}\sin\alpha - L_{BC}\sin\gamma - L_{DC}\sin\beta + y_A = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_{EF}\cos\delta + L_{FG}\cos\theta - L_{CG}\cos(\gamma - 10^o) - L_{DC}\cos\beta - x_D + x_E = 0 \\ L_{EF}\sin\delta - L_{FG}\sin\theta + L_{CG}\sin(\gamma - 10^o) - L_{DC}\sin\beta + y_E = 0 \end{cases}$$

Como resolver? **MÉTODO NUMÉRICO:** método de Newton-Raphson

Observe que a solução é o zero das funções !!!

Método de Newton-Raphson

Método de Newton-Raphson

A **Série de Taylor** de uma função, truncada na primeira ordem, é dada por:

$$f(x) - f(x_0) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} (x - x_0)$$

Se eu quero o zero da função, então: $f(x) = 0$

Assim: $$x = x_0 - \left(\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0}\right)^{-1} f(x_0)$$

Pode-se escrever esta equação de forma iterativa:

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \left(\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_k}\right)^{-1} f(x_k)}$$

Método de Newton-Raphson

Dado um chute inicial x_1, pode-se encontrar a solução que torna $f(x) = 0$ de forma iterativa !!!

Método de Newton-Raphson

O Método de Newton-Raphson também pode ser usado em **sistema de equações**.

Considere um sistema com N equações:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} f_1 = f_1(a, b, c, \dots, z) \\ f_2 = f_2(a, b, c, \dots, z) \\ \vdots \\ f_N = f_N(a, b, c, \dots, z) \end{cases}$$

Onde: $\boldsymbol{x} = \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ \vdots \\ z \end{Bmatrix}$

Neste caso, o Método Newton-Raphson tem a forma:

$$\boxed{\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{\Phi}_k^{-1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)}$$

Método de Newton-Raphson

Onde a **Matriz Jacobiana** é dada por:

$$\boldsymbol{\Phi}_k = \begin{bmatrix} \left.\frac{df_1}{da}\right|_k & \left.\frac{df_1}{db}\right|_k & \cdots & \left.\frac{df_1}{dz}\right|_k \\ \left.\frac{df_2}{da}\right|_k & \left.\frac{df_2}{db}\right|_k & \cdots & \left.\frac{df_2}{dz}\right|_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left.\frac{df_N}{da}\right|_k & \left.\frac{df_N}{db}\right|_k & \cdots & \left.\frac{df_N}{dz}\right|_k \end{bmatrix}$$

Dado um chute inicial $\boldsymbol{x}_1$, pode-se encontrar a solução que torna $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ de forma iterativa !!!

Método de Newton-Raphson (mecanismo de Klann)

Consiedere o **Mecanismo de Klann:**

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} f_1 = L_{AB}\cos\alpha + L_{BC}\cos\gamma - L_{DC}\cos\beta - x_D \\ f_2 = L_{AB}\sin\alpha - L_{BC}\sin\gamma - L_{DC}\sin\beta + y_A \\ f_3 = L_{EF}\cos\delta + L_{FG}\cos\theta - L_{CG}\cos(\gamma - 10^o) - L_{DC}\cos\beta - x_D + x_E \\ f_4 = L_{EF}\sin\delta - L_{FG}\sin\theta + L_{CG}\sin(\gamma - 10^o) - L_{DC}\sin\beta + y_E \end{cases}$$

Onde: $\boldsymbol{x} = \begin{Bmatrix} \gamma \\ \beta \\ \delta \\ \theta \end{Bmatrix}$

Então, a Matriz Jacobiana é dada por:

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} -L_{BC}\sin\gamma & L_{DC}\sin\beta & 0 & 0 \\ -L_{BC}\cos\gamma & -L_{DC}\cos\beta & 0 & 0 \\ L_{CG}\sin(\gamma - 10^o) & L_{DC}\sin\beta & -L_{EF}\sin\delta & -L_{FG}\sin\theta \\ L_{CG}\cos(\gamma - 10^o) & -L_{DC}\cos\beta & L_{EF}\cos\delta & -L_{FG}\cos\theta \end{bmatrix}$$

Dado um chute inicial $\boldsymbol{x}_1 = \{\gamma_1 \quad \beta_1 \quad \delta_1 \quad \theta_1\}^T$, pode-se encontrar a solução de forma iterativa:

Método de Newton-Raphson

$$\boxed{\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{\Phi}_k^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)}$$

Método de Newton-Raphson (mecanismo de Klann)

Tomemos os parâmetros:

$$L_{AB} = 120\ mm$$
$$L_{BC} = 350\ mm$$
$$L_{DC} = 140\ mm$$
$$L_{CG} = 360\ mm$$
$$L_{EF} = 270\ mm$$
$$L_{FG} = 360\ mm$$
$$L_{GH} = 430\ mm$$

$$x_D = 350\ mm$$
$$y_A = 90\ mm$$
$$x_E = 290\ mm$$
$$y_E = 230\ mm$$

Se $\alpha = 60^o$ e $\boldsymbol{x}_1 = \begin{cases} \gamma_1 = 15^o \\ \beta_1 = 60^o \\ \delta_1 = 45^o \\ \theta_1 = 60^o \end{cases}$

Então, usando o Método de Newton-Raphson:

$$\boldsymbol{x}_2 = \{10{,}5138 \quad 67{,}0074 \quad 36{,}7323 \quad 45{,}7048\}^T$$
$$\boldsymbol{x}_3 = \{10{,}6570 \quad 67{,}3283 \quad 34{,}4691 \quad 45{,}7564\}^T$$
$$\boldsymbol{x}_4 = \{10{,}6570 \quad 67{,}3283 \quad 34{,}4634 \quad 45{,}7220\}^T$$
$$\boldsymbol{x}_5 = \{10{,}6570 \quad 67{,}3283 \quad 34{,}4634 \quad 45{,}7220\}^T$$
$$\boldsymbol{x}_6 = \{10{,}6570 \quad 67{,}3283 \quad 34{,}4634 \quad 45{,}7220\}^T$$

CONVERGIU !!!

Portanto: $\boldsymbol{x} = \begin{cases} \gamma = 10{,}657^o \\ \beta = 67{,}3283^o \\ \delta = 34{,}4634^o \\ \theta = 45{,}722^o \end{cases}$ Para $\alpha = 60^o$

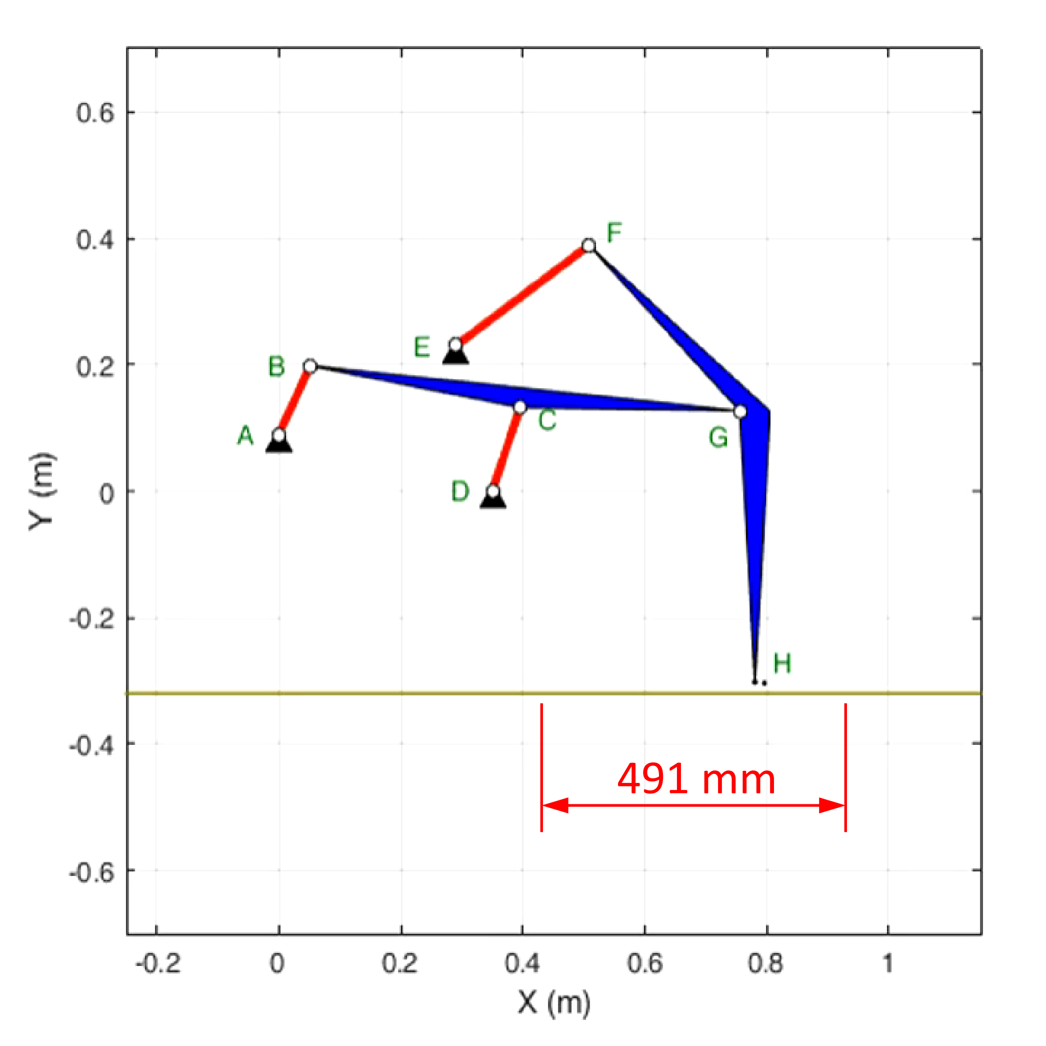
Este procedimento se repete para cada ângulo de entrada α !!!

Método de Newton-Raphson (mecanismo de Klann)

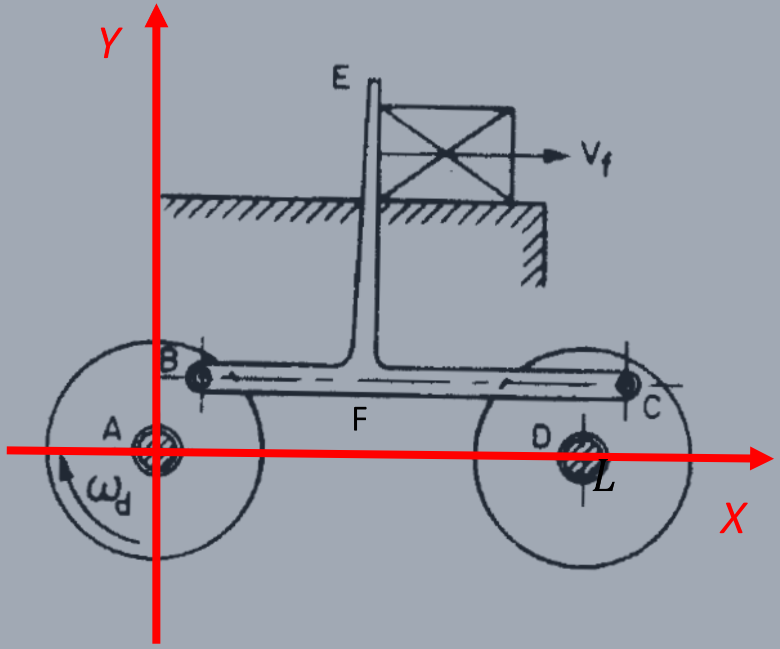
Tomemos os parâmetros:

$$L_{AB} = 120\ mm$$
$$L_{BC} = 350\ mm$$
$$L_{DC} = 140\ mm$$
$$L_{CG} = 360\ mm$$
$$L_{EF} = 270\ mm$$
$$L_{FG} = 360\ mm$$
$$L_{GH} = 430\ mm$$

$$x_D = 350\ mm$$
$$y_A = 90\ mm$$
$$x_E = 290\ mm$$
$$y_E = 230\ mm$$



Tarefa



Implemente o método de Newton-Raphson no Matlab/Octave para obter:

- ângulo da barra BC em função do ângulo de entrada AB
- ângulo do disco DC em função do ângulo de entrada AB

Compare os resultados com os resultados obtidos pelao Método Geométrico

Considere:

$$R_{AB} = 100\ mm$$
$$L_{BC} = 500\ mm$$
$$L_{AD} = 500\ mm$$
$$R_{DC} = 120\ mm$$

Dúvidas ???

Utilize o FÓRUM no eDisciplinas !

edisciplinas.usp.br