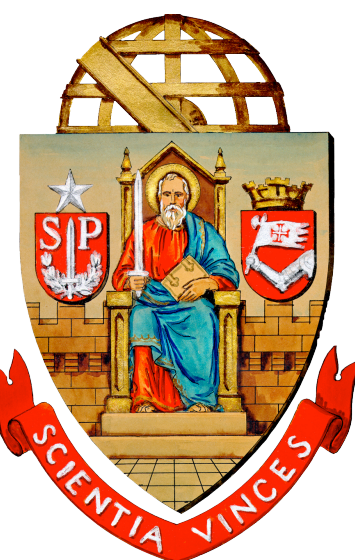


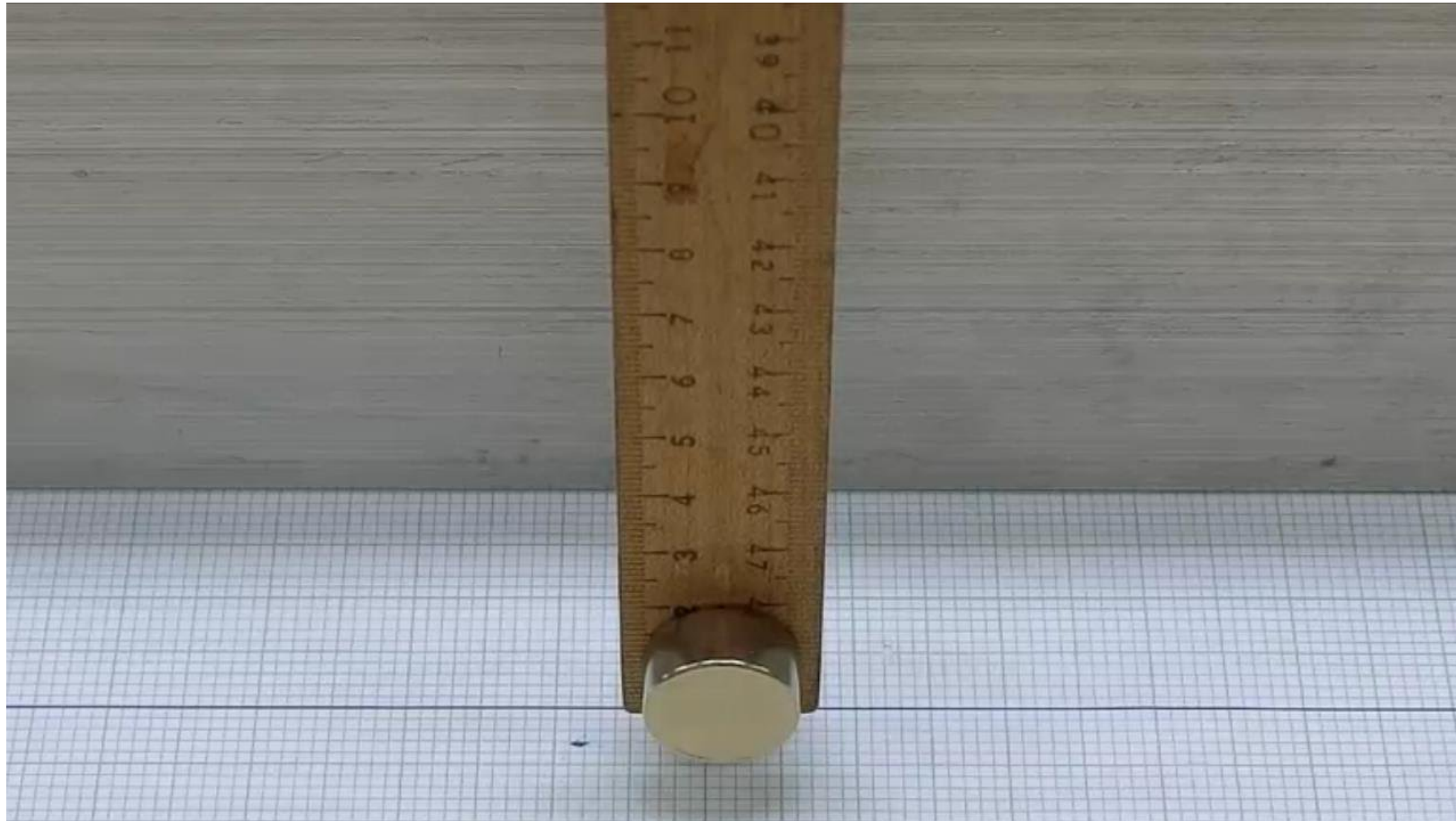
Oscilador Harmônico Amortecido

terceira aula

Oscar Éboli 22 de agosto de 2022



Motivação da primeira parte desta aula:



<https://www.youtube.com/watch?v=99ZE2RGwqSM&t=8s>

Onde paramos:

- Procuremos duas soluções linearmente independentes para a equação homogênea

$$a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = 0$$

- Tentemos $x(t) = e^{pt}$ onde p é uma constante. Substituindo temos que $a p^2 + b p + c = 0$

- Primeiro caso: o discriminante é positivo $b^2 - 4ac > 0$ há duas raízes distintas p_1 e p_2

$$x(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t}$$

- Segundo caso: discriminante nulo $b^2 - 4ac = 0$ há uma única raiz $\delta = -\frac{b}{2a}$

soluções gerais

$$x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\delta t}$$

- Terceiro caso: o discriminante é negativo $b^2 - 4ac < 0$ logo $p_{1,2} = -\delta \pm i\omega$

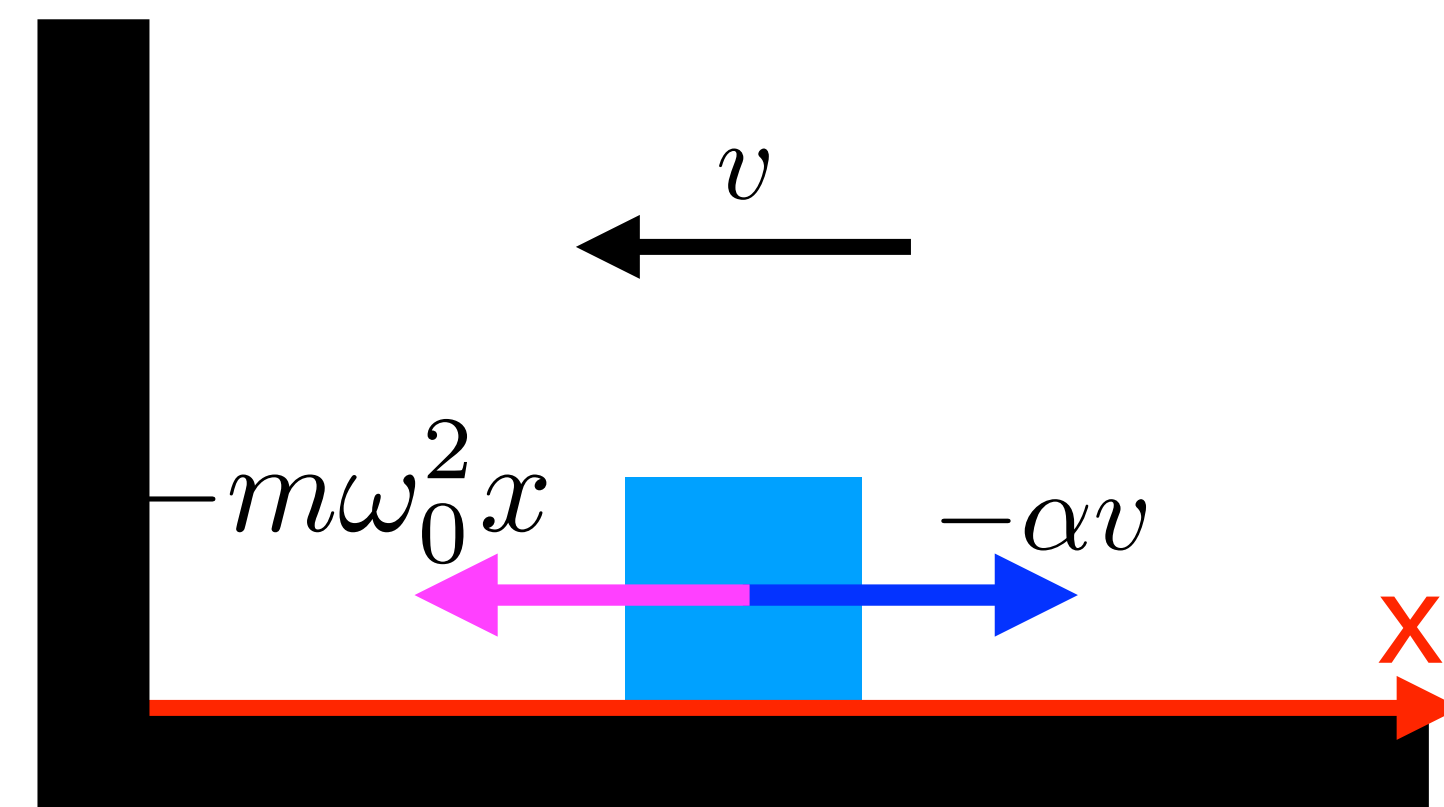
$$z(t) = e^{-\delta t} (c_1 e^{-i\omega t} + c_2 e^{+i\omega t}) \implies x(t) = e^{-\delta t} [c'_1 \cos(\omega t) + c'_2 \sin(\omega t)]$$

1. Oscilador harmônico amortecido

- Consideremos um oscilador com um amortecimento devido a uma força viscosa

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x - \alpha \frac{dx}{dt} \implies \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

com $\gamma = \frac{\alpha}{m}$ $[\gamma] = \frac{1}{M} \frac{ML}{T^2} \frac{T}{L} = \frac{1}{T}$



- Esta equação descreve vários sistemas físicos!

- Balanço de energia: $E = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2$

$$\frac{dE}{dt} = m \frac{dx}{dt} \frac{d^2 x}{dt^2} + m\omega_0^2 x \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt} \left[m \frac{d^2 x}{dt^2} + m\omega_0^2 x \right] = -\alpha \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \leq 0$$

movimento será amortecido

- Como sabemos temos três casos:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \implies p^2 + \gamma p + \omega_0^2 = 0 \implies p_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$

1. Amortecimento subcrítico

$$\frac{\gamma^2}{4} < \omega_0^2$$

cuja solução geral é

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t) + c_2 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin(\omega t)$$

$$\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

$$= A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$z(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} (c'_1 e^{-i\omega t} + c'_2 e^{+i\omega t})$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \implies p^2 + \gamma p + \omega_0^2 = 0 \implies p_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$

2. **Amortecimento supercrítico** $\frac{\gamma^2}{4} > \omega_0^2$

cuja solução geral é $x(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t}$

3. **Amortecimento crítico** $\frac{\gamma^2}{4} = \omega_0^2$

cuja solução geral é $x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2} t} (c_1 + c_2 t)$

Discussão dos resultados:

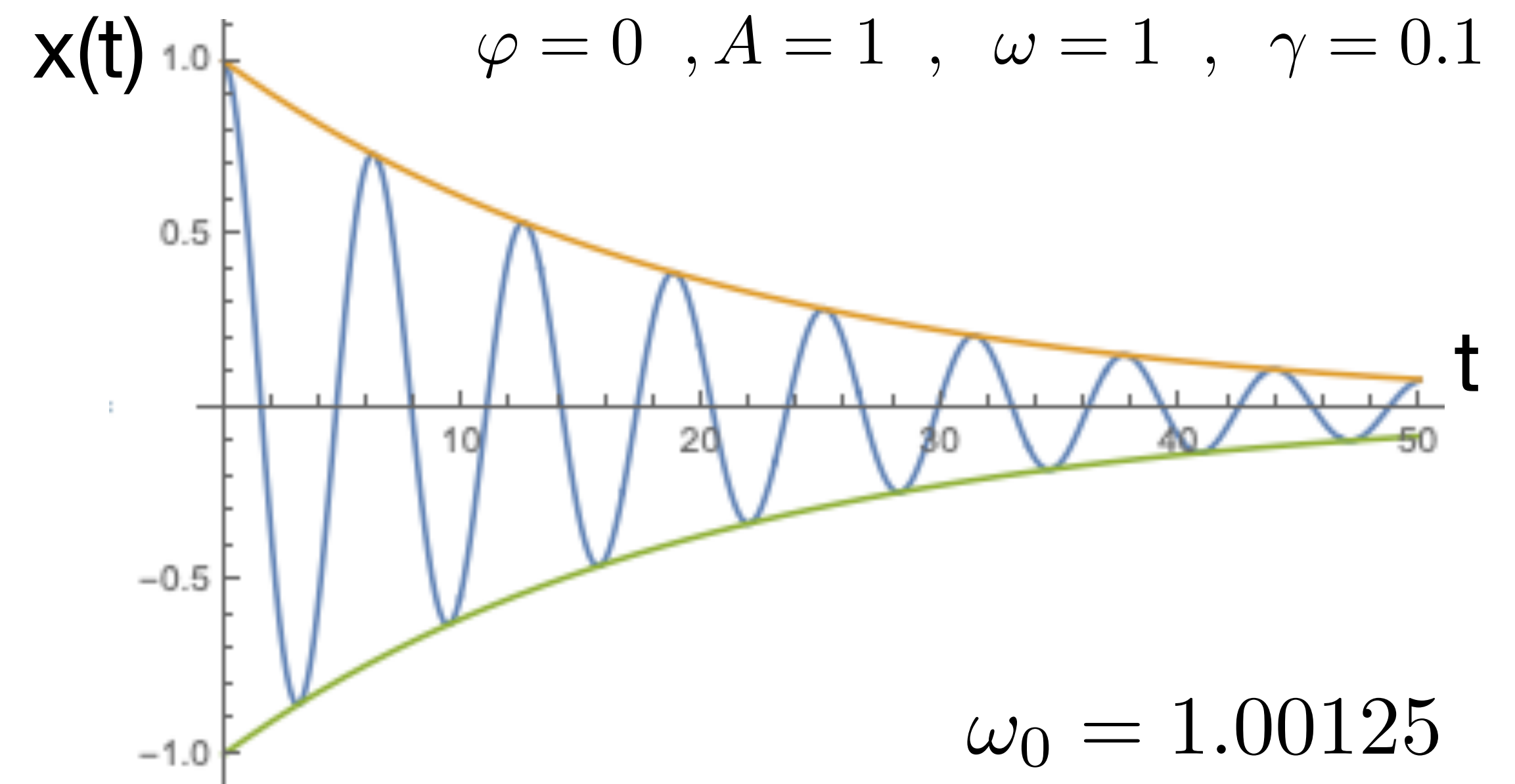
1. Amortecimento subcrítico

$$\frac{\gamma^2}{4} < \omega_0^2$$

a frequência "de oscilação" é menor

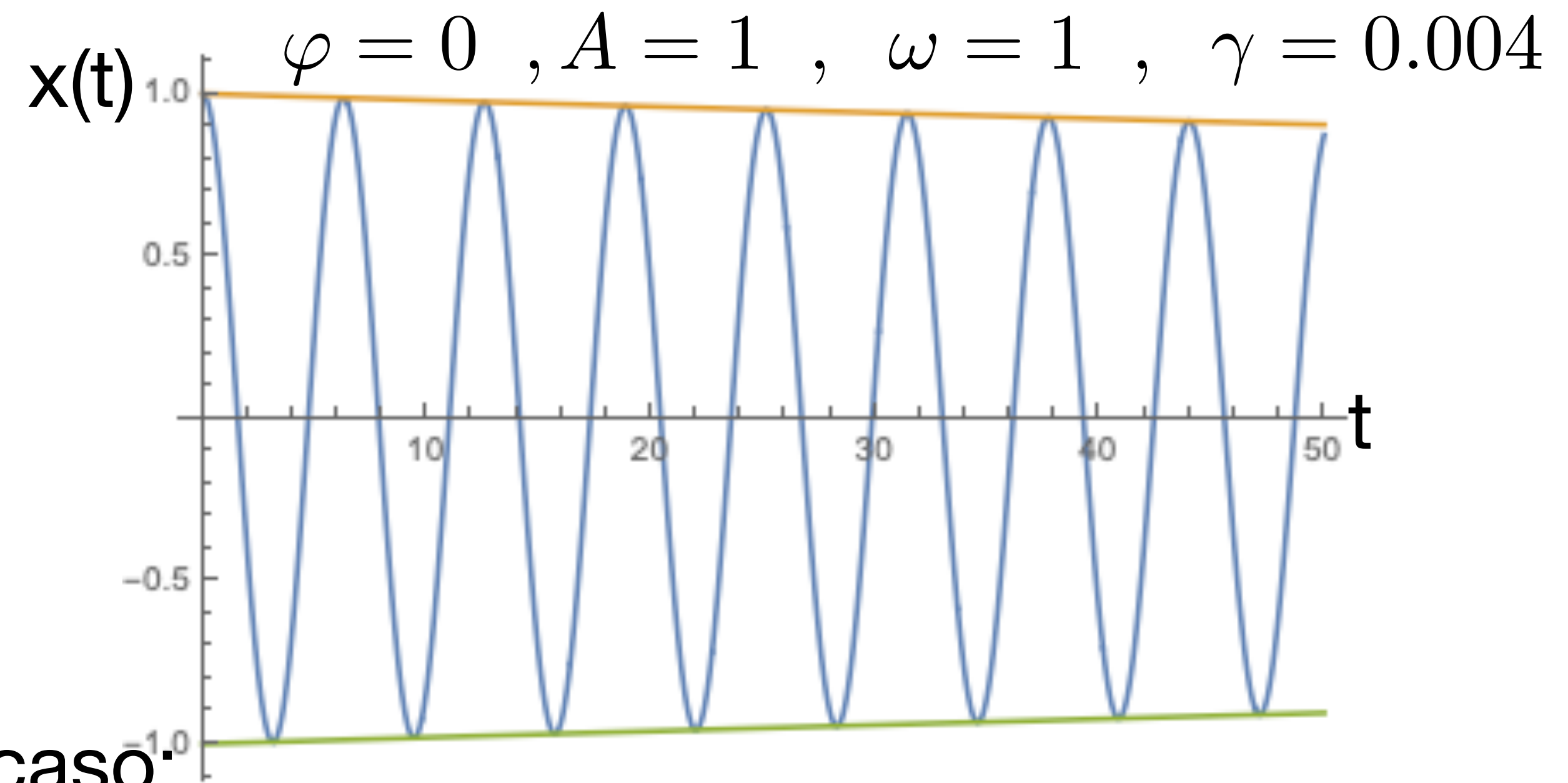
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} < \omega_0$$

$$x(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \varphi)$$



- Para acoplamentos fracos $\frac{\gamma}{2} \ll \omega_0$ $\omega \simeq \omega_0$

$$x(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \varphi)$$



Vejamos o comportamento da energia neste caso:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{\gamma}{2} A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \varphi) - \omega A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin(\omega t + \varphi) \\ &= -\omega A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left[\sin(\omega t + \varphi) + \frac{\gamma}{2\omega} \cos(\omega t + \varphi) \right] \\ &\simeq -\omega A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

$$\frac{\gamma}{2} \ll \omega_0$$

$$x(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{dx}{dt} \simeq -\omega A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 e^{-\gamma t} \sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 e^{-\gamma t} \cos^2(\omega t + \varphi) \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 e^{-\gamma t} = E(0)e^{-\gamma t} \end{aligned}$$

logo a energia decai exponencialmente com o tempo!

• Em um “período” a energia perdida é $\Delta E \simeq -\frac{dE}{dt} T = \gamma T E(t)$ com $T = \frac{2\pi}{\omega} \simeq \frac{2\pi}{\omega_0}$

Fator de mérito/qualidade (Q) de um oscilador: $Q \equiv 2\pi \frac{E}{\Delta E} = \frac{2\pi}{\gamma T} = \frac{\omega_0}{\gamma}$ adimensional

Fator de mérito/qualidade (Q) de um oscilador: $Q \equiv 2\pi \frac{E}{\Delta E} = \frac{2\pi}{\gamma T} = \frac{\omega_0}{\gamma}$



- Exemplo: diapasão de 440 Hz

assumindo que a intensidade do som diminui por um fator 5 em 4 segundos:

$$E(4) = e^{-\gamma 4} E(0) = \frac{1}{5} E(0) \implies \gamma = \frac{1}{4} \ln(5) = 0.4$$

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi 440 = 2764.$$

$$Q = \frac{2764}{0.4} = 6911$$

- Exemplo: relógios atômicos possuem $Q \simeq 10^{11}$

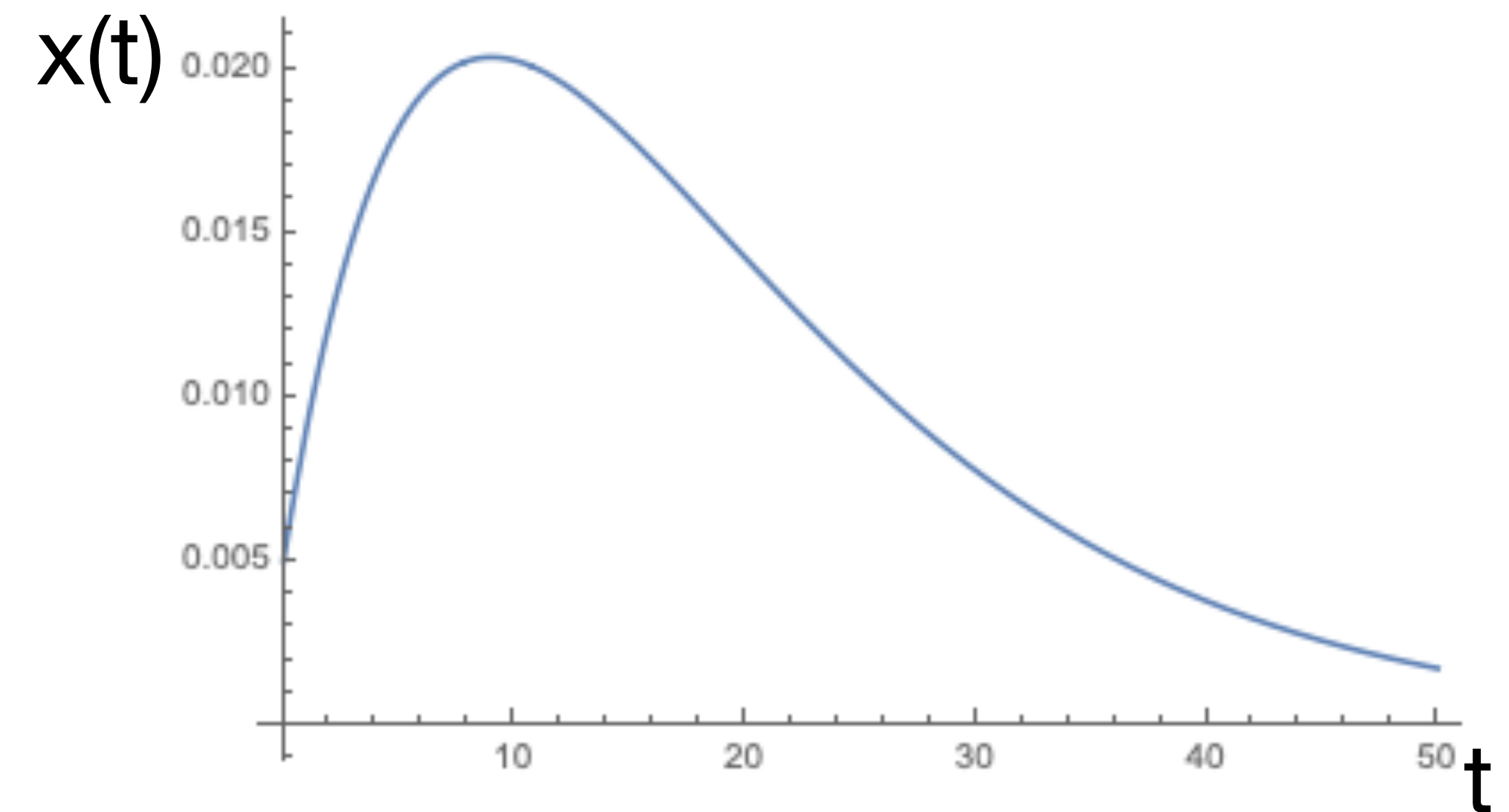
2. Amortecimento supercrítico $\frac{\gamma^2}{4} > \omega_0^2$

$$p^2 + \gamma p + \omega_0^2 = 0 \implies p_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} \equiv -\frac{\gamma}{2} \pm \beta$$

Note que $\beta < \frac{\gamma}{2} \implies p_{1,2} < 0$

cuja solução geral é $x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} (c_1 e^{-\beta t} + c_2 e^{\beta t})$

controla o decaimento para tempos grandes



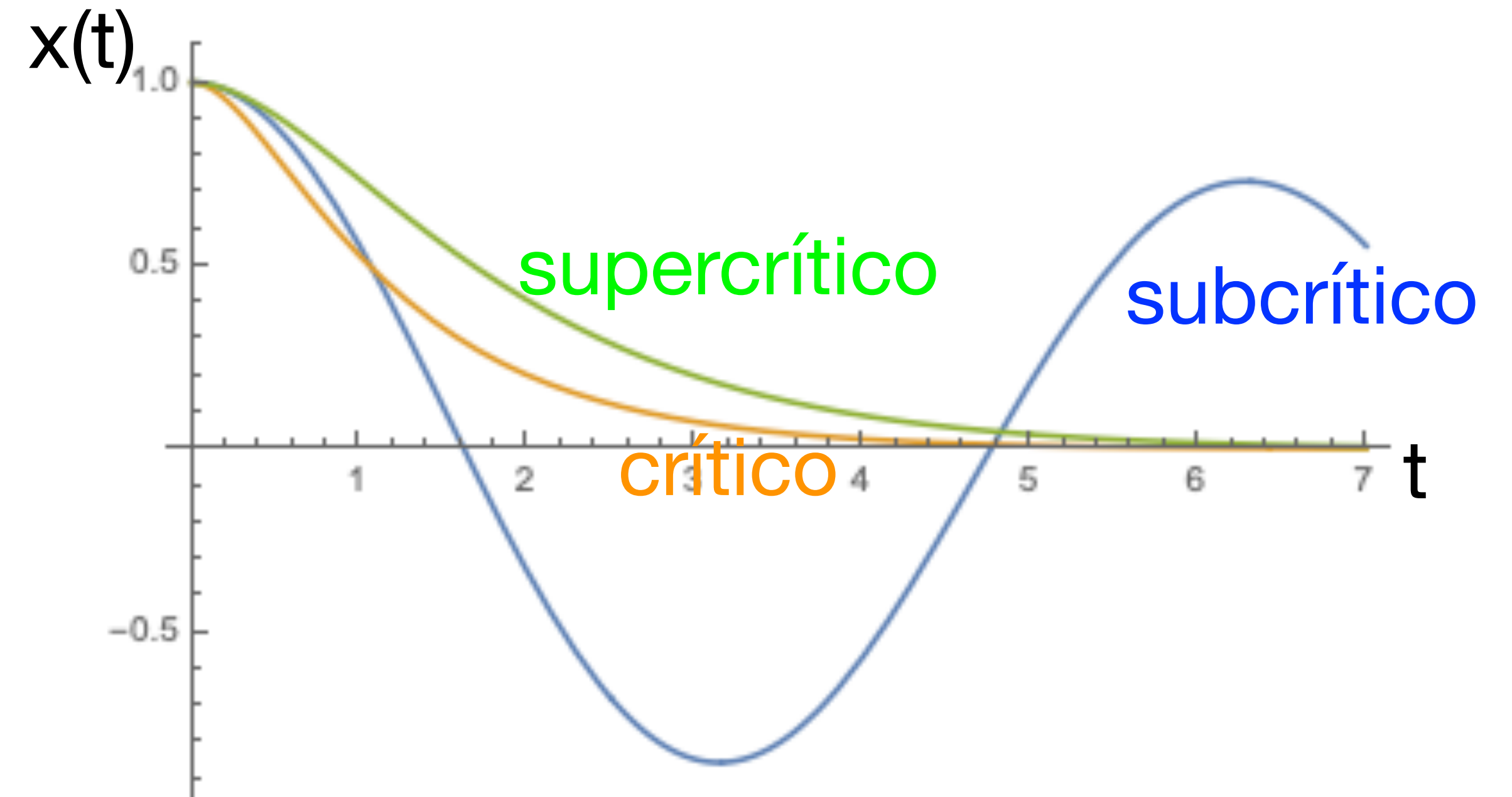
O movimento não é periódico!

3. Amortecimento crítico $\frac{\gamma^2}{4} = \omega_0^2$

cuja solução geral é $x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(c_1 + c_2 t)$

O movimento não é periódico!

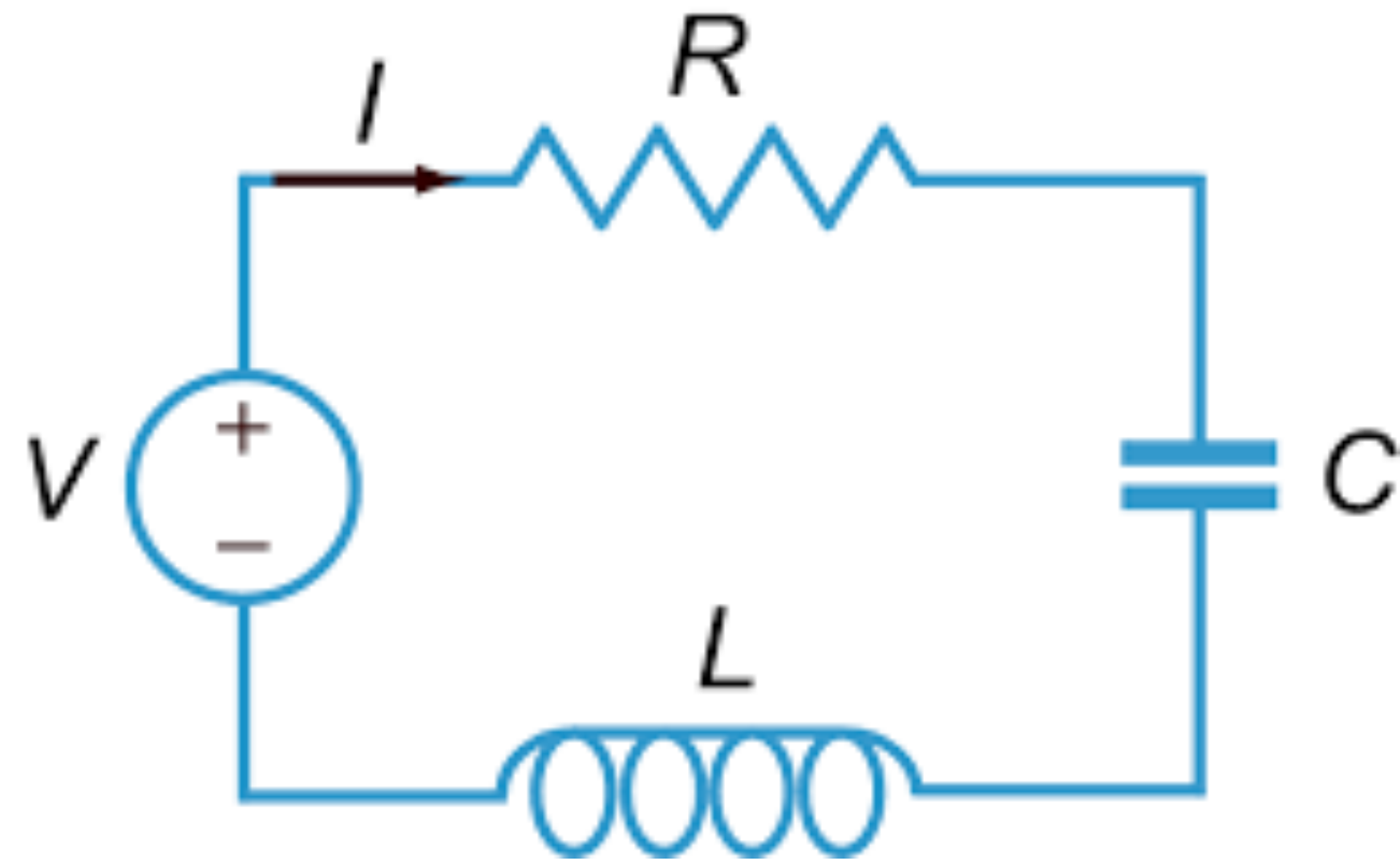
- o sistema retorna mais rapidamente ao equilíbrio com amortecimento crítico



Para praticar: dados $x(0)$ e $v(0)$ encontre o valor das constantes c_1 e c_2 nos 3 casos!

Circuitos elétricos exibem comportamento semelhante

Series RLC circuit



A carga num capacitor de um circuito RLC obedece

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

ou em termos da corrente

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$$

logo,

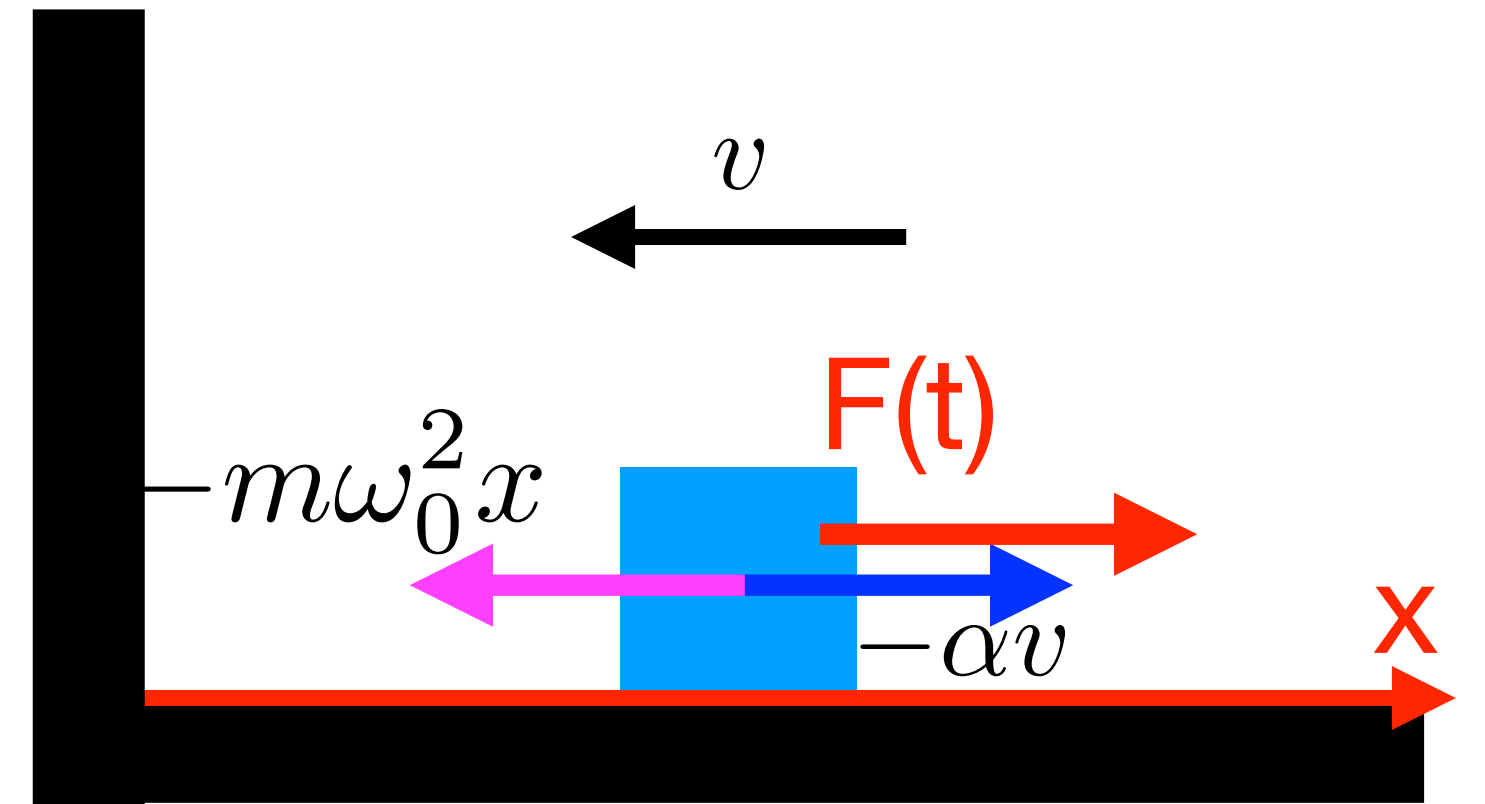
$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad , \quad \gamma = \frac{R}{L}$$

Motivação para a segunda parte desta aula:

<https://www.youtube.com/watch?v=aZNnwQ8HJHU&t=3s>

2. Equações diferenciais não homogêneas

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x - \alpha \frac{dx}{dt} + F(t) \implies \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}$$



Fato sobre a EDO $a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = F(t)$

a solução geral é uma solução particular somada a solução mais geral da homogênea

$$x_p(t) \text{ tal que } a \frac{d^2 x_p}{dt^2} + b \frac{dx_p}{dt} + cx_p = F(t)$$

$$x(t) = y(t) + x_p(t) \implies a \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy = 0$$

já conheço a solução geral!

Logo a solução de

$$a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = F(t)$$

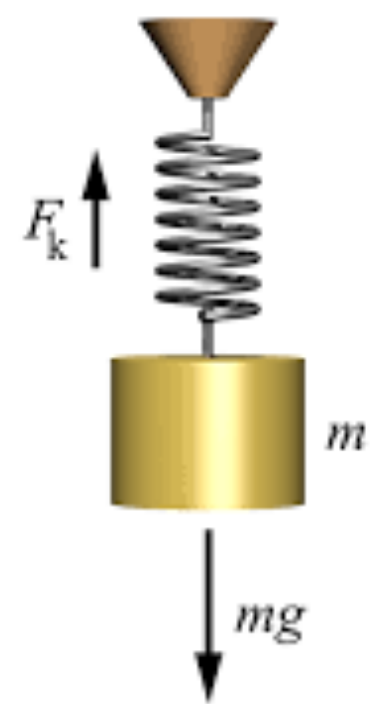
é

$$x(t) = x_p(t) + c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

Como obter a solução particular?

• Tratemos dois casos “particulares”

1. $F(t)$ é constante: $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x - \alpha \frac{dx}{dt} + mg \implies \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = g$



$$x_p = \text{constante é solução} \quad \omega^2 x_p = g \implies x_p = \frac{g}{\omega_0^2}$$

isso poderia ser feito definindo $x' = x - \frac{g}{\omega_0^2}$

2. Força externa $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$

A equação de movimento é $\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$

note que $F_0 \cos(\omega t) = \text{Re} [F_0 e^{i\omega t}]$ logo é útil escrever

$$x(t) = \text{Re} [z(t)] \implies \frac{d^2}{dt^2} \text{Re} [z(t)] + \gamma \frac{d}{dt} \text{Re} [z(t)] + \omega_0^2 \text{Re} [z(t)] = \text{Re} \left[\frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \right]$$

como a parte real comuta com a derivada, podemos procurar $z(t)$ que satisfaz

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \gamma \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

• Solução particular de
$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \gamma \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

• Já que a derivada de uma exponencial é proporcional a ela: $z(t) = z_0 e^{i\omega t}$

• implicando que
$$(i\omega)^2 z_0 e^{i\omega t} + \gamma i\omega z_0 e^{i\omega t} + \omega_0^2 z_0 e^{i\omega t} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

$$(-\omega^2 + \omega_0^2 + i\gamma\omega) z_0 = \frac{F_0}{m}$$

$$z_0 = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}$$

Escrevendo $z_0 = Ae^{i\varphi} = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}$

temos $A^2 = \frac{F_0^2}{m^2((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2)}$

além disso $Ae^{i\varphi} = \frac{F_0}{m((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2)} (\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega) \implies \tan \varphi = -\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$

logo $x_p = \text{Re}[z(t)] = A(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega))$

análise da física será feita na próxima aula!

Referências:

1. Moysés Nussenzveig, Curso de Física Básica, vol. 2 seções 4.1 e 4.3
2. Kleppner e Kolenkow, introduction to Mechanics, seções 10.2 e 10.3
3. Kittel, Knight e Ruderman, Mechanics, capítulo 7
4. Feynman, Leyton e Sands, Lectures on Physics, vol. 1, capítulo 21
5. Para equações diferenciais, veja W. Kaplan, Cálculo Avançado, seções 8-9 a 8-11