



*Escola de Engenharia de São Carlos
Universidade de São Paulo*

Representação – EDO/FT

Aula 2

SEM 0169 – Sistemas de Controle

Profa. Máira Martins da Silva

mairams@sc.usp.br

(16) 9 9291 8310

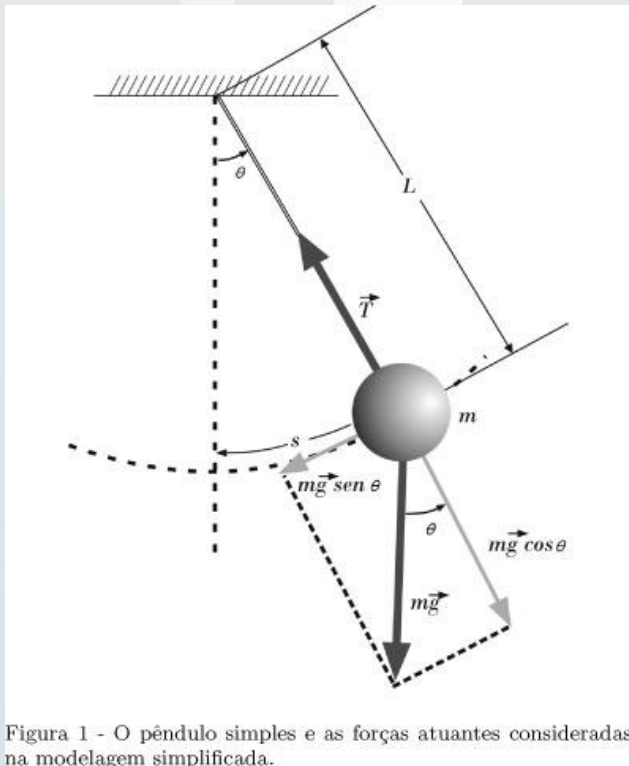


Objetivo

Você usou as Leis da Física em Modelos e conseguiu equacionar o comportamento dinâmico de um sistema (mecânico, elétrico, térmico, etc.). Quais as maneiras que temos para expressar essas equações?

Introdução: Definições

Coordenadas Generalizadas: conjunto de coordenadas independentes que descrevem o comportamento dinâmico de um sistema.



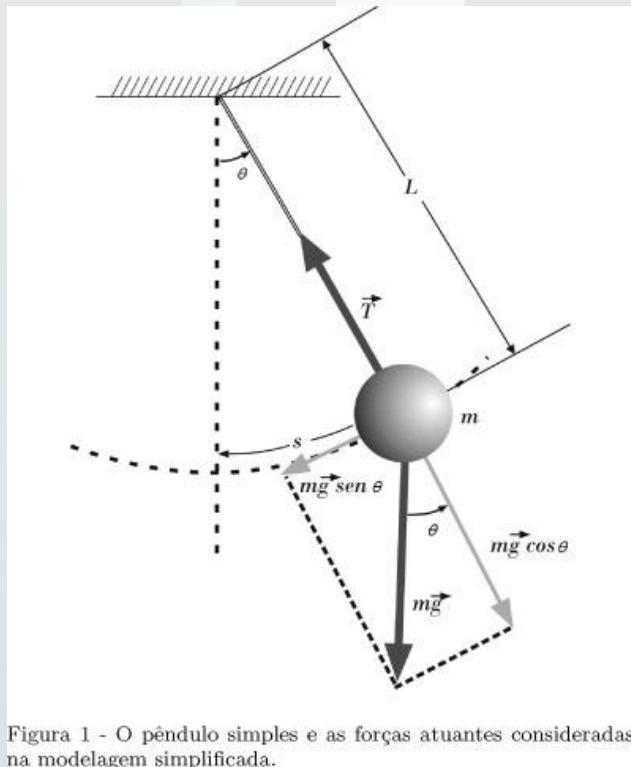
<http://dx.doi.org/10.1590/S1806-11172011000400011>

Introdução: Definições

Número de Graus de Liberdade: é igual ao mínimo número de coordenadas generalizadas para descrever o comportamento dinâmico de um sistema.

Quantos graus de liberdade tem um pêndulo invertido?

1 GDL, podemos escrever x e y em função de θ



<http://dx.doi.org/10.1590/S1806-11172011000400011>

Introdução: Definições

Número de Graus de Liberdade: é igual ao mínimo número de coordenadas generalizadas para descrever o comportamento dinâmico de um sistema.

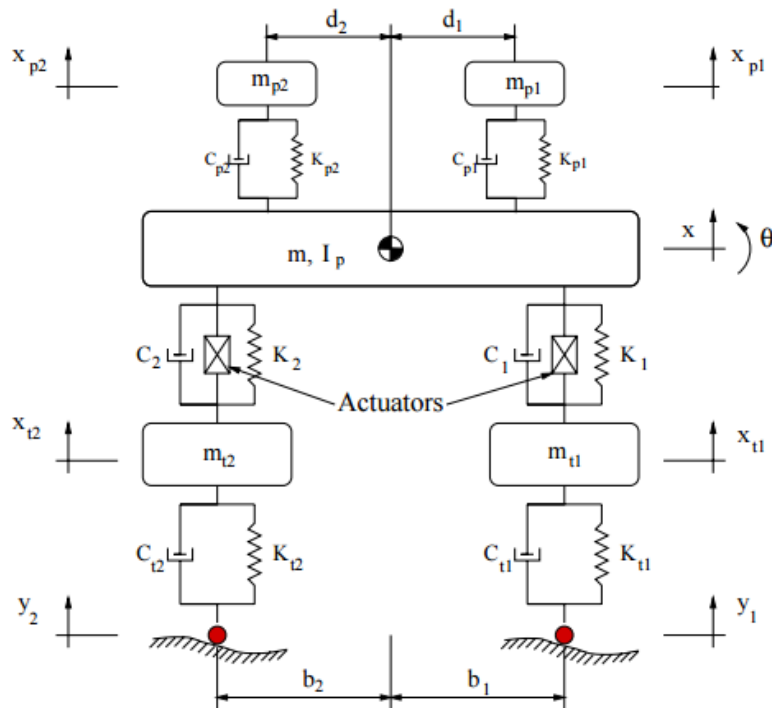


Figure 1: Half-car dynamical model of road-vehicle-passenger with six degrees of freedom .

Quantos graus de liberdade tem o modelo $\frac{1}{2}$ veículo?

6 GDLs

<http://saba.kntu.ac.ir/eecd/ara/s/papers/J3-JVC-99.pdf>

Introdução: Representações

Serão introduzidos 4 tipos de representações:

1. Formato Configuração (EDO)
2. Relação Entrada e Saída – Função Transferência (FT)
3. Representação no Espaço de Estado (State Space Rep.)
4. Ganho, polos e zeros

Parte do material pode ser encontrado em:
H.V. Vu and R.S. Esfandiari, Dynamic Systems:
Modeling and Analysis. Macgraw-hill

Introdução: Representações

Serão introduzidos 4 tipos de representações:

1. Formato Configuração (EDO)
2. Relação Entrada e Saída – Função Transferência (FT)
3. Representação no Espaço de Estado (State Space Rep.)
4. Ganho, polos e zeros

Parte do material pode ser encontrado em:
H.V. Vu and R.S. Esfandiari, Dynamic Systems:
Modeling and Analysis. Macgraw-hill

Formato Configuração (EDO)

As n coordenadas generalizadas definem um espaço com dimensão (o espaço de configuração). Para um sistema de n -GDLs as equações que modela esse sistema podem ser descritas por EDOs:

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 &= f_1(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) \\ \ddot{q}_2 &= f_2(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) \\ &\dots \\ \ddot{q}_n &= f_n(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t)\end{aligned}$$

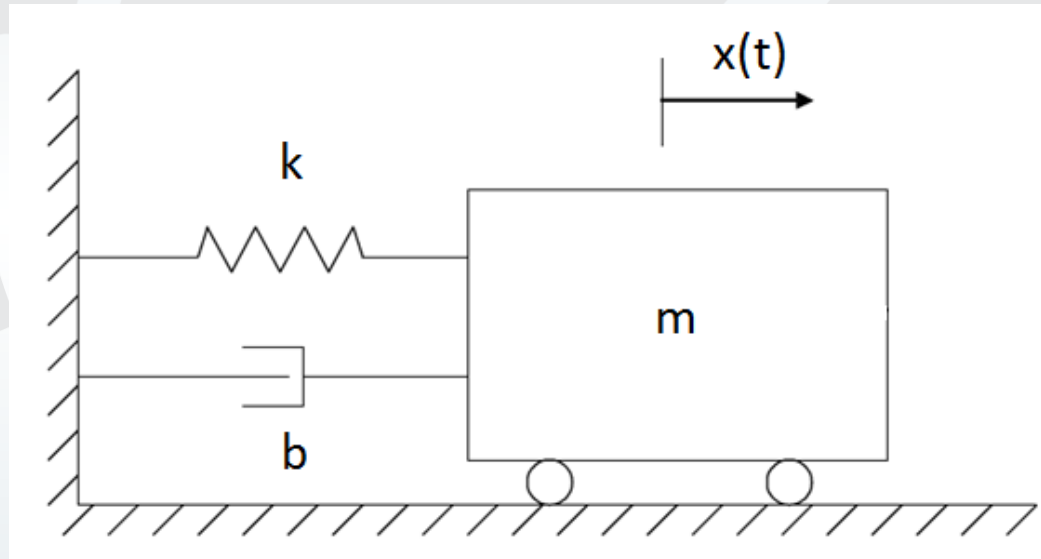
Esse conjunto de equações pode ser não-linear e estarão sujeitas a $2n$ condições iniciais:

$$\begin{aligned}q_1(0), q_2(0), \dots, q_n(0) \\ \dot{q}_1(0), \dot{q}_2(0), \dots, \dot{q}_n(0)\end{aligned}$$

Formato Configuração (EDO)

Exemplo 1. Sistema mecânico com 1 GDL e as seguintes CIs:

$$x(0) = x_0 \quad \text{e} \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0$$



$$\ddot{x} = -\frac{b}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x$$

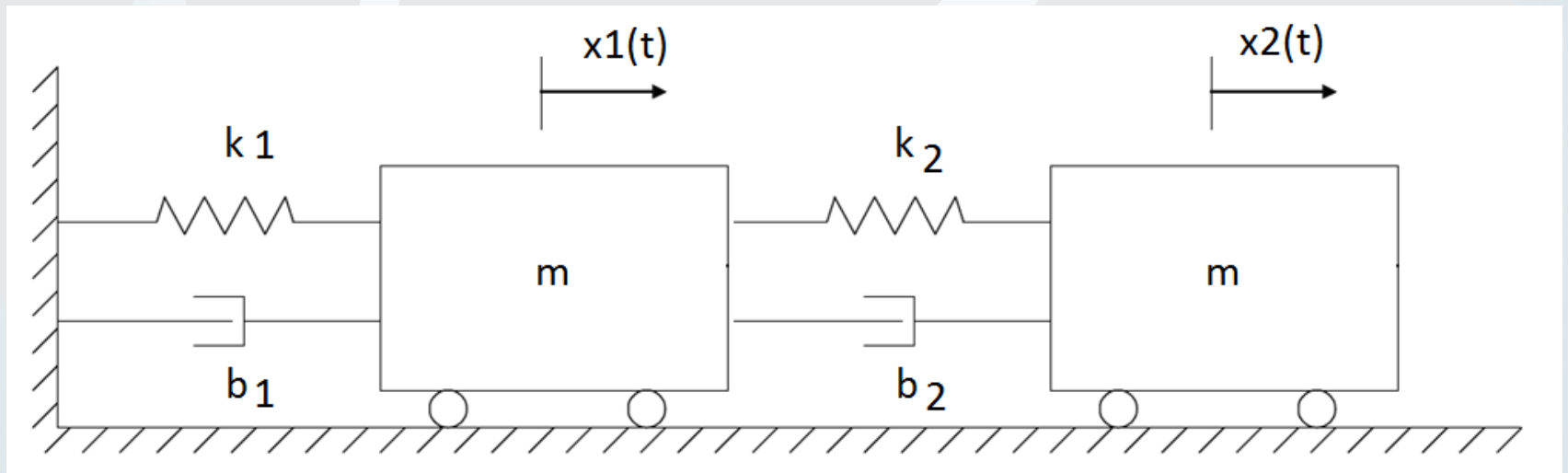
$$x(0) = x_0$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

Formato Configuração (EDO)

Exemplo 2. Sistema mecânico com 2 GDLs e as seguintes CIs:

$$x_1(0) = x_{10} \quad x_2(0) = x_{20} \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_{10} \quad \dot{x}_2(0) = \dot{x}_{20}$$

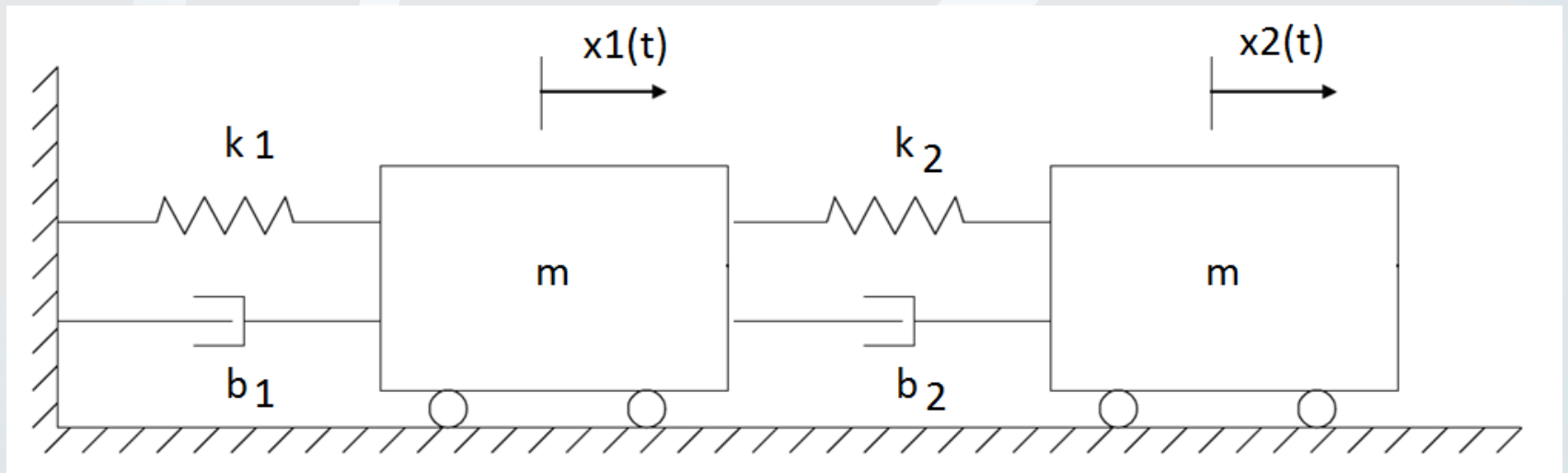


$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + b_1 \dot{x}_1 - b_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_1 x_1 - k_2 (x_2 - x_1) &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + b_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 (x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned}$$

Formato Configuração (EDO) - Matricial

Exemplo 2. Sistema mecânico com 2 GDLs e as seguintes CIs:

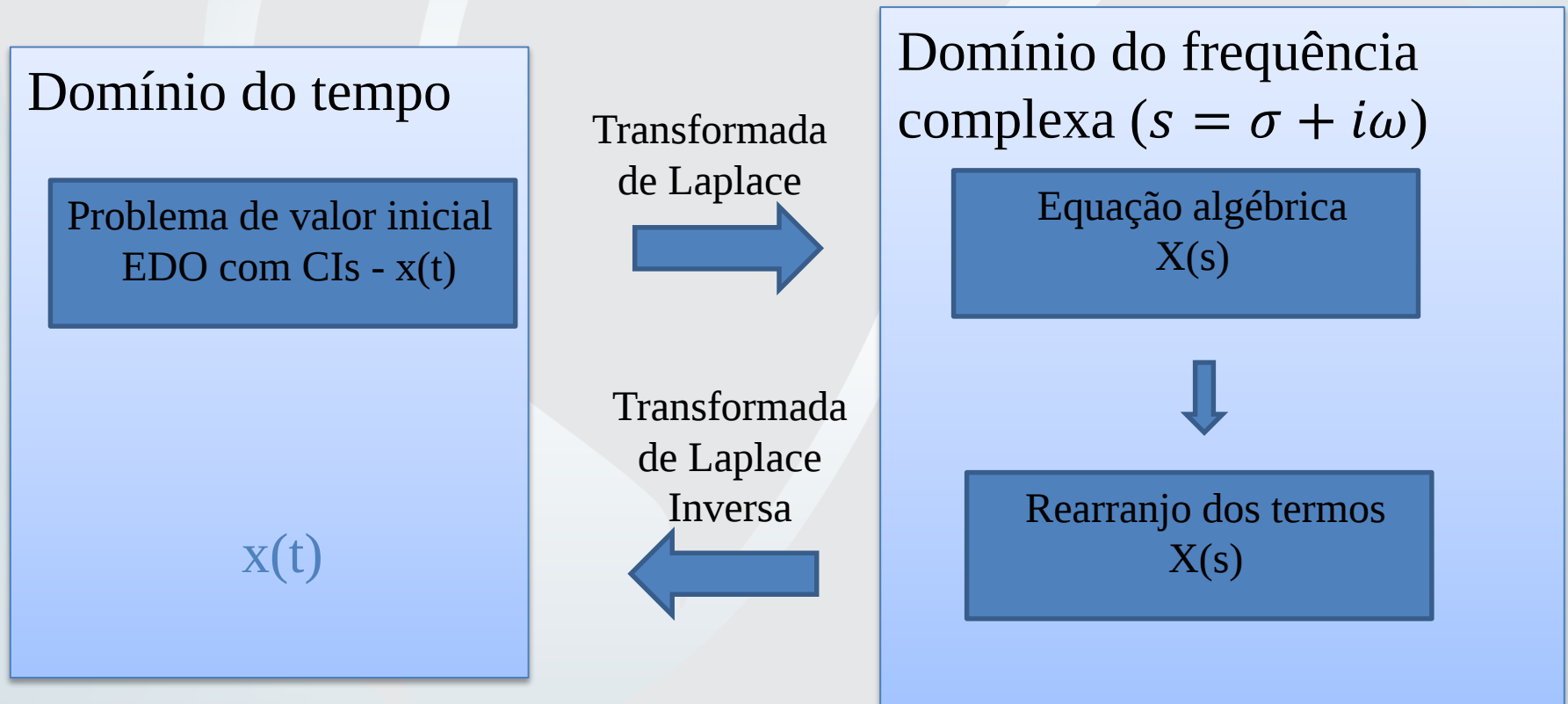
$$x_1(0) = x_{10} \quad x_2(0) = x_{20} \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_{10} \quad \dot{x}_2(0) = \dot{x}_{20}$$



$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 + b_2 & -b_2 \\ -b_2 & b_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Formato Configuração (EDO)

A solução desses problemas de valores iniciais podem ser realizado com da Transformada de Laplace



A transformação de volta pode ser feita via Método das frações parciais ou Convolução.

Formato Configuração (EDO)

Método das Frações Parciais. Exemplo: $\ddot{x} + 5\dot{x} + 4x = f$

Aplicando a transformada de Laplace e colocando $X(s)$ em evidência:

$$(s^2 + 5s + 4)X(s) = F(s)$$

Reescrevendo (**ALERT SPOILER!! FT**)

$$G(s) = \frac{X}{F}(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 4}$$

Formato Configuração (EDO)

Método das Frações Parciais. $G(s) = \frac{X}{F}(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 4}$

Considerando uma entrada $f(t) = e^{-2t}$, cuja Laplace é

$$F(s) = \frac{2}{s + 2}$$

Podemos calcular $X(s) = G(s) \cdot F(s) = \frac{1}{(s^2 + 5s + 4)} \cdot \frac{2}{(s + 2)}$

Formato Configuração (EDO)

Método das Frações Parciais. $G(s) = \frac{X}{F}(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 4}$

Fazendo a expansão por frações:

$$X(s) = \frac{2}{(s+2)(s+4)(s+1)} = \frac{-1}{(s+2)} + \frac{2/3}{(s+1)} + \frac{1/3}{(s+4)}$$

Aplicando a inversa: $x(t) = -1e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-1t} + \frac{1}{3}e^{-4t}$

Formato Configuração (EDO)

Esses métodos resolvem EDOs de maneira analítica.

Podemos resolvê-las numericamente?

Sim, usando métodos de integração para EDOs.

Exemplos: Euler, Runge-Kutta.

É **Matlabable**? SIM! ode45, ode23, e todos os outros ...

É **Pythonable**? SIM! Odeint do scipy, entre outros ...

Formato Configuração (EDO)

O Runge-Kutta pode resolver EDOs de mais de uma ordem.
Mas algumas implementações pedem 1º. Ordem

$$\frac{dy(t)}{dt} = y'(t) = f(y(t), t), \quad \text{with } y(t_0) = y_0$$

$$y^*(t_0 + h) = y^*(t_0) + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}h = y^*(t_0) + \left(\frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4 \right) h$$

$$k_1 = f(y^*(t_0), t_0)$$

$$k_2 = f\left(y^*(t_0) + k_1 \frac{h}{2}, t_0 + \frac{h}{2}\right)$$

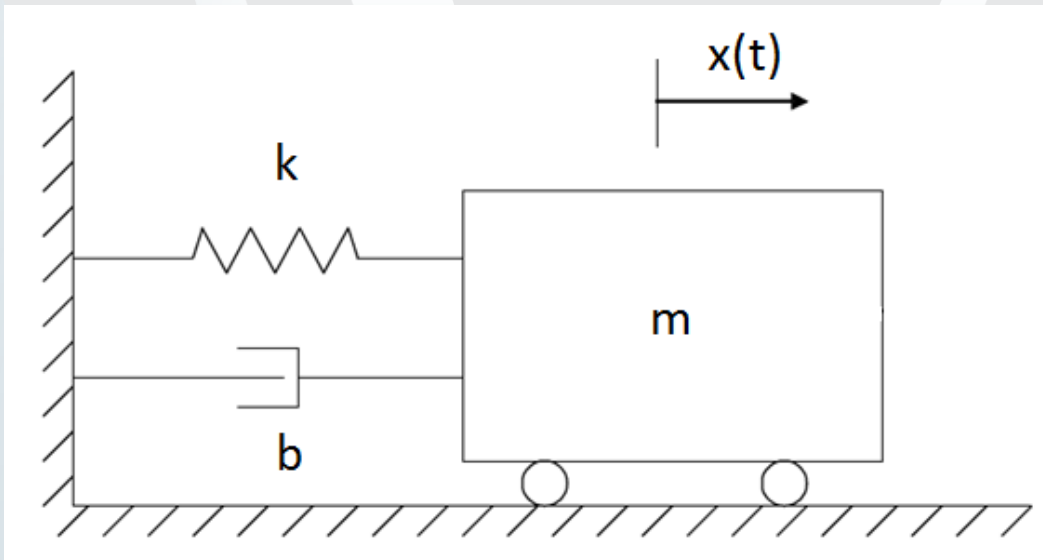
$$k_3 = f\left(y^*(t_0) + k_2 \frac{h}{2}, t_0 + \frac{h}{2}\right)$$

$$k_4 = f(y^*(t_0) + k_3 h, t_0 + h)$$

Formato Configuração (EDO)

O Runge-Kutta pode resolver EDOs de mais de uma ordem.
Mas algumas implementações pedem 1º. Ordem.

E agora? Como integrar numericamente o nosso problema mais simples?



$$\ddot{x} = -\frac{b}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x$$

$$x(0) = x_0$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

Formato Configuração (EDO)

O Runge-Kutta pode resolver EDOs de mais de uma ordem. Mas algumas implementações pedem 1º. Ordem.

E agora? Como integrar numericamente o nosso problema mais simples?

$$\ddot{x} = -\frac{b}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x$$

$$x(0) = x_0$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

Vamos fazer uma substituição de variáveis:

$$x_1 = x$$

$$x_2 = \dot{x}$$

Formato Configuração (EDO)

O Runge-Kutta pode resolver EDOs de mais de uma ordem.
Mas algumas implementações pedem 1º. Ordem.

E agora? Como integrar numericamente o nosso problema mais simples?

$$\ddot{x} = -\frac{b}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x$$

$$x(0) = x_0$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

Derivando:

$$\dot{x}_1 = \dot{x} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{x} = -\frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1$$

Formato Configuração (EDO)

O Runge-Kutta pode resolver EDOs de mais de uma ordem. Mas algumas implementações pedem 1º. Ordem.

E agora? Como integrar numericamente o nosso problema mais simples?

$$\ddot{x} = -\frac{b}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x$$

$$x(0) = x_0$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

Derivando:

$$\dot{x}_1 = \dot{x} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{x} = -\frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1$$

1 EDO de segunda ordem

Formato Configuração (EDO)

O Runge-Kutta pode resolver EDOs de mais de uma ordem. Mas algumas implementações pedem 1º. Ordem.

E agora? Como integrar numericamente o nosso problema mais simples?

$$\ddot{x} = -\frac{b}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x$$

Derivando:

$$x(0) = x_0$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

$$\dot{x}_1 = \dot{x} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{x} = -\frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1$$

2 EDOs de primeira ordem

Formato Configuração (EDO)

O Runge-Kutta pode resolver EDOs de mais de uma ordem. Mas algumas implementações pedem 1º. Ordem.

E agora? Como integrar numericamente o nosso problema mais simples?

$$\ddot{x} = -\frac{b}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x$$

Derivando:

$$x(0) = x_0$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

$$\dot{x}_1 = \dot{x} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{x} = -\frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1$$

2 EDOs de primeira ordem

Formato Configuração (EDO)

EDO, ODEINT

$$x(0) = x_0$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

$$\dot{x}_1 = \dot{x} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{x} = -\frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 + \frac{u}{m}$$

jupyter Controle_aula2_ex1 (autosaved)

File Edit View Insert Cell Kernel Widgets Help Hide Code

Save Add Reload Copy Paste Up Down Run Stop Restart Code

```
In [1]: from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

#definir uma função para o sistema mecânico
def mecanico(y, t, m, b, k, u):
    x1, x2 = y
    dydt = [x2, -(b/m)*x2 - (k/m)*x1 + (u/m)]
    return dydt
```

Formato Configuração (EDO)

EDO, ODEINT

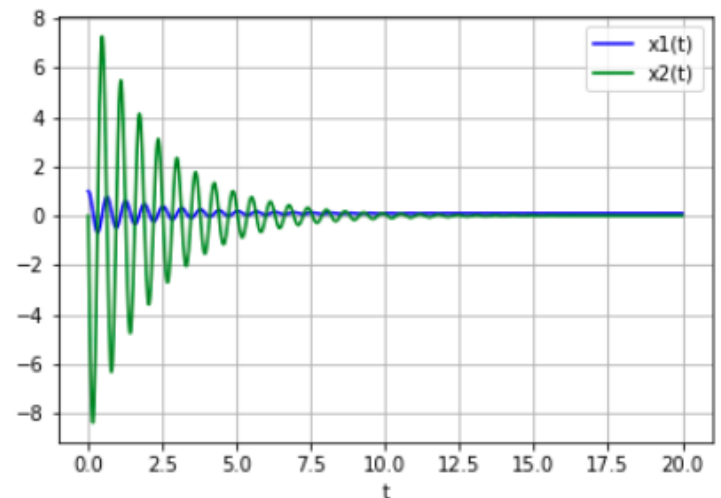
```
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

#definir uma função para o sistema mecânico
def mecanico(y, t, m, b, k, u):
    x1, x2 = y
    dydt = [x2, -(b/m)*x2 - (k/m)*x1 + (u/m)]
    return dydt

|
m = 1
b = 0.9
k = 100
u = 10

y0 = [1.0, 0.0]
t = np.linspace(0, 20, 1001)
sol = odeint(mecanico, y0, t, args=(m, b, k, u))

plt.plot(t, sol[:, 0], 'b', label='x1(t)')
plt.plot(t, sol[:, 1], 'g', label='x2(t)')
plt.legend(loc='best')
plt.xlabel('t')
plt.grid()
plt.show()
```



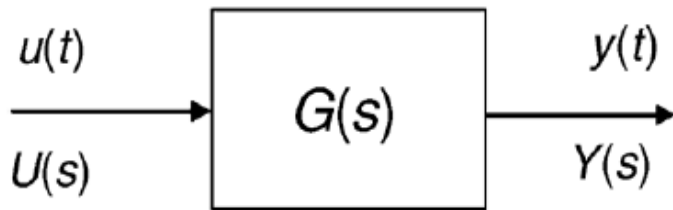
Função Transferência

Sejam a entrada $x_i(t)$ e a saída $x_o(t)$, cujas transformadas de Laplace são:

$$\mathcal{L}\{x_o(t)\} = X_o(s) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}\{x_i(t)\} = X_i(s)$$

A Função Transferência (FT) é dada pela

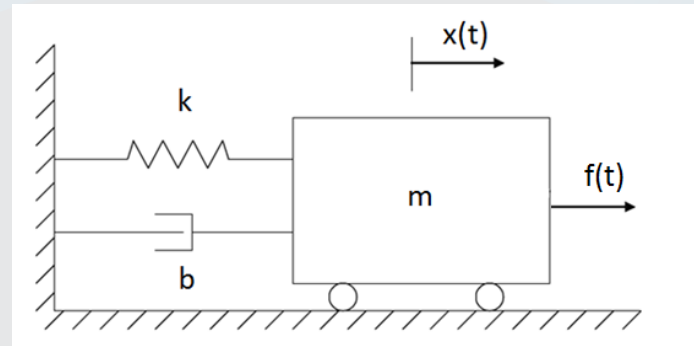
$$FT = \frac{X_o(s)}{X_i(s)}$$



$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Função Transferência

Considere o sistema



Usando a 2ª Lei de Newton, podemos encontrar a Equação de Movimento (EDO):

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f$$

Fazendo a transformação de Laplace e as condições iniciais:

$$m(s^2X(s) - sx_0 - \dot{x}_0) + b(sX(s) - x_0) + kX(s) = F(s)$$

Função Transferência

Considerando as condições iniciais NULAS:

$$ms^2X(s) + bsX(s) + kX(s) = F(s)$$

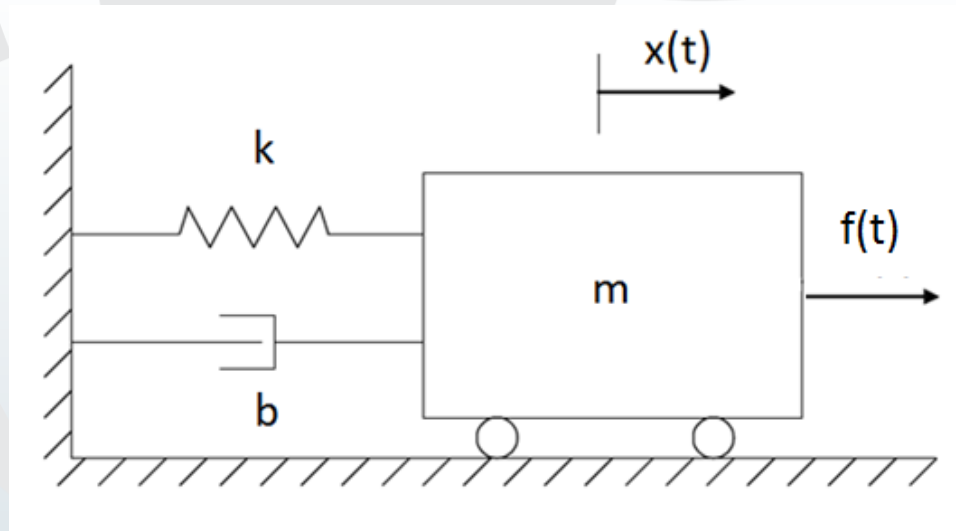
Relação Saída/Entrada (função Transferência):

$$G(s) = \frac{X}{F}(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

Função Transferência

E se eu quiser a FT da Velocidade/Força?

$$G_v(s) = \frac{sX}{F}(s) = \frac{s}{ms^2 + bs + k}$$



Função Transferência

$$G(s) = \frac{X}{U}(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

Controle_aula2_ex2

FT, resposta forçada

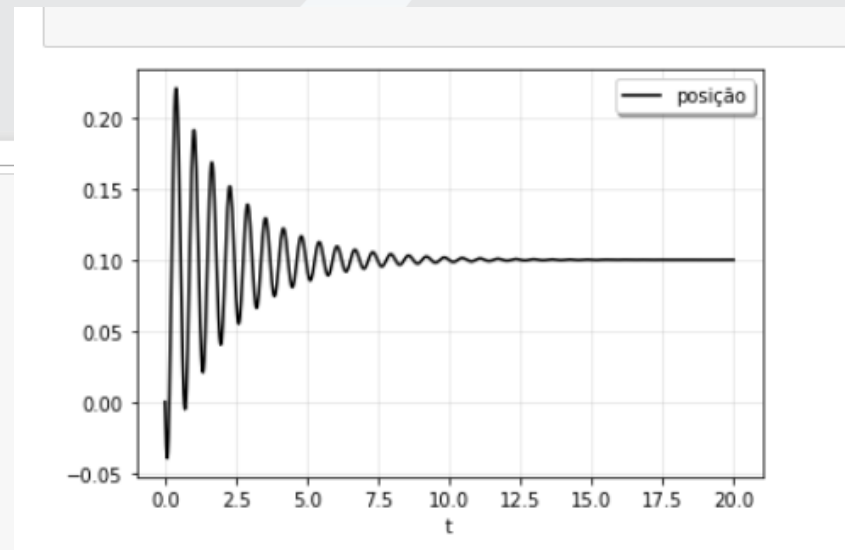
```
In [5]: import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.signal import lsim
import control as ctl
from control import TransferFunction

m = 1
b = 0.9
k = 100

y0 = [1.0, 0.0]
t = np.linspace(0, 20, 1001)
u = np.linspace(10, 10, 1001)

plant_tf = TransferFunction(1, [m,b,k])
plant_tf

tout, yout, xout = ctl.forced_response(plant_tf, U=u, T=t, X0=y0)
plt.plot(tout, yout, 'k', linewidth=1.5, label='posição')
plt.legend(loc='best', shadow=True, framealpha=1)
plt.grid(alpha=0.3)
plt.xlabel('t')
plt.show()
```



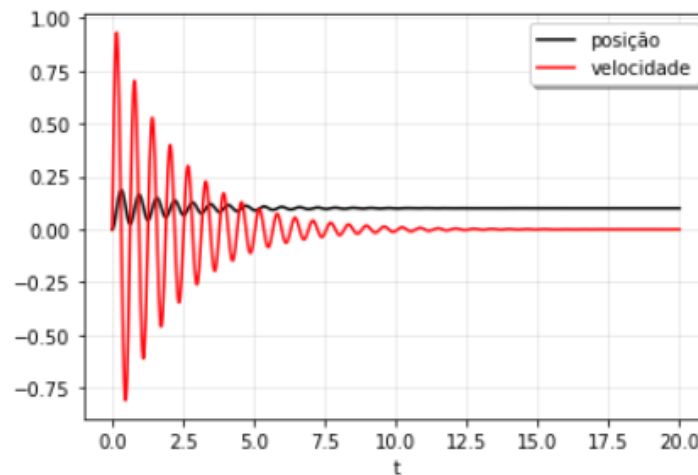
Função Transferência

Controle_aula2_ex2

FT, resposta forçada

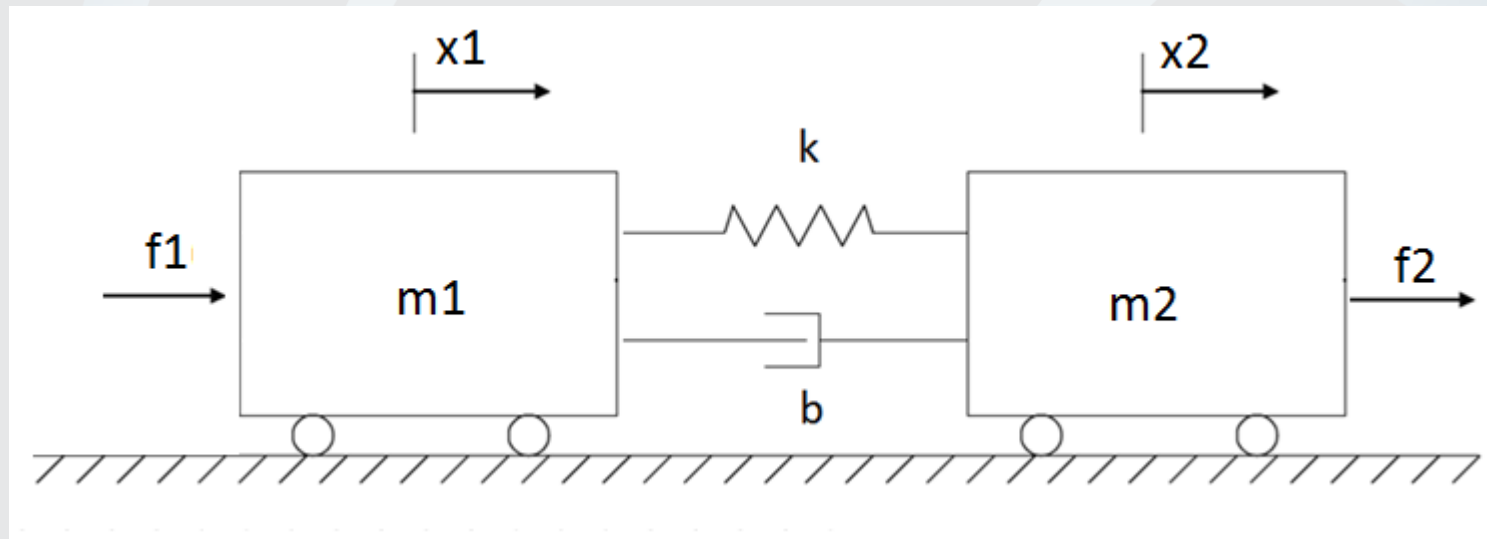
```
In [4]: tout, yout, xout = lsim((1, [m,b,k]), U=u, T=t)
        toutv, youtv, xoutv = lsim((1,0], [m,b,k]), U=u, T=t)

        plt.plot(tout, yout, 'k', linewidth=1.5, label='posição')
        plt.plot(toutv, youtv, 'r', linewidth=1.5, label='velocidade')
        plt.legend(loc='best', shadow=True, framealpha=1)
        plt.grid(alpha=0.3)
        plt.xlabel('t (s)')
        plt.show()
```



Função Transferência

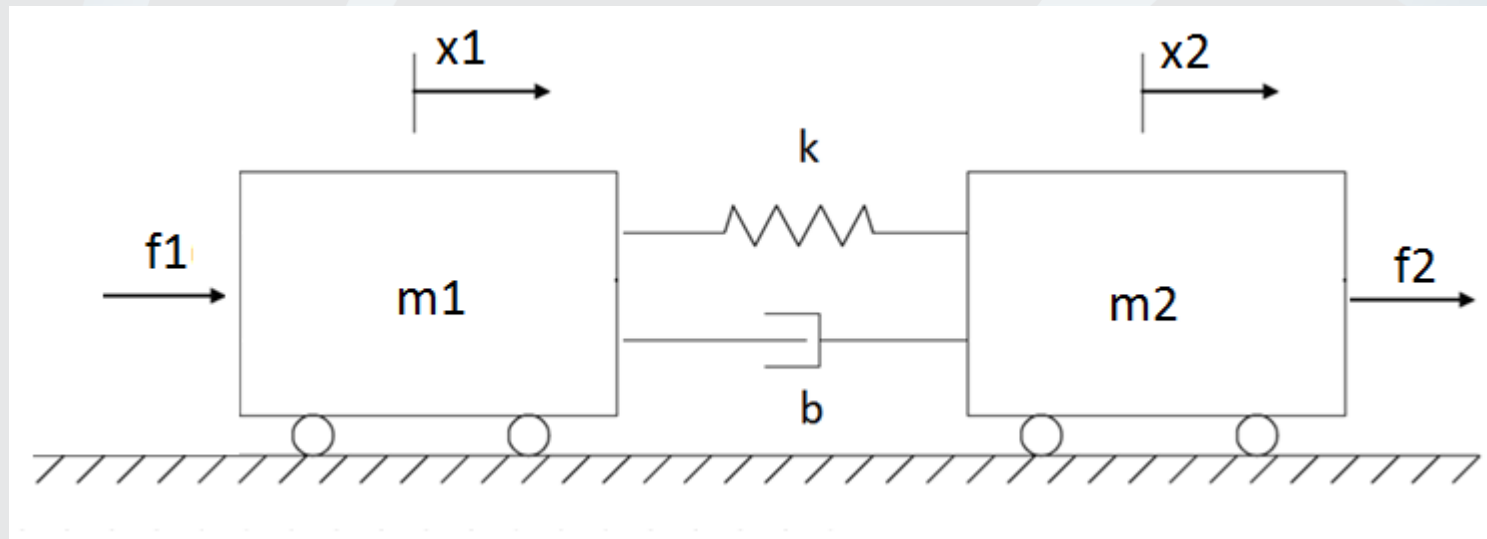
Regra de Cramer. Considere o sistema.



$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & -b \\ -b & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

Função Transferência

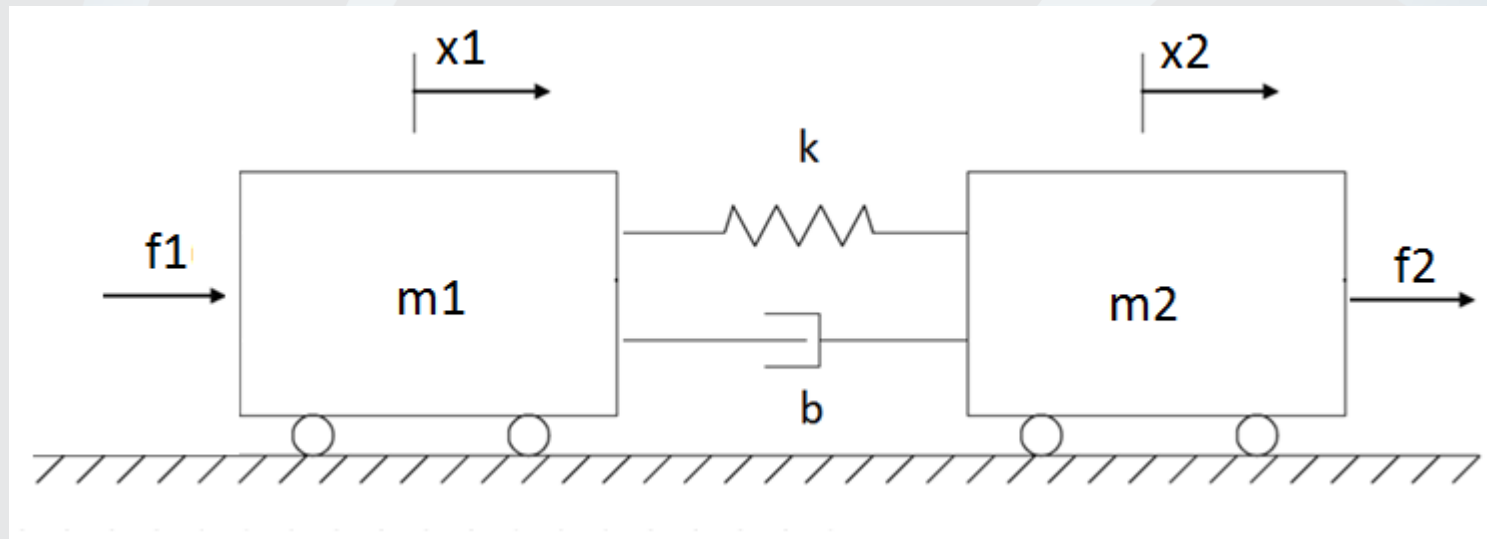
Regra de Cramer. Considere o sistema. Usando Laplace.



$$\begin{bmatrix} m_1 s^2 + b s + k & -b s - k \\ -b s - k & m_2 s^2 + b s + k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

Função Transferência

Regra de Cramer. Considere o sistema. Usando Laplace.



$$\begin{bmatrix} m_1 s^2 + b s + k & -b s - k \\ -b s - k & m_2 s^2 + b s + k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

Função Transferência

Regra de Cramer. Considere o sistema. Isolando os Xs.

$$\begin{bmatrix} m_1 s^2 + bs + k & -bs - k \\ -bs - k & m_2 s^2 + bs + k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

$$X_1(s) = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{vmatrix} F_1 & -bs - k \\ F_2 & m_2 s^2 + bs + k \end{vmatrix}$$

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} m_1 s^2 + bs + k & -bs - k \\ -bs - k & m_2 s^2 + bs + k \end{vmatrix}$$

Função Transferência

Regra de Cramer. Considere o sistema. Isolando os Xs.

$$\Delta(s) = (m_1s^2 + bs + k)(m_2s^2 + bs + k) - (bs + k)^2$$

$$X_1(s) = \frac{m_2s^2 + bs + k}{\Delta(s)} F_1(s) + \frac{bs + k}{\Delta(s)} F_2(s)$$

$$G_{11}(s) = \left. \frac{X_1(s)}{F_1(s)} \right|_{F_2(s)=0_1} = \frac{m_2s^2 + bs + k}{\Delta(s)}$$

$$G_{12}(s) = \left. \frac{X_1(s)}{F_2(s)} \right|_{F_1(s)=0_1} = \frac{bs + k}{\Delta(s)}$$

Função Transferência

Regra de Cramer. Considere o sistema. Isolando os Xs.

$$\begin{bmatrix} m_1 s^2 + bs + k & -bs - k \\ -bs - k & m_2 s^2 + bs + k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

$$X_2(s) = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{vmatrix} m_1 s^2 + bs + k & F_1 \\ -bs - k & F_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} m_1 s^2 + bs + k & -bs - k \\ -bs - k & m_2 s^2 + bs + k \end{vmatrix}$$

Função Transferência

Regra de Cramer. Considere o sistema. Isolando os Xs.

$$\Delta(s) = (m_1 s^2 + bs + k)(m_2 s^2 + bs + k) - (bs + k)^2$$

$$X_2(s) = \frac{bs + k}{\Delta(s)} F_1(s) + \frac{m_1 s^2 + bs + k}{\Delta(s)} F_2(s)$$

$$G_{21}(s) = \left. \frac{X_2(s)}{F_1(s)} \right|_{F_2(s)=0_1} = \frac{bs + k}{\Delta(s)}$$

$$G_{22}(s) = \left. \frac{X_2(s)}{F_2(s)} \right|_{F_1(s)=0_1} = \frac{m_1 s^2 + bs + k}{\Delta(s)}$$

Conclusões

- Funções transferências se mostram adequadas para sistemas SISO e para sistemas MIMO?
- Encontramos uma solução analítica para a EDO. Mas como fazemos essa implementação? Nós usamos integração numérica!



EESC • USP

www.eesc.usp.br