- O plano $\mathbb{R}^2$: pares $(x, y)$ — $x$: abscissa, $y$: ordenada

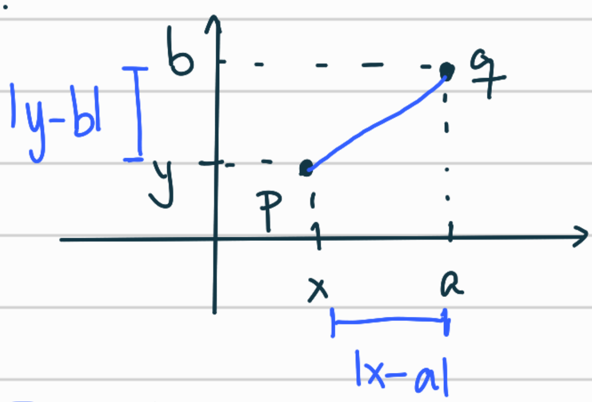
Conteúdo vídeos 16 e 17

- Representação: eixos ortogonais $OX$ e $OY$ com plano $\Pi$ $OX \cap OY = \{O\}$, origem do sistema de coordenadas

- $P: \Pi \to \mathbb{R}^2$ com $P(q) = (x_q, y_q)$ com $q \in \Pi$ e $x_q$ abscissa de $q$ e $y_q$ ordenada de $q$.

- Distância entre dois pontos:

$p = (x, y)$ e $q = (a, b)$




$$[d(p,q)]^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{d(p,q) = \left((x-a)^2 + (y-b)^2\right)^{1/2}}$$

- Distância de um ponto à origem:

Caso particular, $q = (0,0)$ e $d(p, 0) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

- Seja $r > 0$:

$C_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$ círculo

$D_r = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \ x^2+y^2 \leqslant r^2\}$ disco.

P/ $p=(a,b)\in\mathbb{R}^2$

$C_r(p) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-a)^2+(y-b)^2=r^2\}$ círculo de centro p

$D_r(p) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-a)^2+(y-b)^2\leqslant r^2\}$ disco de centro p.

- Gráfico de uma função: $G_f$

- Exemplo 1. $f:[-2,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

$$G_f = \{(x,\sqrt{4-x^2}) \mid x\in[-2,2]\}$$

Se $p=(x,y)\in G_f$, então $y\geqslant 0$ e

$$y^2 = |4-x^2| = 4-x^2, \quad p/\ x\in[-2,2]$$

$\Rightarrow$ $y^2+x^2=4$ $\longrightarrow$ pontos sobre círculo de centro 0 e raio 2 p/ $y\geqslant 0$.

- Exemplo 2: $C_r$ não representa o gráfico de função alguma!!

• A função afim

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é afim se existir $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$f(x) = ax + b$, p/ todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplos: função identidade
funções lineares ($f(x) = ax$)
" constante

• Definir função crescente: $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
" decrescente: " $\Rightarrow f(x) > f(y)$

não decrescente: $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
não crescente: $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

Em qq caso, $f$ é dita monótona.

Exemplos: lineares, constante (classificar monotonicidade)

Proposição: O gráfico de uma função afim é uma linha (reta).

Dem: Por def. de reta, devemos verificar que p/ qq $p_1, p_2, p_3 \in G_f$, com $f$ afim, eles são colineares.

Isto ocorre se e só se o máximo de

$\{d(p_1,p_2), d(p_2,p_3), d(p_1,p_3)\}$ é a soma dos outros dois. Se $f(x) = ax+b$, e $p_i = (x_i, y_i)$, $i=1,2,3$, então $y_i = ax_i + b$, $i=1,2,3$. Assim,

$$d(p_1,p_2) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + a^2(x_1-x^2)^2}$$
$$= |x_1 - x_2|\sqrt{1+a^2}.$$

Na verdade,

$$d(p_i,p_j) = |x_i - x_j|\sqrt{1+a^2}, \quad i,j = 1,2,3.$$

Podemos supor $x_1 < x_2 < x_3$ e

$$d(p_1,p_2) = (x_2 - x_1)\sqrt{1+a^2}$$
$$+$$
$$d(p_2,p_3) = (x_3 - x_2)\sqrt{1+a^2}$$

$$(x_3 - x_1)\sqrt{1+a^2} = d(p_1,p_3)$$

e a proposição está provada. ■

**Teorema:** Dados $p = (a,b)$ e $q = (c,d)$ em $\mathbb{R}^2$, existe uma única função afim $f$ tal que

$$f(a) = b \quad \text{e} \quad f(c) = d \qquad (c \neq a).$$

**Dem:** Se $f(x) = px+q$ e $f(a)=b$ e $f(c)=d$, então

$$\begin{cases} pa+q = b \\ pc+q = d \end{cases} \Rightarrow p = \frac{d-b}{c-a} \text{ e } q = \frac{bc-ad}{c-a}$$

∎

- A função linear (p.84)
  - Teo f afim p.89
  - \+ f poligonais e fim
  - Até vídeo 21
  - → edisciplinas.

- $f(x) = ax$, $x \in \mathbb{R}$
  proporcionalidade

→ caracterização linear.

**Teorema:** Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente. São equivalentes:

i) $f(nx) = n f(x)$, p/ todo $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$;

ii) $f(x) = f(1) \cdot x$, p/ todo $x \in \mathbb{R}$; → f linear

iii) $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

**Dem:** É claro que ii) ⇒ iii) e iii) ⇒ i).
Mostremos i) ⇒ ii).

(1)

A hipótese i) é equivalente à $f(cx) = c f(x)$, p/ todo $c, x \in \mathbb{R}$.

Neste caso, é claro que $f(x)=f(1\cdot x)=x\cdot f(1), \forall x\in\mathbb{R}$.

① Vale p/ $c\in\mathbb{Q}$.

De fato, se $c=n/m\in\mathbb{Q}$, então $n=m\cdot c$ e

$$
\begin{aligned}
f(nx) = f(m\cdot cx) &= nf(x) \\
&= m\,f(cx)
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow f(cx)=\frac{n}{m}f(x).$$

① Vale p/ todo $c\in\mathbb{R}$.

Suponha que não. Seja $x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ tal que $f(x)\neq ax$ $(a=f(1))$.

- Se $f(x)<ax$, então $f(x)/a<x$.

Seja $r\in\mathbb{Q}$ com $f(x)/a<r<x$. Temos

$f(x)<\overset{a\cdot r}{f(r)}<ax$, o que é um absurdo pois $f$ é crescente e $f(r)<f(x)$. ∎

**Teorema: (Caracterização da função afim):** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ monótona injetora. Se existe $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que

$$f(x+h)-f(x) = \underbrace{\varphi(h)}_{\text{Acréscimo.}}, \quad x \in \mathbb{R},$$
então $f$ é afim.

<u>Dem:</u> $\varphi$ é crescente e $\varphi(0)=0$. Além disso,

$$\varphi(h+t) = f(x+h+t) - f(x) \pm f(x+h)$$
$$= \varphi(h) + \varphi(t), \ \forall\, h,t \in \mathbb{R}.$$

O Teo anterior garante que $\varphi(h) = h.\varphi(1)$
Logo, $f(x+h)-f(x) = a.h$. Assim,

$$f(0+h) - f(0) = ah, \ \forall\, h \in \mathbb{R},$$

o que implica $f(h) = ah + f(0)$. ■

- Movimento Uniforme: pto deslocando mesmo sentido e em tempos iguais percorre a mesma distância.

Espaço percorrido: $f(x_0+t) - f(x_0) = \varphi(t)$

$$\Rightarrow f \text{ é afim e } f(t) = \underbrace{a}_{\text{velocidade}}t + \underbrace{f(0)}_{\text{posição inicial.}}$$