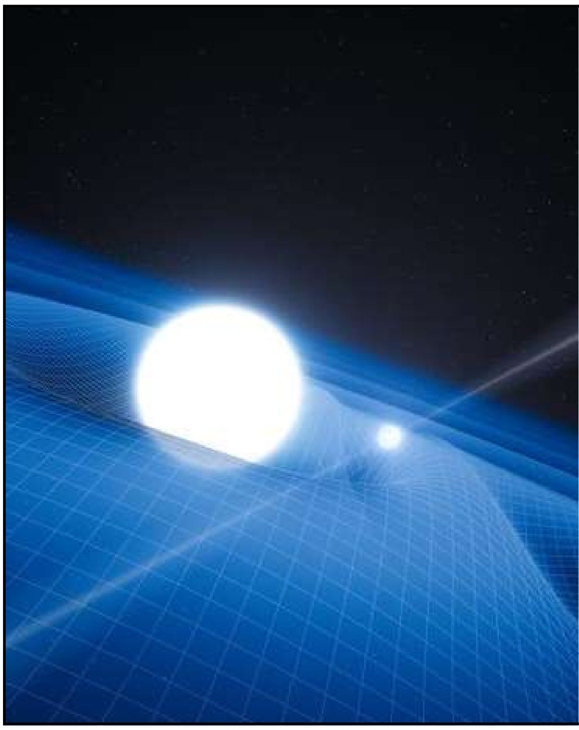


Eletrodinâmica covariante 2

Eletromagnetismo II (4302304)

Prof. *Ricardo A. Terini*

E-mail: rterini@if.usp.br

Bloco F – Conjunto Alessandro Volta – sl. 105

LDRFM – IF-USP

21

Recordando

Eletrodinâmica. As equações de Maxwell

$$\vec{\nabla} = \left(\nabla, \frac{\partial}{\partial(ict)}\right).$$

$$\vec{A} = (\mathbf{A}, i\varphi/c)$$

- Levando em conta os 4-vetores definidos em (4) e (6), bem como suas relações com os campos **E** e **B**:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \qquad \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \tag{9}$$

- ... podemos determinar as componentes cartesianas de ambos:

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_y = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 \\ B_y &= \frac{\partial}{\partial z}A_x - \frac{\partial}{\partial x}A_z = \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3 \\ B_z &= \frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{iE_x}{c} &= \frac{\partial A_x}{\partial(ict)} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{i\varphi}{c}\right) = \partial_4 A_1 - \partial_1 A_4 \\ \frac{iE_y}{c} &= \frac{\partial A_y}{\partial(ict)} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{i\varphi}{c}\right) = \partial_4 A_2 - \partial_2 A_4 \\ \frac{iE_z}{c} &= \frac{\partial A_z}{\partial(ict)} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{i\varphi}{c}\right) = \partial_4 A_3 - \partial_3 A_4. \end{aligned} \tag{10}$$

(*Os dois membros foram multiplicados por* $\boldsymbol{i/c}$)

22

Eletrodinâmica. As equações de Maxwell

Recordando

- As equações (10) mostram que as componentes cartesianas de **E** e **B** são componentes de um tensor de Lorentz de *rank* 2 com a forma generalizada

$$\boxed{F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu .} \qquad (11)$$

- $F_{\mu\nu}$ é o ***tensor de intensidade de campo eletromagnético***, que tem 6 componentes *independentes* porque é *assimétrico* ($F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$) e $G_{\mu\nu}$ é o ***tensor dual***. Na forma matricial,

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & B_z & -B_y & -iE_x/c \\ -B_z & 0 & B_x & -iE_y/c \\ B_y & -B_x & 0 & -iE_z/c \\ iE_x/c & iE_y/c & iE_z/c & 0 \end{bmatrix} \qquad (12)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & -E_z/c & E_y/c & -iB_x \\ E_z/c & 0 & -E_x/c & -iB_y \\ -E_y/c & E_x/c & 0 & -iB_z \\ iB_x & iB_y & iB_z & 0 \end{bmatrix}. \qquad (20)$$

- Então, a relatividade combina os campos E e B *numa única entidade*...

Eletrodinâmica. As equações de Maxwell

Recordando

- Sintetizando: ***Equações de Maxwell***

Forma usual

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + c^{-2}\partial \mathbf{E}/\partial t$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$$

Forma explicitamente covariante

$\mu = 4$

$\mu = 1, 2, 3$

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = \mu_0 j_\mu .$$

$\lambda = 1$, $\mu = 2$, and $\nu = 3$

...

$\lambda = 4$, $\mu = 1$, and $\nu = 2$

...

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0.$$

ou

$$\partial_\nu G_{\mu\nu} = 0.$$

Eletrodinâmica. As equações de Maxwell

- **Exercício 1:**

(a) Levando em conta a expressão covariante de tensor de Lorentz de *rank* 3 abaixo, que valores dos índices seriam necessários para obter as equações com as componentes cartesianas não determinadas da Lei de Faraday?

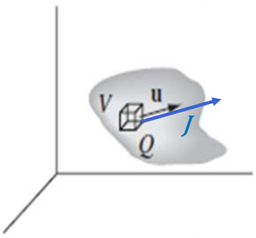
$$\boxed{\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0.}$$

(b) E quais os índices, no caso de se partir da expressão do tensor dual abaixo?

$$\boxed{\partial_\nu G_{\mu\nu} = 0.}$$

(18)

Eletrodinâmica. Leis de conservação



- **Aplicação**: A *Equação de Continuidade* também pode ser expressa de forma explicitamente *covariante*.
- Se, em um referencial inercial, as cargas, num volume V, têm uma densidade ρ e se movem com velocidade $\boldsymbol{u}$, então

$$\boldsymbol{J} = \rho\boldsymbol{u}\,, \quad \text{onde } \rho = Q/V \qquad (13)$$

- A carga Q é *invariante*. Experimentalmente, verificou-se que, apesar da grande velocidade dos elétrons (u ~ 0,4c) em átomos de Césio (Z = 55), a diferença relativa entre a carga do elétron e a do próton é < 10^{-19}!
- Por outro lado, V sofre contração de Lorentz na direção do movimento…

$$\therefore \quad V = V_0/\gamma \qquad (14)$$

- … sendo V_0 o volume ocupado pela carga Q no referencial em repouso.

Eletrodinâmica. Leis de conservação

- Então: $$\boxed{\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_0}\gamma = \rho_0\gamma}$$ (15)
- Portanto: $$\boldsymbol{J} = \rho\boldsymbol{u} = \rho_0\gamma\boldsymbol{u}$$ (16) (*Densidade de corrente relativística*)
- Fica claro, então, que se pode agrupar $\boldsymbol{J}$ e ρ num *4-vetor densidade de corrente*, *e também* em notação covariante:

$$\boxed{j_{\boldsymbol{\mu}} = \rho_0\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{\mu}} = \rho_0(\boldsymbol{U}, i\gamma c) = (\boldsymbol{J}, i\rho c) = (J_x, J_y, J_x, i\rho c)}$$ (17)

- Na teoria da relatividade, então, fica claro que a densidade de corrente e a densidade de carga não podem ser entidades completamente separáveis.
- Isto ocorre porque uma distribuição de *carga estática*, num dado sistema de referência, se comporta como uma distribuição de *carga e de corrente* num outro sistema que se move relativamente ao primeiro sistema.

27

Eletrodinâmica. Leis de conservação

- E derivando *j*: $$\partial_\mu j_\mu = \frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = \frac{\partial \boldsymbol{J}_i}{\partial xj} + \frac{\partial(ic\rho)}{\partial(ict)}$$
$$= \nabla \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$ (18)
- Então, a equação da continuidade pode também ser expressa numa forma *4-dimensional e covariante* como:

$$\boxed{\partial_\mu j_\mu = \frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0}$$ (19)

- Essa é a *equação da continuidade em forma covariante*.
- Assim, vemos que o 4-vetor j_μ *não diverge!*

28

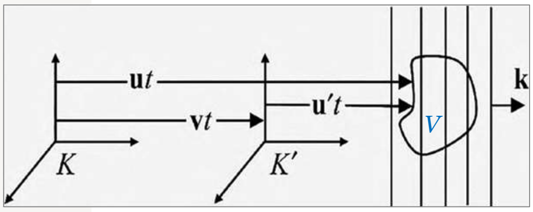
Eletrodinâmica. Propriedades corpusculares de campos

- Campos eletromagnéticos livres se comportam como partículas relativísticas no sentido de que sua energia e momento linear se transformam como o 4-vetor de energia-momento de uma partícula.
- Isso pode ser demonstrado e acontece para
  - (*i*) qualquer volume finito do campo de radiação produzido por uma fonte localizada e
  - (*ii*) pacotes de ondas bem localizados.
- Ambos são livres, no sentido de que seus campos destacam-se de suas fontes e se propagam na velocidade da luz.

29

Eletrodinâmica. Propriedades corpusculares de campos

- **Aplicação (*i*): Exercício 2:**



Contexto: Um volume de espaço finito e arbitrário V se move com velocidade $u\hat{\mathbf{z}}$, quando visto de um referencial K e $u'\hat{\mathbf{z}}$, quando visto do referencial K'. K' move-se com velocidade $v\hat{\mathbf{z}}$ em relação a K.

Sejam U_{EM} e P_{EM} a *energia total* e o *momento linear total* da porção de uma onda plana monocromática contida no volume V que acompanha a onda.

Prove que a razão U_{EM}/ω é uma *invariante de Lorentz*.

(18)

30

Eletrodinâmica. Propriedades corpusculares de campos

- **Exercício 1:** (Em síntese)

- Sejam U_{EM} e P_{EM} a *energia total* e o *momento linear total* da porção de uma onda plana monocromática contida no volume V que acompanha a onda. Prove que a razão U_{EM}/ω é uma *invariante de Lorentz*.

- Seja a onda plana dada por:

$$\mathbf{E}_i = \hat{\mathbf{x}} E_i \exp\left[i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)\right] \quad \text{e} \quad c\mathbf{B}_i = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_i.$$

- Pode-se mostrar que:

$$\omega' = \gamma(1-\beta)\omega \quad \text{e} \quad E_i' = \gamma(1-\beta)E_i.$$

- Então, a *densidade de energia eletromagnética* em K´ será:

$$u'_{\mathrm{EM}} = \epsilon_0 E_i'^2 = \epsilon_0 \gamma^2 (1-\beta)^2 E_i^2 = \gamma^2(1-\beta)^2 u_{\mathrm{EM}}.$$

31

Eletrodinâmica. Propriedades corpusculares de campos

- **Exercício 1:** (Em síntese)

- Sejam U_{EM} e P_{EM} a *energia total* e o *momento linear total* da porção de uma onda plana monocromática contida no volume V que acompanha a onda. Prove que a razão U_{EM}/ω é uma *invariante de Lorentz*.

- Não há transformação de Lorentz que leve o volume ao repouso! (O volume acompanha a onda!)
- Deve haver *contração do comprimento* da direção do movimento. Então o volume V, em cada referencial será:

$$V = V_0\sqrt{1-u^2/c^2} = V_0/\gamma(u) \quad \text{e} \quad V' = V_0\sqrt{1-u'^2/c^2} = V_0/\gamma(u').$$

- Além disso, também pode-se mostrar que:

$$\gamma(u) = \gamma(v)\gamma(u')(1 + vu'/c^2).$$

32

Eletrodinâmica. Propriedades corpusculares de campos

- **Exercício 1:** (Em síntese)
  - Sejam U_{EM} e P_{EM} a *energia total* e o *momento linear total* da porção de uma onda plana monocromática contida no volume V que acompanha a onda. Prove que a razão U_{EM}/ω é uma *invariante de Lorentz*.
  - Anotando $\gamma = \gamma(v)$, e tomando $u' \to c$ (cf. Relatividade), teremos:

$$V' = \frac{\gamma(u)}{\gamma(u')} V = \gamma(1 + vu'/c^2)V = \gamma(1 + vu'/c^2)V \to \gamma(1+\beta)V.$$

  - A combinação dos resultados anteriores sugere a *invariância*, pois:

$$\frac{U'_{\mathrm{EM}}}{\omega'} = \frac{u'_{\mathrm{EM}} V'}{\omega'} = \frac{\gamma^2(1-\beta)^2 u_{\mathrm{EM}} \gamma(1+\beta)V}{\gamma(1-\beta)\omega} = \frac{u_{\mathrm{EM}} V}{\omega} = \frac{U_{\mathrm{EM}}}{\omega}. \quad (20)$$

(C.Q.D.)

Um resultado semelhante ocorre na teoria quântica para uma "caixa de fótons" porque $U_{EM} = N\hbar\omega$ onde N é o número de fótons contidos na caixa.

33

Eletrodinâmica. Propriedades corpusculares de campos

- **Aplicação (*i*)**: Campos de Radiação Monocromática
- Suponhamos uma porção de um campo de radiação, produzido por uma fonte de corrente, localizada dentro de um volume finito V .
- Quanto mais distante da fonte estiver o volume V , mais essa porção do campo de radiação se assemelha ao campo eletromagnético de uma onda plana em propagação.
- Vamos aplicar esta observação a um campo de radiação monocromático de *frequência* ω e seja U_{EM} a *energia eletromagnética total* contida em V .
- O Exercício 1 é aplicável aqui e concluímos que a razão U_{EM}/ω é um escalar invariante de Lorentz.

34

Eletrodinâmica. Propriedades corpusculares de campos

- **Aplicação (*i*)**: Campos de Radiação Monocromática (cont.)
- Para uma onda plana transversal de interesse, levando em conta que a *densidade de momento linear* é $\mathbf{g} = \frac{u_{EM}}{c}\hat{\mathbf{k}}$ e que $\omega = ck$, o *momento linear total contido em V* será dado como:

$$\mathbf{P}_{EM} = \mathbf{g}V = \frac{u_{EM}}{c}V\hat{\mathbf{k}} = \frac{u_{EM}}{\omega}V\mathbf{k} = \left(\frac{U_{EM}}{\omega}\right)\mathbf{k}. \quad (21)$$

- Além disso...

$$\boxed{i\frac{U_{EM}}{c} = \left(\frac{U_{EM}}{\omega}\right)i\frac{\omega}{c}.} \quad (22)$$

- Portanto, como U_{EM}/ω é um escalar de Lorentz e $(\mathbf{k}, i\omega/c)$ é um 4-vetor, (21) e (22) indicam que $(\mathbf{P}_{EM}, iU_{EM}/c)$ também é um *quadrivetor*.

35

Eletrodinâmica. Propriedades corpusculares de campos

- **Aplicação (*i*)**: Campos de Radiação Monocromática (cont.)

(21) $$\boxed{\mathbf{P}_{EM} = \mathbf{g}V = \frac{u_{EM}}{c}V\hat{\mathbf{k}} = \frac{u_{EM}}{\omega}V\mathbf{k} = \left(\frac{U_{EM}}{\omega}\right)\mathbf{k}.}$$

$$\boxed{i\frac{U_{EM}}{c} = \left(\frac{U_{EM}}{\omega}\right)i\frac{\omega}{c}.}$$ (22)

- Portanto, $(\mathbf{P}_{EM}, iU_{EM}/c)$ também é um *quadrivetor*.
- A comparação com o 4-vetor $(\mathbf{p}, i\varepsilon/c)$ para uma ***partícula relativística*** com momento linear $\mathbf{p}$ e energia total ε demonstra a *semelhança entre um volume de radiação que se propaga e uma partícula relativística*.
- Na teoria quântica, o mesmo resultado é obtido ao tratar a radiação como uma coleção de *partículas relativísticas com massa zero* (*fótons*).

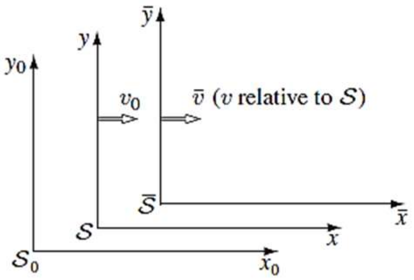
36

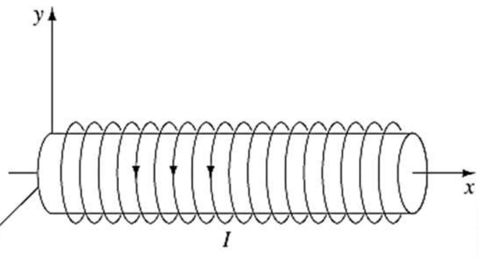
Relatividade. Grandezas eletromagnéticas

- **Exercício 3:**

  Imagine um solenóide longo alinhado paralelamente ao eixo x e em repouso em S (Figs.) .

  (a) Qual a regra de transformação do campo magnético uniforme criado no eixo da bobina, no ref. $\bar{S}$, *que se move em relação a S* ?





18)

37

Relatividade. Grandezas eletromagnéticas

- **Exercício 3:** (resolução)

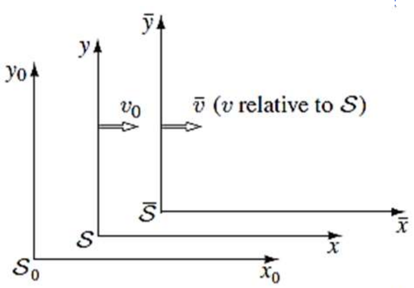
O campo magnético dentro da bobina, em S, é

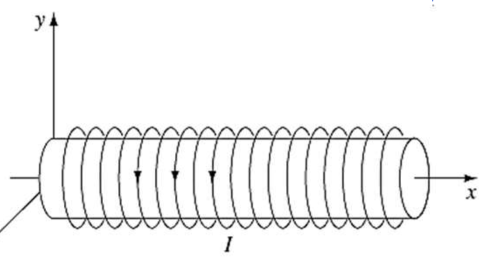
$$B_x = \mu_0 n I,$$

... onde n é o número de voltas por unidade de comprimento e I é a corrente.

- No sistema $\bar{S}$, *o comprimento se contrai*, então n aumenta:

$$\bar{n} = \gamma n.$$





38

39

Relatividade. Grandezas eletromagnéticas

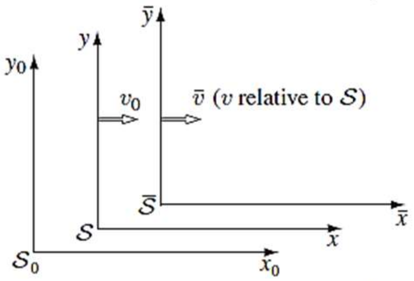
- **Exercício 3:**

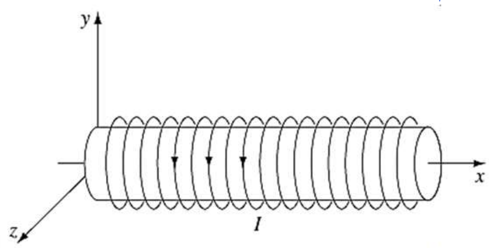
Por outro lado, *o tempo dilata*: o relógio de S, que anda junto com o solenóide, anda devagar, então a *corrente* (*carga por unidade de tempo*) em $\overline{S}$ é dada por

$$\bar{I} = \frac{1}{\gamma} I.$$

Os dois fatores de γ cancelam-se e concluímos que, como E, a componente de B paralela ao movimento permanece inalterada.

$$\boxed{\bar{B}_x = B_x.}$$





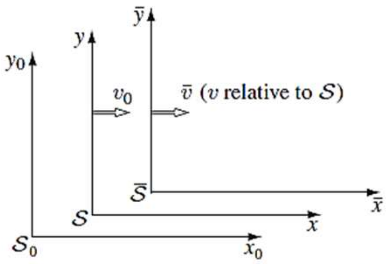
39

40

Relatividade. Grandezas eletromagnéticas

- **Exercício 3:**

E, esse é, então, o conjunto completo de transformações dos campos (com os outros componentes que vimos em aula):



$$\boxed{\begin{array}{lll} \bar{E}_x = E_x, & \bar{E}_y = \gamma(E_y - vB_z), & \bar{E}_z = \gamma(E_z + vB_y), \\ \bar{B}_x = B_x, & \bar{B}_y = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right), & \bar{B}_z = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right). \end{array}}$$

40

Eletrodinâmica covariante. Referências

- Zangwill, A., *Modern Eletrodynamics*, cap. 22, Cambridge Univ. Press, 2012.
- Griffiths, D. J., Eletrodinâmica, 3rd. Ed., cap. 12, Pearson Addison Wesley, SP, 2011.