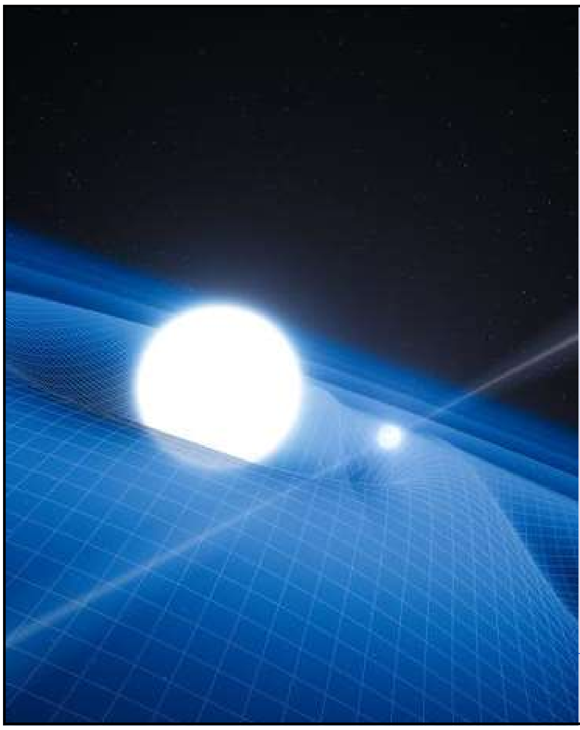


1

Eletrodinâmica covariante 1

Eletromagnetismo II (4302304)

Prof. *Ricardo A. Terini*

E-mail: rterini@if.usp.br

Bloco F – Conjunto Alessandro Volta – sl. 105

LDRFM – IF-USP

1

2

Relatividade. 4 – Momento e Energia

Recordando

- I) O significado físico de $\mathcal{E}$ aparece quando expandimos a sua expressão por *série de Taylor* para *u << c:*

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = mc^2 + \frac{1}{2}mu^2} + \frac{3}{8}m\frac{u^4}{c^2} + \cdots. \qquad (12)$$

- A *energia cinética* exata é

$$\therefore \quad T = \mathcal{E} - mc^2 = mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - 1\right]. \qquad (13)$$

- II) O significado de **p** aparece também quando expandimos a sua expressão (**p** = γm**u**) em *série de Taylor* para *u << c:*

$$\boxed{\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = m\mathbf{u}}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{u^4}{c^4} + \cdots\right], \qquad (14)$$

- **p** é o **momento relativístico** e se reduz ao *momento linear* newtoniano quando a velocidade é muito baixa.

2

3

Recordando

Relatividade. Grandezas eletromagnéticas

- O termo entre parênteses é o *campo magnético de um fio longo e reto*, e a *força* é exatamente a que teríamos obtido usando a lei de força de Lorentz no sistema S.
- Assim, observamos que, nesse caso, *o campo elétrico*, para um observador no referencial $\bar{S}$, manifesta-se como *campo magnético* para um observador em outro referencial S !

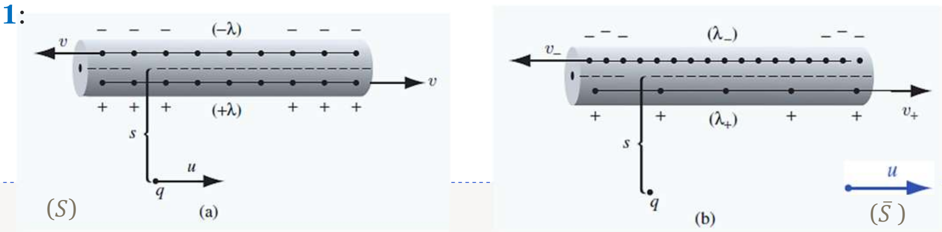
$$F = -qu\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi s}\right).$$

$$\therefore \quad \boxed{E = \frac{\lambda_{\text{tot}}}{2\pi\epsilon_0 s},} \quad (\bar{S})$$

$$\updownarrow \quad (31)$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}} \quad (S)$$

Aplicação 1:



3

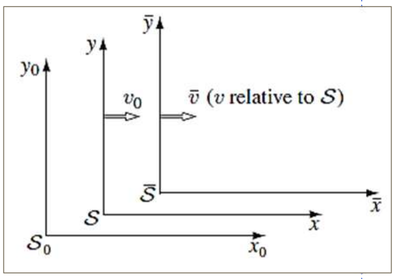
4

Recordando

Relatividade. Leis de transformação dos campos

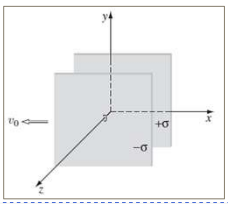
- **Aplicação 2**: Pode-se deduzir a relação entre os campos no referencial $\bar{S}$ em relação a S. Resulta:

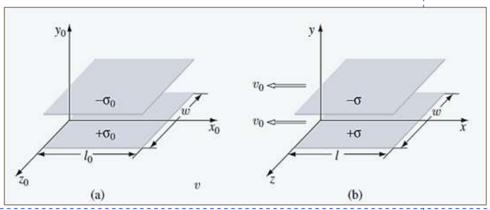
$$\left.\begin{aligned} \bar{E}_y &= \gamma(E_y - vB_z), \\ \bar{B}_z &= \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right). \end{aligned}\right\}$$



- Girando as placas (*fig. abaixo*), podemos achar outras componentes:

$$\left.\begin{aligned} \bar{E}_z &= \gamma(E_z + vB_y), \\ \bar{B}_y &= \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right). \end{aligned}\right\}$$





- E … $\bar{E}_x = E_x$

4

Eletrodinâmica. Formulação covariante

- As equações da eletrodinâmica assumem a mesma forma em qualquer referencial inercial.
- Infelizmente, é muito tedioso demonstrar essa *covariância* explicitamente a partir da forma usual das equações de Maxwell.
- Isso motiva a busca por *uma representação das equações que torne a covariância mais óbvia*.
- Fato: as eqs. (i) e (ii) são escalares e as eqs. (iii) e (iv) são vetoriais. Assim, são invariantes em translações e rotações, embora seus *componentes variem*.

$$\text{(i)}\quad \nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{1}{\epsilon_0}\rho, \qquad \text{(iii)}\quad \nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\text{(ii)}\quad \nabla\cdot\mathbf{B}=0, \qquad \text{(iv)}\quad \nabla\times\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{J}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}.$$

- Portanto, para a eletrodinâmica, basta mostrar que as eqs. fundamentais podem ser escritas em termos de *tensores de Lorentz* ($\therefore$ componentes mudam, mas seu caráter tensor essencial, não).
- Diz-se que isso é *escrever a teoria de Maxwell na forma explicitamente covariante*.

5

Eletrodinâmica. Tensores de Lorentz

- Tensores são *objetos matemáticos* definidos por seu comportamento sob transformações de coordenadas ortogonais.
- As grandezas físicas são classificadas como *tensores rotacionais* de vários níveis (*ranks*), dependendo de como se transformam sob rotações.
- Assim, um ***tensor de Lorentz*** de *rank* 0 é o que chamamos de *escalar* de Lorentz: uma grandeza de *um componente* que é invariante a uma mudança de referencial inercial:

- Ex.: $c' = c$
- Um tensor de Lorentz de *rank* 1 é um *quadrivetor*: um objeto de *quatro* componentes que se transforma de acordo com a *matriz de transformação de Lorentz*:

$$a'_\mu = L_{\mu\nu}a_\nu \qquad (1)$$

- Um tensor de Lorentz de *rank* 2 é um objeto cujos *dezesseis* componentes se transformam de acordo com a regra

$$s'_{\mu\nu} = L_{\mu\alpha}L_{\nu\beta}s_{\alpha\beta} \qquad (2)$$

6

Eletrodinâmica. Tensores de Lorentz

- A *matriz de transf. de Lorentz* é, então, um tensor de Lorentz de *rank* 1; em notação matricial:

$$r'_\mu = \left[\frac{\partial r'_\mu}{\partial r_\nu}\right] r_\nu = L_{\mu\nu} r_\nu$$

linha coluna

onde

$$\therefore \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\beta\gamma \\ 0 & 0 & -i\beta\gamma & \gamma \end{bmatrix}$$

Nesse caso, temos, por exemplo:

$L_{11} = 1$; $L_{12} = 0$; $L_{13} = 0$;...

$L_{21} = 0$; $L_{22} = 1$; ...

$L_{31} = 0$;............; $L_{33} = \gamma$; $L_{34} = i\beta\gamma$

$L_{41} = 0$;............; $L_{34} = - i\beta\gamma$; $L_{44} = \gamma$

- $\mathbf{L}_{\mu\nu} = \mathbf{L}_{\nu\mu}$ é um tensor *simétrico* (com 10 componentes distintos e 6 repetições), e
- $\mathbf{L}_{\mu\nu} = - \mathbf{L}_{\nu\mu}$ é um tensor *antissimétrico* (com 6 componentes distintos, 6 repetições e 4 nulos).

7

Eletrodinâmica. Tensores de Lorentz

- Os tensores de Lorentz de *rank* mais alto são definidos de forma semelhante.
- Dois teoremas são notáveis na manipulação dos tensores de Lorentz:
- 1) Considere um tensor de *rank* 1, b_μ, e um tensor de *rank* 2, $W_{\mu\nu}$ ...
- O *Teorema da contração* afirma que multiplicar os dois e contrair (somar) o índice comum μ produz um objeto d_ν, (tensor de *rank* 1):

$$\boxed{b_\mu W_{\mu\nu} = d_\nu.} \quad (3)$$

- 2) Reciprocamente, suponha que d_ν em (3) é um tensor de *rank* 1 especificado e b_μ é um tensor de *rank* 1 arbitrário.
- Nesse caso, o *Teorema do quociente* diz que $W_{\mu\nu}$ é um tensor de *rank* 2.
- Por fim, vamos ilustrar o *uso de tensores de Lorentz* para obter a covariância manifesta com:
  - a *condição de calibre de Lorentz,*
  - a *equação de continuidade*, e
  - a equação de onda não homogênea para os *potenciais de calibre de Lorentz* .

8

Eletrodinâmica. Tensores de Lorentz

- Previamente, vamos definir o 4-vetor operador $\boxed{\vec{\nabla} = \left(\nabla, \frac{\partial}{\partial(ict)}\right).}$ (4)
- O intervalo invariante associado com (4) é o *operador de equação de onda*

$$\therefore \qquad \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}.} \qquad (5)$$

- Então, a *velocidade* de propagação de ondas em qualquer ref. é a mesma, *c*.
- Vamos também definir os 4-vetores potencial magnético e densidade de corrente como

(φ: *potencial escalar*) $\boxed{\vec{A} = (\mathbf{A}, i\varphi/c)}$ e $\boxed{\vec{j} = (\mathbf{j}, ic\rho),}$ (6)

- ... que obedecem às condições dos 4-vetores e permitem definir o 4-divergente invariante:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0.} \quad \text{e} \quad \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0.} \qquad (7)$$

Eletrodinâmica. Tensores de Lorentz

- A seguir, temos, na forma usual, a equação de continuidade, a condição de calibre de Lorentz, e a equação de onda não homogênea para os potenciais de calibre de Lorentz (acima), e as mesmas expressões na forma de *tensores de Lorentz* (abaixo):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0. \qquad \left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right](\mathbf{A}, i\varphi/c) = -\mu_0(\mathbf{j}, ic\rho).$$

$$\boxed{\partial_\mu j_\mu = 0, \qquad \partial_\mu A_\mu = 0, \qquad \text{e} \qquad \partial_\mu \partial_\mu A_\nu = j_\nu.} \qquad (8)$$

- Os dois primeiros são covariantes porque sua estrutura é "*tensor de rank zero = tensor de rank zero*". O último é covariante porque sua estrutura é "*tensor de rank 1 = tensor de rank 1*".

Eletrodinâmica. As equações de Maxwell

$$\vec{\nabla} = \left(\nabla, \frac{\partial}{\partial(ict)}\right).$$

$$\vec{A} = (\mathbf{A}, i\varphi/c)$$

- Levando em conta os 4-vetores definidos em (4) e (6), bem como suas relações com os campos **E** e **B**:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \qquad \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \tag{9}$$

- ... podemos determinar as componentes cartesianas de ambos:

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_y = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 \\ B_y &= \frac{\partial}{\partial z}A_x - \frac{\partial}{\partial x}A_z = \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3 \\ B_z &= \frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{iE_x}{c} &= \frac{\partial A_x}{\partial(ict)} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{i\varphi}{c}\right) = \partial_4 A_1 - \partial_1 A_4 \\ \frac{iE_y}{c} &= \frac{\partial A_y}{\partial(ict)} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{i\varphi}{c}\right) = \partial_4 A_2 - \partial_2 A_4 \\ \frac{iE_z}{c} &= \frac{\partial A_z}{\partial(ict)} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{i\varphi}{c}\right) = \partial_4 A_3 - \partial_3 A_4. \end{aligned} \tag{10}$$

Eletrodinâmica. As equações de Maxwell

- As equações (10) mostram que as componentes cartesianas de **E** e **B** são componentes de um tensor de Lorentz de *rank* 2 com a forma generalizada

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{11}$$

- $F_{\mu\nu}$ é o *tensor de intensidade de campo eletromagnético*, que tem apenas 6 (em vez de 16) componentes *independentes* porque é *assimétrico* ($F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$) e os elementos diagonais ($\mu = \nu$) são *nulos*. Na forma matricial,

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & B_z & -B_y & -iE_x/c \\ -B_z & 0 & B_x & -iE_y/c \\ B_y & -B_x & 0 & -iE_z/c \\ iE_x/c & iE_y/c & iE_z/c & 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

- Então, a relatividade combina os campos E e B *numa única entidade*...

Eletrodinâmica. As equações de Maxwell

- Digno de nota é a *função escalar invariante* de Lorentz (verificar):

$$F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = 2(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B} - \mathbf{E}\cdot\mathbf{E}/c^2). \qquad (13)$$

- Demonstra-se que as *eqs. inomogêneas de Maxwell* estão contidas na expressão tensorial:

$$\boxed{\partial_\nu F_{\mu\nu} = \mu_0 j_\mu.} \qquad (14)$$

- A expressão (14) pode ser analisada pelo *teorema da contração.*
- *A componente $\mu = 4$ de (14), escrita abaixo, é a* lei de Gauss, $\nabla \cdot \mathrm{E} = \rho/\varepsilon_0$, *porque $j_4 = ic\rho$ e $\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1$:*

$$i\mu_0 c\rho = \partial_\nu F_{4\nu} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{iE_x}{c}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{iE_y}{c}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{iE_z}{c}\right) + 0. \qquad (15)$$

13

Eletrodinâmica. As equações de Maxwell

- *Similarmente, as componentes $\mu = 1, 2, 3$* de (14) correspondem às componentes *x, y* e *z* da *equação de Ampère-Maxwell* $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j} + c^{-2}\partial\mathbf{E}/\partial t$
- *Por exemplo, p/ $\mu = 1$, teremos:*

$$\mu_0 j_x = \partial_\nu F_{1\nu} = 0 + \frac{\partial}{\partial y}B_z + \frac{\partial}{\partial z}(-B_y) + \frac{\partial}{\partial(ict)}\left(-\frac{iE_x}{c}\right),$$

- *ou...*

$$\mu_0 j_x = [\nabla \times \mathbf{B}]_x - \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t}. \qquad (16)$$

- *As expressões para as outras coordenadas podem ser obtidas de modo similar, com os outros valores de μ .*
- As *equações homogêneas de Maxwell* também podem ser escritas em termos de $F_{\mu\nu}$.

14

Eletrodinâmica. As equações de Maxwell

- As *equações homogêneas de Maxwell* também podem ser escritas em termos de $F_{\mu\nu}$.
- Para isso, considere uma expressão de tensor de Lorentz de *rank* 3, onde uma permutação cíclica dos índices (sem soma) relaciona um termo ao próximo:

$$\boxed{\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0.} \qquad (17)$$

- Como $F_{\mu\mu} = 0$ e $F_{\lambda\mu} = -F_{\mu\lambda}$, então o termo do lado esquerdo será nulo se quaisquer 2 índices forem iguais.
- Entretanto, se $\lambda = 1, \mu = 2, \text{and } \nu = 3$, então (17) fica:

$$\boxed{0 = \partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{B}.} \qquad (18)$$

15

Eletrodinâmica. As equações de Maxwell

- Similarmente, fazendo $\lambda = 4, \mu = 1, \text{and } \nu = 2$ em (17) teremos:

$$\boxed{0 = \partial_4 F_{12} + \partial_1 F_{24} + \partial_2 F_{41} = \frac{\partial B_z}{\partial (ict)} + \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{iE_y}{c}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{iE_x}{c}\right) = -i\left[\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E}\right]_z.} \qquad (19)$$

- As escolhas restantes para os índices em (17) geram os outros componentes cartesianos da *lei de Faraday*.
- A matriz (12) não é a única maneira de incorporar E e B em um tensor de Lorentz de *rank* 2.
- Isso ocorre porque as fórmulas da transformação de Lorentz são invariantes para a *transformação de dualidade* B→ −E/c e E/c → B.

16

17

Eletrodinâmica. As equações de Maxwell

- Como resultado, a mesma operação discreta de simetria aplicada aos elementos de $F_{\mu\nu}$ produz um tensor de Lorentz independente de *rank* 2 que chamaremos de $G_{\mu\nu}$.
- A forma matricial deste *tensor dual* é

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & -E_z/c & E_y/c & -iB_x \\ E_z/c & 0 & -E_x/c & -iB_y \\ -E_y/c & E_x/c & 0 & -iB_z \\ iB_x & iB_y & iB_z & 0 \end{bmatrix}. \qquad (20)$$

- Com esse tensor, as *equações homogêneas* $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ and $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$ estão contidas em uma única equação explicitamente covariante:

$$\partial_\nu G_{\mu\nu} = 0. \qquad (21)$$

Obs.: O produto $F_{\mu\nu}G_{\mu\nu} = -4\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}/c$ é um invariante de Lorentz.

17

18

Eletrodinâmica. As equações de Maxwell

- Sintetizando: ***Equações de Maxwell***

Forma usual		Forma explicitamente covariante
$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$	$\mu = 4$	$\partial_\nu F_{\mu\nu} = \mu_0 j_\mu.$
$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + c^{-2}\partial \mathbf{E}/\partial t$	$\mu = 1, 2, 3$	
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\lambda = 1, \mu = 2$, and $\nu = 3$ …	$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0.$
$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$	$\lambda = 4, \mu = 1$, and $\nu = 2$ …	*ou* $\partial_\nu G_{\mu\nu} = 0.$

18

Eletrodinâmica covariante. Referências

- Zangwill, A., *Modern Eletrodynamics*, cap. 22, Cambridge Univ. Press, 2012.
- Griffiths, D. J., Eletrodinâmica, 3rd. Ed., cap. 12, Pearson Addison Wesley, SP, 2011.
- Jackson, J. D., *Classical Eletrodynamics*, 3rd. Ed., cap. 11, John Wiley and Sons, NY, 1999.
-