FLUIDOS - AULA 3

Lembrete: eq. de Euler
$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = \frac{-\vec{\nabla}p - \vec{\nabla}u}{\rho}}$$

Já estudamos o caso estático (aula 2).
Hoje: algum caso dinâmico simples

1. Conservação da Vazão para fluidos incompressíveis

Já vimos que fluidos incompressíveis são aqueles que satisfazem

$$\rho = \text{const}$$

Consequência importante: na eq. de continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) = 0$$

$$\Downarrow$$

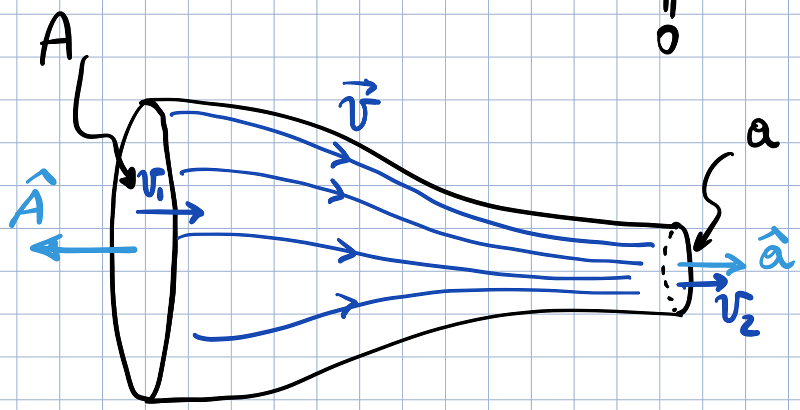
$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0}$$

Para apreciar o significado físico desse resultado, vamos usar um resutado visto na derivação da forma infinitesi= mal da eq. de continuidade:

$$\int_S d\vec{S}\cdot\vec{v}\rho = \int_V dV\ \vec{\nabla}\cdot(\vec{v}\rho) \qquad [\text{T. GAUSS}]$$

No caso do fluido perfeito incompressível :

$$\int_V dV \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{v}}_{\substack{\parallel \\ 0}} = 0 = \int \vec{dS}\cdot\vec{v}$$



$$0 = \int \vec{dS}\cdot\vec{v}$$

$$= \vec{A}\cdot\vec{v}_1 + \vec{a}\cdot\vec{v}_2 + \underbrace{\vec{A}_{lat}\cdot\vec{v}_{lat}}_{\substack{\parallel \\ 0}}$$

porque $\vec{v}_{lat} \perp \vec{A}_{lat}$

$$= a v_2 - A v_1$$

$$\Rightarrow \boxed{v_2 = \frac{A}{a} v_1}$$

a velocidade do fluido aumenta conforme a seção diminui

Definindo a VAZÃO = volume de fluido que passa para a superfície ortogonal à velocidade na unidade de tempo

$$\begin{cases} \text{Vazão}_1 = \left.\dfrac{dV}{dt}\right|_1 = A\left.\dfrac{d\ell}{dt}\right|_1 = A v_1 \\ \text{Vazão}_2 = \left.\dfrac{dV}{dt}\right|_2 = a\left.\dfrac{d\ell}{dt}\right|_2 = a v_2 \end{cases} \Rightarrow \text{Vazão}_1 = \text{Vazão}_2$$

2. Vorticidade e a segunda forma da eq. de Euler

Já vimos 2 operadores diferenciais importantíssimos construídos usando $\vec{\nabla} = \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$:

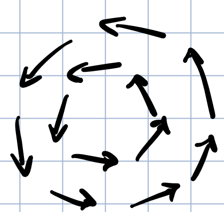
(1) gradiente ($\vec{\nabla}$ aplicado em um escalar) : $\vec{\nabla} p$, $\vec{\nabla} u$

(2) divergente ($\vec{\nabla}$ " " " vetor) : $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$

Há um terceiro operador que pode ser construído :

(3) rotacional $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ (como produto vetor)

$\vec{\nabla} \times \vec{F} \neq 0$ quando há uma "vorticidade" na direção do campo vetorial



(VIDEO)

Identidade vetorial :

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \underbrace{\vec{v} \cdot \vec{v}}_{v^2}$$

Definição : VORTICIDADE $\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$

Eq. de Euler (forma 2) :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} u}{\rho}$$

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{v} = - \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p + u}{\rho}\right)}$$ (fluidos incompressíveis)

Super importante: existe um teorema de cálculo vetorial (t. Helmholtz) cujo enunciado garante que um campo vetorial $\vec{F}$ é completamente determinado dando $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$ & $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ num volume V e o valor de $\vec{F}$ na superfície de V.

Fluido incompressível : $\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{v} = \vec{\Omega} \end{cases}$

$\Rightarrow$ dada $\vec{\Omega}$, $\vec{v}$ é completamente determinada a menos de condições de contorno

3. Eq. para a vorticidade e redemoinhos

Tomando $\vec{\nabla}\times$(Eq. Euler 2) e lembrando que $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\varphi) = 0$

$$\boxed{\frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial t} + \vec{\nabla}\times(\vec{\Omega}\times\vec{v}) = 0}$$

ainda porém a eq. não é fechada (precisamos conhecer $\vec{v}$ para calcular $\vec{\Omega}$ e precisamos de $\vec{\Omega}$ para calcular $\vec{v}$)

Há porém um caso simples no qual podemos resolver a equação:

$$\boxed{\text{SE} \quad \vec{\nabla}\times(\vec{\Omega}\times\vec{v})\Big|_{t_0} = 0 \quad \text{ENTÃO} \quad \vec{\Omega}(\vec{r},t) = \vec{\Omega}(\vec{r},t_0) \quad \forall t}$$

Por quê? Observamos que

$$\vec{\Omega}(\vec{r}, t_0+\delta t) - \vec{\Omega}(\vec{r}, t_0) = \left.\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t}\right|_{t_0} \delta t \qquad \text{(da def. de derivada)}$$

$$\Rightarrow \vec{\Omega}(\vec{r}, t_0+\delta t) = \vec{\Omega}(\vec{r}, t_0) + \delta t \left\{ - \underbrace{\vec{\nabla}\times(\vec{\Omega}\times\vec{v})}_{=0} \right\}\Big|_{t_0} = 0$$

... e assim por diante.

Caso particular: $\vec{\Omega}(\vec{r}, t_0) = 0 \Rightarrow \vec{\Omega}(\vec{r}, t) = 0 \ \forall t$

Logo, nunca conseguimos criar vorticidade na ausência de vorticidade (para fluidos perfeitos!):

"FLUIDOS PERFEITOS NÃO CRIAM REDEMOINHOS"

4. Teorema de Bernoulli

Caso particular: ESCOAMENTO ESTACIONÁRIO $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$

$$\left(\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r})\right)$$

Tomando $\vec{v}\cdot$ (Eq. Euler 2):

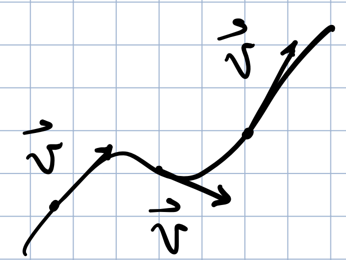
$$\vec{v}\cdot\left[\underbrace{\vec{\Omega}\times\vec{v}}_{\perp \vec{v}} + \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \frac{u}{\rho}\right)\right] = 0$$

$$\boxed{\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p+u}{\rho}\right) = 0} \Rightarrow \text{o gradiente é perpendicular a velocidade}$$

Definindo uma LINHA DE ESCOAMENTO

$\parallel$

LINHA TANGENTE A $\vec{v}$



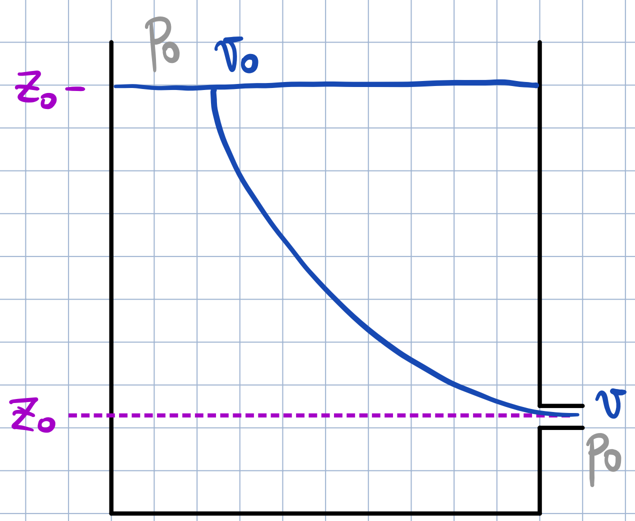
temos que

$\boxed{\frac{v^2}{2} + \frac{p+u}{\rho} = \text{constante ao longo de uma linha de escoamento}}$

TEOREMA DE BERNOULLI

(obs: vale apenas para escoamentos estacionários)

Aplicação 1: tonel furado



Para um tonel suficientemente grande: $v_0 \simeq 0$

Se o furo for suficientemente pequeno: escoamento é estacionário em boa aproximação

$\Downarrow$

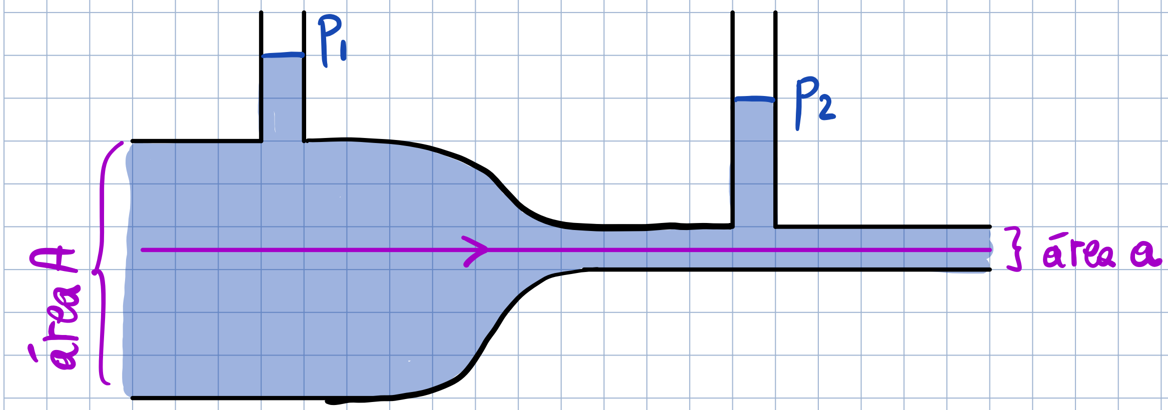
podemos aplicar o teorema de Bernoulli:

$$\rho \frac{v_0^2}{2} + \cancel{p_0} + \rho g z_0 = \rho \frac{v^2}{2} + \cancel{p_0} + \rho g z$$

$$\Downarrow$$

$$v = \sqrt{2g(z_0 - z)}$$ (FÓRMULA DE TORRICELLI)

Aplicação 2



Dada p_1, quanto vale p_2?

Ao longo da linha de escoamento vale:

$$\rho \frac{v_1^2}{2} + p_1 = \rho \frac{v_2^2}{2} + p_2$$

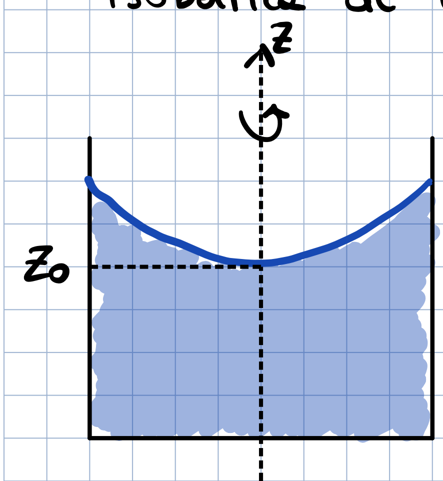
Conservação da vazão: $v_2 = \frac{A}{a} v_1$

Logo: $p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho\left(v_2^2 - v_1^2\right) = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{A^2}{a^2} - 1\right)v_1^2 > 0$

$\Rightarrow$ pressão diminui

5. O fluido em rotação obtido como solução da eq. de Euler

Já vimos na aula 2 como calcular a superfície isobárica de um fluido incompressível em rotação:



$$z = z_0 + \frac{\omega^2}{2g} r^2$$

Vamos agora ver como essa solução aparece como solução da eq. de Euler:

(1) Campo de velocidades iniciais: $\vec{v}(\vec{r},0) = \vec{\omega} \times \vec{r}$
$\qquad = -\omega y\, \hat{e}_x + \omega x\, \hat{e}_y$

(2) Vorticidade inicial:

$$\vec{\Omega}(\vec{r},0) = \vec{\nabla} \times \vec{v}(\vec{r},0) = \det \begin{bmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 2\omega\, \hat{e}_z$$

(3) Eq. para a vorticidade:

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \underbrace{\vec{\nabla} \times (\vec{\Omega} \times \vec{v})}_{\text{Cálculo explícito: } 0} = 0$$

Como já vimos, $\left.\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$ leva a $\vec{\Omega}(\vec{r},t) = \vec{\Omega}(\vec{r},0)$
$\qquad = 2\omega\, \hat{e}_z$

(4) Como $\vec{\Omega} =$ const, a eq. de Euler admite uma solução estacionária (caso contrário, a variação de $\vec{v}$ no tempo induziria uma variação de $\vec{\Omega}$ no tempo).

Atenção: a sol. estacionária é <u>uma possível</u> solução, nem todas as soluções são estacionárias

(5) Eq. de Euler :

$$\cancel{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}^{\,0} + \vec{\Omega} \times \vec{v} + \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p+u}{\rho}\right) = 0$$

$$\Big\downarrow \text{Calculando}$$

$$-2\omega^2 \vec{r} + \omega^2 \vec{r} + \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + g\,\hat{e}_z = 0$$

Resolvendo para $\vec{\nabla} p$:

$$\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} = \omega^2 \vec{r} - g\,\hat{e}_z \overset{!}{=} \omega^2 x\,\hat{e}_x + \omega^2 y\,\hat{e}_y - g\,\hat{e}_z$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = \rho\,\omega^2 x \xrightarrow{\text{integrando}} p = \frac{1}{2}\rho\,\omega^2 x^2 + f(y,z) \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = \rho\,\omega^2 y \\ \dfrac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \end{cases}$$

$$\Big\downarrow$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = \rho\,\omega^2 y$$

$$\Big\downarrow \text{integrando}$$

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\rho\,\omega^2 y^2 + r(z)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z} = -\rho g$$

$$\Big\downarrow \text{integrando}$$

$$r(z) = -\rho g z + C$$

Logo : $$p(x,y,z) = \frac{1}{2}\rho\,\omega^2 (x^2+y^2) - \rho g z + C \overset{!}{=} \frac{1}{2}\rho\,\omega^2 r^2 - \rho g z + C$$

(6) Superfície isobárica: $p(x,y,z) = \text{Const}$

$$\Rightarrow \frac{\omega^2 r^2}{2} - gz = \text{Const} = -g z_0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{z = z_0 + \frac{\omega^2}{2g} r^2}$$

Como já achamos no referencial rotante