

Respostas - Lista III

①

c)

$$y(x, t) = \begin{cases} 1 - |x - vt|, & \text{se } |x - vt| \leq 1 \text{ m} \\ 0, & \text{se } |x - vt| > 1 \text{ m} \end{cases} \quad (1)$$

d) Considerando uma função $y(x, t)$ podemos calcular sua expansão em uma série de Fourier

$$y(x, t) = \sum_n A_n \cos(k_n - \omega_n t) + B_n \sin(k_n - \omega_n t). \quad (2)$$

Os coeficientes são

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L y(x, 0) dx && \text{se } n = 0 \\ A_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L \cos(k_n x) y(x, 0) dx && \text{se } n \neq 0 \end{aligned} \quad (3)$$

②

$$t = \frac{4\ell}{v} \quad (4)$$

③

a) Modos normais e frequências

$$\omega_n = k_n v = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (5)$$

b) Tensão da corda

$$T \approx 15,45 \text{ s}^{-2} \text{ m kg} \quad (6)$$

④ Energia total de oscilação

$$E = \mu v^2 b_n^2 \frac{n^2 \pi^2}{4\ell} \quad (7)$$

⑤

a) Se a densidade μ_1 for muito maior que a densidade μ_2 esperamos que a transmissão seja alta $\tau \sim 1$, enquanto que, no caso oposto, esperamos ter uma alta reflexão $\rho \sim 1$. O caso onde $\mu_1 = \mu_2$ serve como um teste de sanidade pois equivale a ausência de junção de forma que $\tau = 1$.

- b) As velocidades em cada corda dependem da densidade correspondente

$$v_i = \sqrt{\frac{T}{\mu_i}} \quad i = 1, 2. \quad (8)$$

E analogamente os números de onda são dados por

$$k_i = \frac{\omega}{v_i} \quad i = 1, 2. \quad (9)$$

- c) Essa é uma condição de continuidade. Se não tivéssemos essa condição praticamente todos os outros aspectos físicos para esse exercício seriam problemáticos. Pensando no caso trivial onde $\mu_1 = \mu_2$, violar essa equação nesse limite seria absurdo. Para que isso ocorresse algo estranho deveria estar acontecendo na junção.
- d) Partindo da equação de onda, integrando no espaço ao redor do ponto de junção temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} y(x, t) dx &= v^2 \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} dx, \\ &= v^2 \left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right|_{\epsilon} - \left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right|_{-\epsilon}. \end{aligned} \quad (10)$$

Como $y(x, t)$ é contínua temos que no limite de epsilon indo à zero o lado esquerdo é nulo de forma que temos a condição

$$\frac{\partial y_i + y_r}{\partial x} = \frac{\partial y_t}{\partial x}. \quad (11)$$

- e) Amplitudes de reflexão e transmissão

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{2}{1 + \frac{k_1}{k_2}} = \frac{2}{1 + \frac{v_1}{v_2}} \\ \rho &= \frac{1 - \frac{k_1}{k_2}}{1 + \frac{k_1}{k_2}} = \frac{1 - \frac{v_1}{v_2}}{1 + \frac{v_1}{v_2}} \end{aligned} \quad (12)$$

⑥

- a) Refletividade e transmissividade:

$$\begin{aligned} r &= \frac{I_r}{I_i} = \frac{\mu_1 v_1 \omega^2 A_r^2}{\mu_1 v_1 \omega^2 A_i^2} = \frac{\left(1 - \frac{v_1}{v_2}\right)^2}{\left(1 + \frac{v_1}{v_2}\right)^2} \\ t &= \frac{I_t}{I_i} = \frac{\mu_2 v_2 \omega^2 A_t^2}{\mu_1 v_1 \omega^2 A_i^2} = \frac{4 \frac{v_1}{v_2}}{\left(1 + \frac{v_1}{v_2}\right)^2} \end{aligned} \quad (13)$$

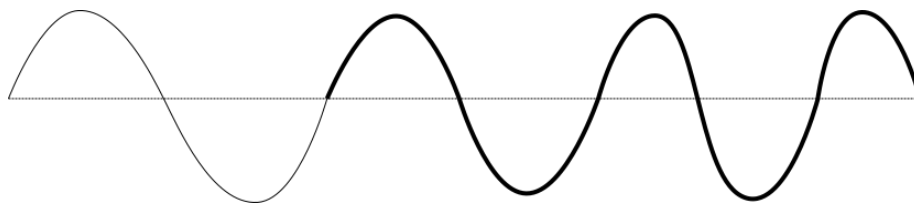
b) Conservação de energia

⑦

a) A frequência mais baixa do sistema é

$$\nu = \sqrt{\frac{T}{\mu_1 \lambda_{n=2}^2}} = 326.86 \text{ Hz.} \quad (14)$$

b) Temos 6 nós (não contando as pontas), como indicado na Figura abaixo.



⑧

a) Tempo de subida:

$$\Delta t = 2\sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (15)$$

Tempo total:

$$t_{\text{tot}} = 4\sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (16)$$