**O MOVIMENTO BROWNIANO**

Em 1827, o botânico inglês Robert Brown investigou, através de um microscópio, o movimento de partículas de pólen em suspenção na água, que se agitavam de forma bastante peculiar, em um rápido *zig-zag.*

 

A princípio ele imaginou tratar-se de seres vivos, mas partículas minúsculas de material inorgânico apresentavam o mesmo tipo de comportamento.

Apenas 50 anos depois é que foi sugerida uma explicação qualitativa do fenômeno, pelo jesuíta belga *Joseph Delsaux*, baseada em colisões provocadas pelas moléculas do líquido.

Finalmente, em 1905, uma descrição quantitativa do fenômeno foi feita por Einstein (em um artigo publicado no mesmo volume do *Annalen der Physik* em que publicou a sua *Teoria da Relatividade Especial*).

As partículas microscópicas do pólen (na faixa de 0,1 a 1 μm, aproximadamente), sendo muito maiores que as moléculas do líquido, seria continuamente bombardeadas por estas.

Como resultado, tem-se o movimento irregular característico em *zig-zag* que foi denominado “**movimento browniano**”.

Este mesmo fenômeno serviu de base para se explicar como ocorre a **difusão** das moléculas em fluidos (líquidos ou gasosos).

Einstein propõe que a função de distribuição de probabilidade $P\left(x,t\right)$ de encontrar uma partícula na posição $x$ no tempo $t$ satisfaz a equação diferencial de difusão:

$$D\frac{∂^{2}P\left(x,t\right)}{∂x^{2}}-\frac{∂P\left(x,t\right)}{∂t}=0$$

onde uma solução para esta equação é uma distribuição gaussiana onde $D$ é o coeficiente de difusão.

$$P\left(x,t\right)=\frac{1}{\sqrt{4πDt}}e^{-\frac{x^{2}}{4Dt}}$$

Einstein mostrou que o coeficiente de difusão pode ser obtido utilizando o raio $a$ da partícula, o coeficiente de viscosidade do meio $η$ e a temperatura do sistema, através da expressão:

$$D=\frac{kT}{6πaη}$$

A figura abaixo mostra exemplo de $P\left(x,t\right)$ com diferentes tempos. A distribuição com o tempo menor apresenta a menor largura (curva verde) e a com tempo maior a maior largura (curva azul).



**DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL**

A distribuição binomial é descreve ao sistema que só tem duas respostas: sim/não; direita/esquerda; ligado/desligado; certo/errado; bom/ruim; etc.

Seja $p$ a probabilidade de uma resposta e $q$ a probabilidade da outra resposta. Isso implica que $p+q=1$. Se aplicarmos o teorema da equiprobabilidade temos que $p=q=1/2$, devemos ressaltar que existem situações onde $p\ne q$.

Se $N$ é o número total de eventos e $n$ o número de respostas para $p$, então o número de respostas para $q$ será $N-n$.

A probabilidade de ter $n$ respostas $p$ em $N$ tentativas é $P\left(n\right)$ dada por:

$$P\left(n\right)=P\_{N}^{n,N-n}p^{n}q^{N-n}=\frac{N!}{n!\left(N-n\right)!}p^{n}\left(1-p\right)^{N-n}$$

Esta distribuição binomial tem as seguintes propriedades:

(a) média

$$\left〈n\right〉 =\sum\_{i=1}^{N}nP\left(n\right)=Np$$

(b) média quadrática e variância

$$\left〈n^{2}\right〉 =\sum\_{i=1}^{N}n^{2}P\left(n\right)=Np(q+Np)$$

$$σ\_{n}^{2}=\left〈n^{2}\right〉-\left〈n\right〉^{2}=Npq$$

(b) no limite de $N\rightarrow \infty $ , a distribuição binomial tende a distribuição Gaussiana

$$P(n)=\frac{1}{\sqrt{2πσ\_{n}^{2}}}e^{-\frac{\left(n-n\_{0}\right)^{2}}{2σ\_{n}^{2}}}$$

onde $n\_{0}=\left〈n\right〉$ e $σ\_{n}^{2}=\left〈n^{2}\right〉-\left〈n\right〉^{2}$.

No movimento Browniano a distância total percorrida é $x=\left[n-\left(N-n\right)\right]l=\left(2n-N\right)l$, onde $l$ é o tamanho do passo e $dx=2ldn$. Então fazendo a mudança de variável de $n$ para $x$ temos que $P(x)$ também é uma distribuição gaussiana

$$P(x)=\frac{1}{\sqrt{2πσ\_{x}^{2}}}e^{-\frac{\left(x-x\_{0}\right)^{2}}{2σ\_{x}^{2}}}$$

onde $x\_{0}=\left〈x\right〉$ e $σ\_{x}^{2}=\left〈x^{2}\right〉-\left〈x\right〉^{2}$.

Vamos considerar que $τ$ é o tempo de cada passo, então o tempo total será $t=Nτ$.

Se $p=q=1/2$, temos que $\left〈n\right〉=N/2$ e $\left〈n^{2}\right〉=(N+N^{2})/4$, levando estes resultados para o cálculo da posição média, ficamos com

$$\left〈x\right〉=\left(2\left〈n\right〉-N\right)l=0$$

$$σ\_{x}^{2}=\left〈x^{2}\right〉-\left〈x\right〉^{2}=\left〈x^{2}\right〉=\left〈\left[\left(2n-N\right)l\right]^{2}\right〉=\left〈4n^{2}l^{2}-4nNl^{2}+N^{2}l^{2}\right〉$$

$$=4l^{2}\left〈n^{2}\right〉-4Nl^{2}\left〈n\right〉+N^{2}l^{2}=Nl^{2}=\frac{tl^{2}}{τ}$$

Substituindo estes valores de $\left〈x\right〉=0$ e $σ\_{x}^{2}=Nl^{2}$ na distribuição gaussiana temos:

$$P\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2πtl^{2}/τ}}e^{-\frac{x^{2}}{2tl^{2}/τ}}=P(x,t)$$

para esta equação ficar igual a solução da equação de difusão, temos que $4Dt=2t{l^{2}}/{τ}.$ Então, o coeficiente de difusão é $D={l^{2}}/{2τ}$. Isto significa que o coeficiente de difusão é uma característica do sistema que pode ser identificado através de uma caminhada aleatória onde cada passo tem um tamanho de $l$ e ocorre num tempo $τ$.