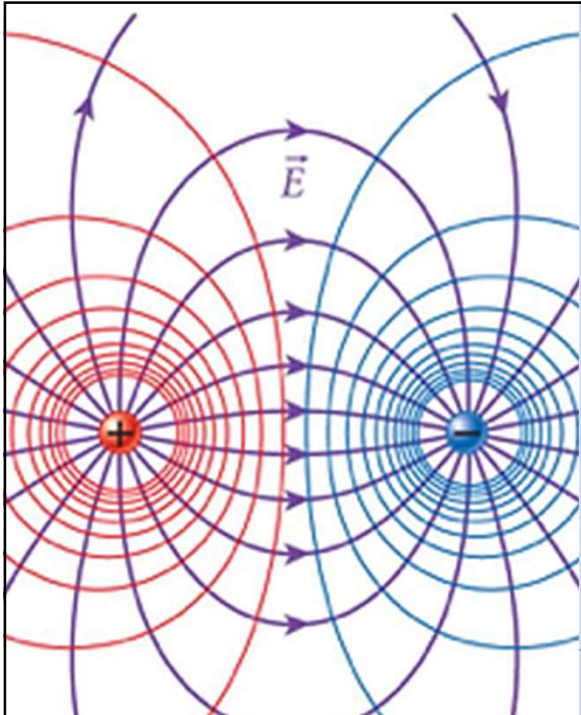




1

Potenciais 1

Eletromagnetismo II (4302304)

Prof. Ricardo A. Terini

E-mail: rterini@if.usp.br

Bloco F – Conjunto Alessandro Volta – sl. 105

LDRFM – IF-USP

1

2

- ♦ 1ª. Parte: Comentários sobre a Prova P1
- ♦ 2ª. Parte: Potencial escalar e potencial vetor

2

3

Potenciais escalar e vetor

- **Questão:** Como as fontes (ρ e $\mathbf{J}$) geram campos eletromagnéticos?

- Ou: Como, a partir de $\rho(\mathbf{r},t)$ e $\mathbf{J}(\mathbf{r},t)$ encontramos os campos $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ que sejam solução geral das **Equações de Maxwell**?

- Caso estático: OK

- Lei de Coulomb: $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r^2} \hat{\mathbf{r}} d\tau'$

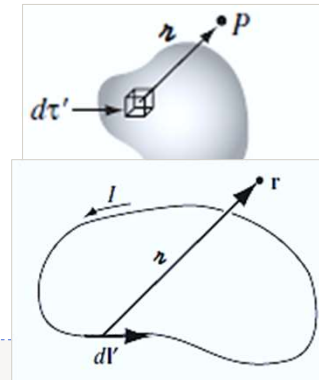
- Lei de Biot-Savart: $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{I} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} dl'$

$$(i) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho,$$

$$(iii) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$(ii) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$(iv) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$



3

4

Potenciais escalar e vetor

- **Questão:** Como as fontes (ρ e $\mathbf{J}$) geram campos eletromagnéticos?

- Ou: Como, a partir de $\rho(\mathbf{r},t)$ e $\mathbf{J}(\mathbf{r},t)$ encontramos os campos $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ que sejam solução geral das **Equações de Maxwell**?

- Caso estático: OK

- Lei de Coulomb: $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r^2} \hat{\mathbf{r}} d\tau'$

- Lei de Biot-Savart: $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{I} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} dl'$

$$(i) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho,$$

$$(iii) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$(ii) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$(iv) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

- Na eletrostática, $(\nabla \times \mathbf{E}) = \mathbf{0}$

- Assim, foi possível definir um **potencial escalar**, tal que:

$$\therefore \mathbf{E} = -\nabla V.$$

- Na magnetostática, $(\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0$,
 $\therefore$ define-se um **potencial vetorial**, e:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (\text{I})$$

4

Potenciais escalar e vetor

- ... (I) $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ vale tanto na eletrostática quanto na eletrodinâmica, e $\text{div } \mathbf{B}$ (ii) continua nulo.

- Assim, substituindo (I) em (iii):

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}), \\ \therefore \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) &= 0.\end{aligned}$$

- Então, agora na *eletrodinâmica*, pode-se escrever que:

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V \quad \therefore \quad \mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (\text{II})$$

$$\begin{aligned}(\text{i}) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho, & (\text{iii}) \quad \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ (\text{ii}) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & (\text{iv}) \quad \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.\end{aligned}$$

- Então, pelas eqs. (I) e (II), pode-se obter $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ a partir dos potenciais V e $\mathbf{A}$.
- (I) e (II) satisfazem, claro, as eqs. (ii) e (iii) de Maxwell.
- E quanto às eqs. (i) (Lei de Gauss) e (iv) (Lei de Ampère/Maxwell)?

5

Potenciais escalar e vetor

- Substituindo (II) em (i):

$$\therefore \nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho; \quad (\text{III})$$

que se reduz à eq. de Poisson no caso estático.

- E, substituindo (I) e (II) em (iv):

$$\therefore \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{J} - \mu_0 \epsilon_0 \nabla \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2},$$

- Usando a identidade vetorial:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

$$\therefore \left(\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{J}. \quad (\text{IV})$$

$$\begin{aligned}(\text{i}) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho, & (\text{iii}) \quad \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ (\text{ii}) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & (\text{iv}) \quad \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.\end{aligned}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (\text{II})$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (\text{I})$$

- As 2 eqs. (III) e (IV) contém todas as informações das eqs. de Maxwell (p/ o espaço livre).

6

7

Potenciais escalar e vetor

• Exercício 1:

Ache as distribuições de carga e de corrente que fariam surgir os potenciais abaixo:

$$\left(\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{J}.$$

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho;$$

$$V = 0, \quad \mathbf{A} = \begin{cases} \frac{\mu_0 k}{4c} (ct - |x|)^2 \hat{\mathbf{z}}, & \text{for } |x| < ct, \\ \mathbf{0}, & \text{for } |x| > ct, \end{cases}$$

Sendo k uma constante e $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$.

7

8

Potenciais escalar e vetor

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

• Exercício 1:

Ache as distribuições de carga e de corrente que fariam surgir os potenciais abaixo:...

Sendo k uma constante e

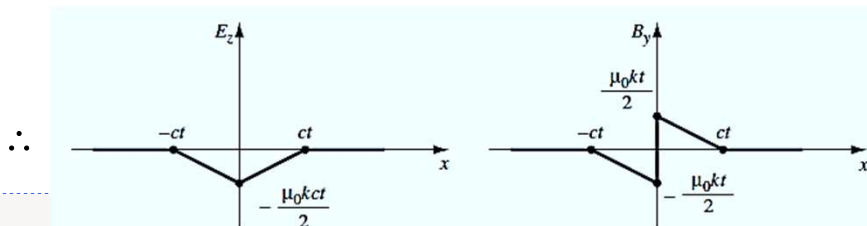
$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

$$\therefore \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 k}{2} (ct - |x|) \hat{\mathbf{z}},$$

$$|x| < ct.$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\mu_0 k}{4c} \frac{\partial}{\partial x} (ct - |x|)^2 \hat{\mathbf{y}} = \pm \frac{\mu_0 k}{2c} (ct - |x|) \hat{\mathbf{y}},$$

- Se $|x| > ct \rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{B} = 0$



8

9

Potenciais escalar e vetor

• Exercício 1:

Ache as distribuições de carga e de corrente que fariam surgir os potenciais abaixo:...

Sendo k uma constante e $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 k}{2}(ct - |x|)\hat{\mathbf{z}}, \quad |x| < ct;$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\mu_0 k}{4c} \frac{\partial}{\partial x}(ct - |x|)^2 \hat{\mathbf{y}} = \pm \frac{\mu_0 k}{2c}(ct - |x|)\hat{\mathbf{y}},$$

- Calculando as derivadas necessárias dos campos:...

$$\therefore \nabla \cdot \mathbf{E} = 0; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad \nabla \times \mathbf{E} = \mp \frac{\mu_0 k}{2} \hat{\mathbf{y}}; \quad \nabla \times \mathbf{B} = -\frac{\mu_0 k}{2c} \hat{\mathbf{z}};$$

- Todas as eqs. de Maxwell são satisfeitas se considerarmos

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 k c}{2} \hat{\mathbf{z}}; \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \pm \frac{\mu_0 k}{2} \hat{\mathbf{y}}.$$

ρ e $\mathbf{J}$ nulos...

- No entanto, a descontinuidade no gráfico de $\mathbf{B}$ sugere a presença, no plano xz , de uma densidade de corrente $\mathbf{K}$. Como...

$$(iv) \quad \frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_1^{\parallel} - \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_2^{\parallel} = \mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}}. \quad \text{Em } x=0$$

$$\therefore kt \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{K} \times \hat{\mathbf{x}}, \quad \text{e} \quad \boxed{\mathbf{K} = kt \hat{\mathbf{z}}.}$$

9

10

Potenciais escalar e vetor. Operador d'Alembertiano.

• Exercício 2:

Mostre que as equações diferenciais para V (III) e $\mathbf{A}$ (IV) podem ser escritas na forma mais simétrica:

$$\left(\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{J}.$$

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho;$$

$$\left. \begin{aligned} (v) \quad \square^2 V + \frac{\partial L}{\partial t} &= -\frac{1}{\epsilon_0} \rho, \\ (vi) \quad \square^2 \mathbf{A} - \nabla L &= -\mu_0 \mathbf{J}, \end{aligned} \right\}$$

onde

$$\square^2 \equiv \nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

e

$$L \equiv \nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Operador d'Alembertiano

10