

**Lista de Exercícios IV**

- ① (a) Duas ondas sonoras ( $v_{\text{som}} = 344\text{m/s}$ ) de mesma amplitude e com frequências  $\nu_1 = 441\text{ Hz}$  e  $\nu_2 = 439\text{ Hz}$  interferem. Calcule as velocidades de fase e de grupo para a onda resultante e discuta o resultado.
- (b) Desprezando efeitos de tensão superficial, pode-se mostrar que ondas na superfície da água, com comprimento de onda  $\lambda$  muito menor do que a profundidade da água, propagam-se com velocidade de fase  $v_\phi = \sqrt{g\lambda/(2\pi)}$ , em que  $g$  é a aceleração da gravidade. Mostre que a velocidade de grupo correspondente é  $v_g = \frac{1}{2}v_\phi$ .
- (c) Duas ondas de mesma amplitude sobre a superfície da água interferem, uma com comprimento de onda  $\lambda_1 = 1\text{ m}$  e a outra com  $\lambda_2 = 1,1\text{ m}$ . Utilizando a expressão do item anterior para  $v_\phi$ , escreva a equação para a onda resultante, conforme

$$y(x, t) = 2A \cos\left(\frac{\Delta\kappa}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cos(\bar{\kappa}x - \bar{\omega}t);$$

em seguida calcule a velocidade de fase da perturbação resultante e a velocidade de grupo da mesma. Considere  $g = 9,8\text{ m/s}^2$ .

- ② O *tubo de Kundt*, que costumava ser empregado para medir a velocidade do som em gases, é um tubo de vidro que contém o gás, fechado numa extremidade por uma tampa  $M$  que se faz vibrar com uma frequência  $\nu$  conhecida (por exemplo, acoplando-a a um alto-falante) e na outra por um pistão que se faz deslizar, variando o comprimento do tubo. O tubo contém um pó fino (serragem, por exemplo). Ajusta-se o comprimento do tubo com o auxílio do pistão até que ele entre em ressonância com a frequência  $\nu$ , o que se nota pelo reforço da intensidade sonora emitida. Observa-se então que o pó fica acumulado em montículos igualmente espaçados, de espaçamento  $\Delta l$ , que se pode medir.
- (a) A que correspondem as posições dos topos dos montículos ?
- (b) Qual é a relação entre  $\Delta l$ ,  $\nu$  e a velocidade do som no gás ?
- (c) Com o tubo cheio de  $\text{CO}_2$  a  $20^\circ\text{C}$  e  $\nu = 880\text{ Hz}$ , o espaçamento médio é de  $15,2\text{ cm}$ . Qual é a velocidade do som no  $\text{CO}_2$  a  $20^\circ\text{C}$  ?

- ③ A densidade média da crosta terrestre 10 km abaixo dos continentes é  $2,7 \text{ g/cm}^3$ . A velocidade das ondas sísmicas longitudinais a esta distância, encontrada medindo o tempo de chegada de terremotos distantes, é  $5,4 \text{ km/s}$ . Use esta informação para encontrar o módulo de elasticidade volumétrico,  $B$ , da crosta terrestre a esta profundidade. Para comparação  $B_{\text{aço}} = 16 \times 10^{10} \text{ Pa}$ .
- ④ Terremotos geram ondas de som na Terra. Diferente de um gás, existem ondas transversais (S) e longitudinais (P) em um sólido. Tipicamente a velocidade de S é  $4,5 \text{ km/s}$  e de P é  $8,0 \text{ km/s}$ . Um sismógrafo registra ondas P e S de um terremoto. As primeiras ondas P chegam  $3,0$  minutos antes das primeiras ondas S. Assumindo que as ondas se deslocam em linha reta, a que distância ocorreu o terremoto?
- ⑤ Um submarino francês e um americano movem-se um no sentido do outro, em linha reta, em águas paradas no Atlântico Norte. O submarino francês se desloca a  $50 \text{ km/h}$  enquanto o americano a  $70 \text{ km/h}$ . Sabendo que ondas de sonar tem  $v = 5470 \text{ km/h}$  e que o sonar do submarino francês emite um sinal de  $1000 \text{ Hz}$ , pergunta-se:
- (a) Qual é a frequência do sinal detectado pelo submarino americano ?
  - (b) Qual é a frequência do sinal refletido pelo submarino americano, detectado pelo submarino francês ?
- ⑥ Um avião a jato supersônico está voando a Mach 2 (o dobro da velocidade do som).
- (a) Qual é o ângulo de abertura do cone de Mach?
  - (b)  $2,5 \text{ s}$  depois do avião ter passado diretamente acima de uma casa, a onda de choque causada pela sua passagem atinge a casa, provocando um estrondo sônico. A velocidade do som no ar é de  $340 \text{ m/s}$ . Qual é a altitude do avião em relação à casa?

⑦ **Equação de Onda da Corda Vibrante com gravidade.** Considere a equação da corda vibrante que derivamos em aula. Agora vamos assumir que exista além da tensão  $T$  na corda um campo gravitacional atuando no sistema.

- (a) Usando como modelo o que fizemos em aula, derive a equação de onda abaixo para uma corda homogênea de densidade  $\mu$  e comprimento  $L$  em um campo gravitacional constante:

$$\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} A(x, t) = T \frac{\partial^2}{\partial x^2} A(x, t) - \mu g.$$

- (b) Considere a corda na presença da gravidade estando em repouso. Dadas as condições de contorno,

$$A(x = 0, t), \quad A(x = L, t) = 0,$$

encontre  $A(x)$ , a função que descreve a amplitude da corda em função do ponto  $x$ . Qual a solução geral para o problema?

- (c) A Fig. 1 descreve o sistema do item (b) em repouso. Determine o valor de  $\theta$  em termos dos parâmetros do sistema. **Dica:** Você deve primeiro determinar a relação entre o gradiente da corda e o ângulo  $\theta$ .

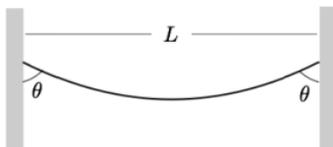


Figura 1: Corda em campo gravitacional.

⑧ **Ondas gravitacionais.** Ondas gravitacionais são oscilações na geometria do espaço-tempo que se propagam à velocidade da luz, e são previstas em todas as teorias modernas de gravitação – em particular, a teoria da Relatividade Geral de Einstein. Uma onda gravitacional pode ser visualizada como uma onda de deformações, que estica e comprime as coisas à medida que ela se propaga. A Fig. 2 mostra como uma onda gravitacional de comprimento  $\lambda$  e período  $T$ , se propagando na direção  $z$ , deformaria objetos (no caso círculos). Na parte superior vemos o padrão de deformação de vários objetos num determinado instante ( $t = 0$ ), com a onda ora esticando as coisas na direção  $x$  e comprimindo na direção  $y$ , ora esticando na direção  $y$  e comprimindo na direção  $x$ . Na figura também mostramos como um objeto numa determinada posição ( $z = 0$ ) é deformado numa e depois noutra direção, à medida que a onda passa por ele. Em 2015 o detector LIGO (Laser Interferometry Gravitational-wave Observatory) observou pela primeira vez essa assinatura de deformações que é gerada quando uma onda gravitacional passa pela Terra. Aquela detecção é consistente com a órbita e subsequente colisão de dois buracos negros com massa dezenas de vezes maiores que a massa do Sol. Na Fig. 3 mostramos um diagrama que representa os dois eixos do LIGO, ao longo dos quais medimos essas deformações. Você deve imaginar que esse detector está posicionado paralelo a um dos círculos da Fig. 2. Agora vamos examinar algumas das características do sinal detectado pelo LIGO, respondendo as questões abaixo:

- (a) Sabendo que a velocidade da luz no vácuo é  $c = 300.000$  km/s, e que a frequência da onda gravitacional é da ordem de 100 Hz, estime o tamanho do sistema físico que emitiu essa onda gravitacional.
- (b) A deformação causada pela onda gravitacional detectada pelo LIGO corresponde a um “estica” e “puxa” por um fator de uma parte em  $10^{20}$ . Calcule a precisão na distância dos braços do instrumento, que o LIGO precisa ser capaz de medir para poder detectar essa onda. Compare essa distância com alguma outra escala de comprimento que você encontra na Física.
- (c) Em 2017 o LIGO detectou uma onda gravitacional (GW170817) muito particular, que seria consistente com a órbita e colisão de duas estrelas de nêutrons (estrelas super-compactas no limiar de

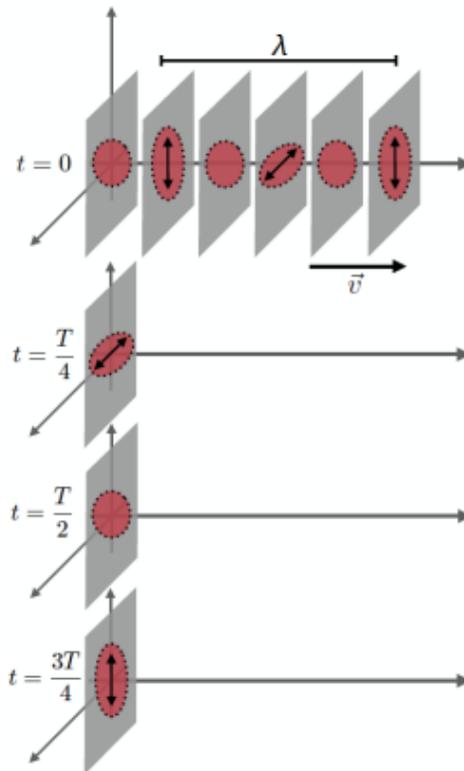


Figura 2: Deformações produzidas por uma onda gravitacional.

se tornarem buracos negros). Quase ao mesmo tempo, o satélite Fermi-LAT detectou um jato de raios-gama vindo aproximadamente da mesma direção. Essa coincidência permitiu que astrônomos apontassem seus telescópios naquela direção e encontrassem evidências de algo chamado Kilonova – justamente, o que se espera resultar da colisão de duas estrelas de nêutrons. Além de determinar exatamente onde esse evento ocorreu, essa observação permitiu determinar com grande precisão a velocidade de propagação das ondas gravitacionais. Sabendo que o intervalo de tempo entre o jato de raios-gama e o último “suspiro” da onda gravitacional chegar no LIGO é de menos de 1 s, e que a distância até a galáxia onde ocorreu essa colisão é de 130 milhões de anos-luz, encontre a precisão com que podemos dizer que a velocidade das

ondas gravitacionais é igual à velocidade da luz.

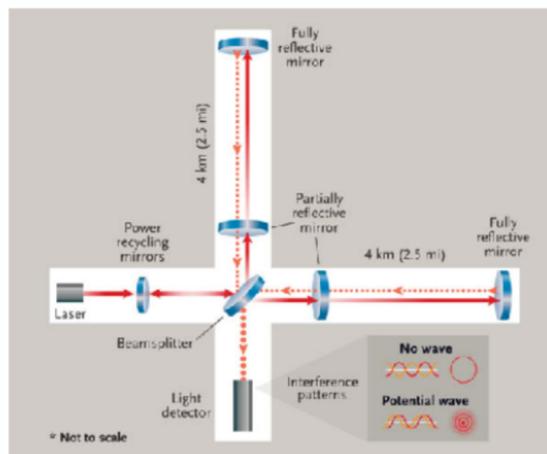


Figura 3: Experimento LIGO.