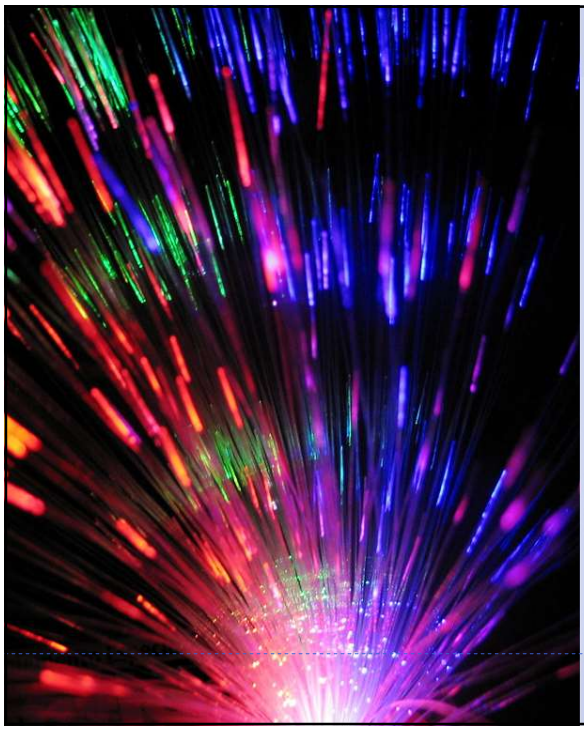


Guias de Ondas 1

Eletromagnetismo II (4302304)

Prof. *Ricardo A. Terini*

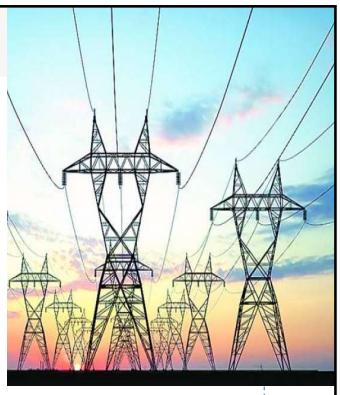
E-mail: rterini@if.usp.br

Bloco F – Conjunto Alessandro Volta – sl. 105

LDRFM – IF-USP

1

Guias de onda. Linhas de transmissão

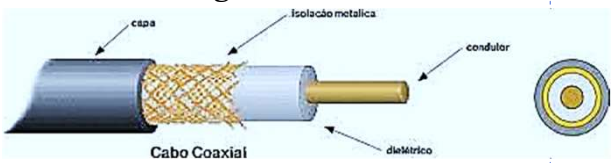


- Problema técnico: Como conectar dois objetos, e transmitir energia eletromagnética entre eles?
- Em circuitos de baixa frequência, a ligação é com **fios**, mas este método não funciona muito bem a altas frequências: os circuitos irradiam energia em todo o espaço em volta. Os campos e a energia se espalham para longe dos fios.
- Uma solução: **Linhas de transmissão**: A linha de transmissão de energia comum, que segue de torre em torre no interior do país, irradia uma parte da sua energia, mas as frequências são tão baixas (50-60 Hz) que a perda não é considerável.
- Para frequências de alguns kHz, a radiação já pode ser mais importante. Porém, ela pode ser reduzida usando linhas de transmissão de "*par torcido*", como é feito em conexões telefônicas de curta distância.

2

Guias de onda. Linhas de transmissão

- A frequências mais altas, entretanto, a perdas de energia por radiação se torna intolerável, e porque a energia pode aparecer em outro circuito onde não era esperada.
- Para frequências de kHz até centenas de MHz, usa-se comumente transmitir a energia e os sinais eletromagnéticos por **cabos coaxiais**, constituídos de um fio no interior de um "condutor externo" ou "blindagem" cilíndrica.
- Num cabo comum, a energia viaja com velocidade ≤ *c*, dependendo do dielétrico e do comprimento do cabo.

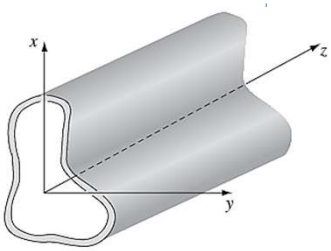


- Sua impedância característica varia de ~50 Ω até algumas centenas de ohms, e o cabo tem capacitância e indutância distribuídas de valores que dependem do material isolante e das suas dimensões.

3

Guias de onda. Ondas confinadas.

- Se o condutor central for removido da linha coaxial, ela ainda poderá conduzir energia eletromagnética. Assim, para frequências suficientemente altas, **um tubo oco funcionará tão bem quanto um com fios**.
- Um cano usado para conduzir as ondas, é denominado um ***guia de ondas***.



- **Fig.:** Supor tubo com paredes perfeitamente *condutoras*.
- As **condições de contorno** dos campos ***E*** e ***B*** dentro do tubo são:
- Meio 1 – vácuo (int.)
- Meio 2 – condutor (paredes)

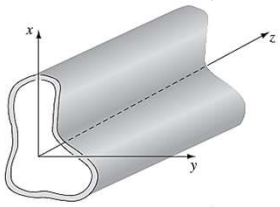
$$\left.\begin{array}{ll} \text{(i)}\ \epsilon_1 E_1^{\perp} - \epsilon_2 \overset{=0}{E_2^{\perp}} = \sigma_f, & \text{(iii)}\ \mathbf{E}_1^{\parallel} - \overset{=0}{\mathbf{E}_2^{\parallel}} = 0, \\ \text{(ii)}\ B_1^{\perp} - \overset{=0}{B_2^{\perp}} = 0, & \text{(iv)}\ \frac{1}{\mu_1}\mathbf{B}_1^{\parallel} - \overset{=0}{\frac{1}{\mu_2}\mathbf{B}_2^{\parallel}} = \mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}}. \end{array}\right\}$$

4

Guias de onda. Ondas confinadas.

- Fazendo os campos $\boldsymbol{E_1} = \boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B_1} = \boldsymbol{B}$ *no interior* do cano:

$$\therefore \quad \left.\begin{array}{ll} \text{(i)} & \mathbf{E}^{\parallel} = \mathbf{0}, \\ \text{(ii)} & B^{\perp} = 0. \end{array}\right\} \quad \text{(desde o princípio)}$$



- Devem surgir cargas e correntes livres na parede interna do ***guia*** por conta das descontinuidades dos campos.
- Queremos determinar as *ondas* que se propagarão *no interior do tubo*. Os campos *EM* podem ter a forma genérica:

$$(I) \quad \widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t) = \widetilde{\boldsymbol{E}}_0(x,y)\, e^{i[kz-\omega\ ]} \quad \text{e}$$

$$(II) \quad \widetilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t) = \widetilde{\boldsymbol{B}}_0(x,y)\, e^{i[kz-\omega t]}$$

- Considerando ~vácuo dentro do guia, esses campos serão soluções das Eqs. (*iii*) e (*iv*) de Maxwell para o vácuo...

$$\text{(iii)} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\text{(iv)} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

5

Guias de onda. Ondas confinadas.

$$(I) \quad \widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t) = \widetilde{\boldsymbol{E}}_0(x,y)\, e^{i[kz-\omega t]} \quad \text{e}$$

$$(II) \quad \widetilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t) = \widetilde{\boldsymbol{B}}_0(x,y)\, e^{i[kz-\omega t]}$$

- Derivando (I) e (II) para substituir nas equações de Maxwell:

$$-\frac{\partial \tilde{\vec{B}}}{\partial t} = i\omega \tilde{\vec{B}} \qquad \frac{\partial \tilde{\vec{E}}}{\partial t} = -i\omega \tilde{\vec{E}}$$

$$\frac{\partial \tilde{\vec{B}}}{\partial z} = ik \tilde{\vec{B}} \qquad \frac{\partial \tilde{\vec{E}}}{\partial z} = ik \tilde{\vec{E}}$$

- Para isso, consideraremos:

$$\tilde{\mathbf{E}}_0 = E_x\,\hat{\mathbf{x}} + E_y\,\hat{\mathbf{y}} + E_z\,\hat{\mathbf{z}},$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_0 = B_x\,\hat{\mathbf{x}} + B_y\,\hat{\mathbf{y}} + B_z\,\hat{\mathbf{z}},$$

- Assim, já obtemos:
- Podemos resolver as equações (ii), (iii), (v) e (vi), obtendo E_x, E_y, B_x e B_y ...

$$\left.\begin{array}{llll} \text{(i)} & \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} = i\omega B_z, & \text{(iv)} & \dfrac{\partial B_y}{\partial x} - \dfrac{\partial B_x}{\partial y} = -\dfrac{i\omega}{c^2}E_z, \\ \text{(ii)} & \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - ikE_y = i\omega B_x, & \text{(v)} & \dfrac{\partial B_z}{\partial y} - ikB_y = -\dfrac{i\omega}{c^2}E_x, \\ \text{(iii)} & ikE_x - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} = i\omega B_y, & \text{(vi)} & ikB_x - \dfrac{\partial B_z}{\partial x} = -\dfrac{i\omega}{c^2}E_y. \end{array}\right\}$$

6

Guias de onda. Ondas confinadas.

- Assim, obteremos:
- Essas componentes dependem das derivadas das componentes longitudinais E_z e B_z.
- Então, introduzindo E_x, E_y, B_x, B_y, nas expressões de $\tilde{\mathbf{E}}_0$ e $\tilde{\mathbf{B}}_0$, e aplicando as eqs. (i) e (ii) de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

- Conseguimos, assim, desacoplar os campos e obtemos:
- **Equações de Helmholtz**

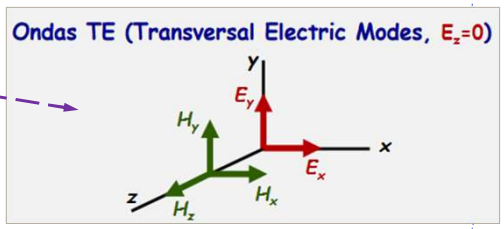
$$\left.\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad E_x = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2}\left(k\frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\frac{\partial B_z}{\partial y}\right),\\
&\text{(ii)} \quad E_y = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2}\left(k\frac{\partial E_z}{\partial y} - \omega\frac{\partial B_z}{\partial x}\right),\\
&\text{(iii)} \quad B_x = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2}\left(k\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\omega}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}\right),\\
&\text{(iv)} \quad B_y = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2}\left(k\frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\omega}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}\right).
\end{aligned}\right\}$$

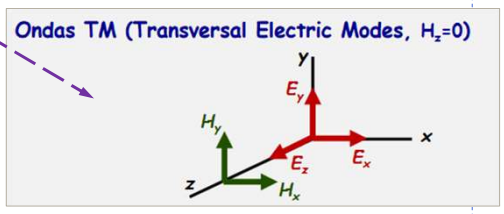
$$\left.\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad \left[\nabla_\perp^2 + (\omega/c)^2 - k^2\right] E_z = 0,\\
&\text{(ii)} \quad \left[\nabla_\perp^2 + (\omega/c)^2 - k^2\right] B_z = 0.
\end{aligned}\right\}$$

Guias de onda. Ondas confinadas.

$$\left.\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\omega/c)^2 - k^2\right] E_z = 0,\\
&\text{(ii)} \quad \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\omega/c)^2 - k^2\right] B_z = 0.
\end{aligned}\right\}$$

- Classificação dos *modos*:
- Se $E_z = 0$ e $B_z \neq 0$: ondas TE ("transversais elétricas");
- se $B_z = 0$ e $E_z \neq 0$, ondas TM ("magnéticas transversais");
- se $E_z = 0$ e $B_z = 0$, ondas TEM;
- Se $E_z \neq 0$ e $B_z \neq 0$: modo híbrido.
- Ondas TEM não podem ocorrer em um guia de onda oco, porque as expressões das outras componentes dos campos ficam indeterminadas. (*demonstrar!*)





Guias de onda. Ondas confinadas.

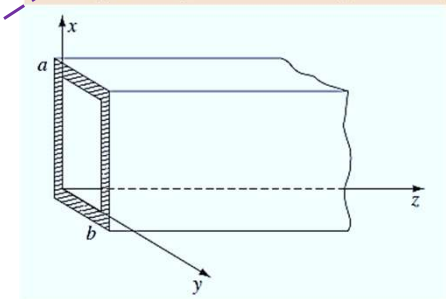
- Exemplos: (guias p/ microondas)

9

Guias de onda. Guia retangular.

$$\text{(i)} \quad \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\omega/c)^2 - k^2\right] E_z = 0,$$

$$\text{(ii)} \quad \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\omega/c)^2 - k^2\right] B_z = 0.$$



- Vamos determinar as ondas nesse caso usando separação de variáveis. Seja:

$$B_z(x, y) = X(x)Y(y),$$

- Aplicando na eq. (*ii*):

$$\therefore \; Y\frac{d^2X}{dx^2} + X\frac{d^2Y}{dy^2} + \left[(\omega/c)^2 - k^2\right] XY = 0.$$

- Dividindo por XY e considerando que os primeiros termos são constantes:

$$\text{(i)} \; \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -k_x^2, \quad \text{(ii)} \; \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -k_y^2$$

- Assim: $-k_x^2 - k_y^2 + (\omega/c)^2 - k^2 = 0.$

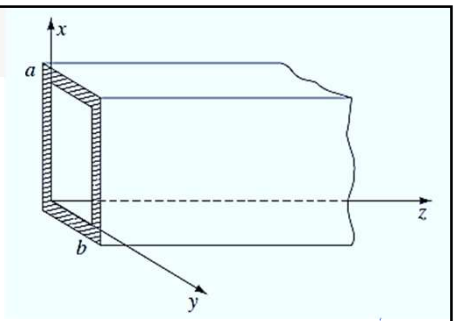
- Supondo soluções gerais do tipo:

$$X(x) = A\sin(k_x x) + B\cos(k_x x)$$

- ...E, como... : (ii) $B^{\perp} = 0.$ (nas paredes)
- Então, a componente B_x do campo deve se anular em $x = 0$ e $x = a$, e B_y, em $y = 0$ e $y = b$. E $A = 0$.

10

Guias de onda. Guia retangular.



- Isso deverá acontecer se:

$$k_x = m\pi/a, \quad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

- e

$$k_y = n\pi/b, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

- Assim, resta que:

$$B_z = B_0 \cos(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b)$$

- E $\therefore$ $\cancel{\mathbf{B}_0 = B_z \hat{\mathbf{z}}}$ **Modo TE_{mn}**

(***m*** ou ***n*** deve ser não-nulo) (idem p/ $\mathbf{E}_0$)

- Substituindo k_x e k_y na expressão...

$$-k_x^2 - k_y^2 + (\omega/c)^2 - k^2 = 0.$$

- ... Encontramos o *nº. de* onda:

$$k = \sqrt{(\omega/c)^2 - \pi^2[(m/a)^2 + (n/b)^2]}.$$

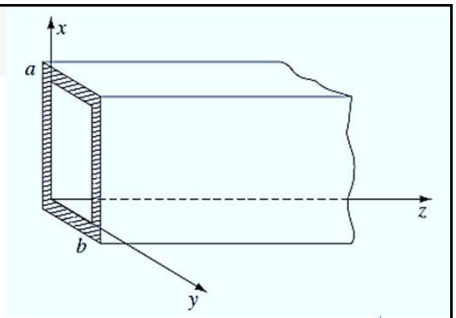
- E se :

$$\omega < c\pi\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2} \equiv \omega_{mn},$$

- ... Então k será *imaginário*, e a onda será **atenuada** exponencialmente.

11

Guias de onda. Guia retangular.



- ω_{mn} é chamada então de **frequência de corte** desse modo TE.
- A menor frequência de corte ocorrerá, então, para o modo TE_{10}, sendo:
- (sendo $a > b$) $\omega_{10} = c\pi/a.$
- Ondas com freq. menor que ela não se propagarão no guia.
- O nº. de onda pode ser simplificado:

$$\therefore \quad k = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_{mn}^2}.$$

- E a *velocidade de fase* da onda será:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_{mn}/\omega)^2}}, \quad (> \mathbf{c})!$$

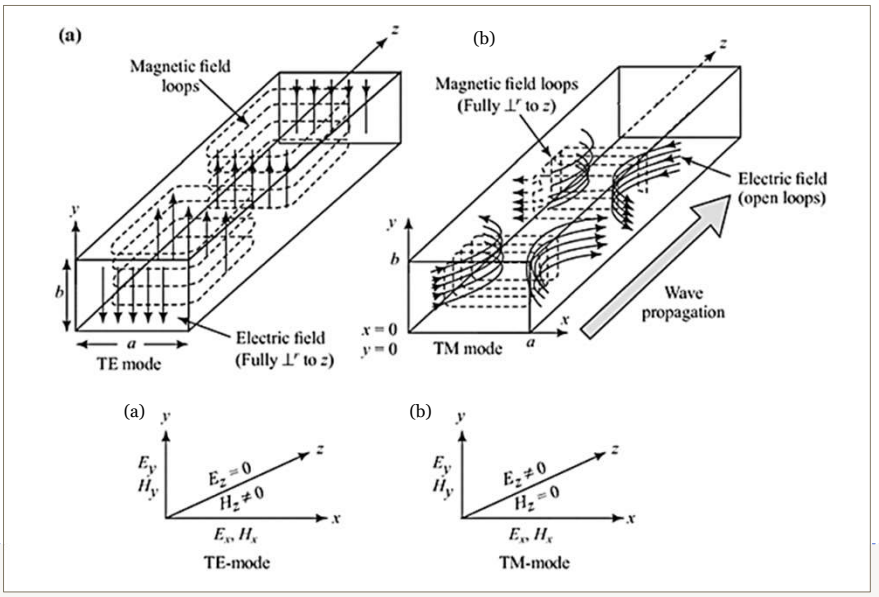
- ... E a *velocidade de grupo da* onda:

$$v_g = \frac{1}{dk/d\omega} = c\sqrt{1 - (\omega_{mn}/\omega)^2} \quad (< \mathbf{c})$$

12

Guias de onda. Guia retangular.

- *Modos*
- (a) *TE*
- (b) *TM*



13