Eletromagnetismo

4300372

F.S. Navarra

navarra@if.usp.br

Guilherme Germano (monitor)

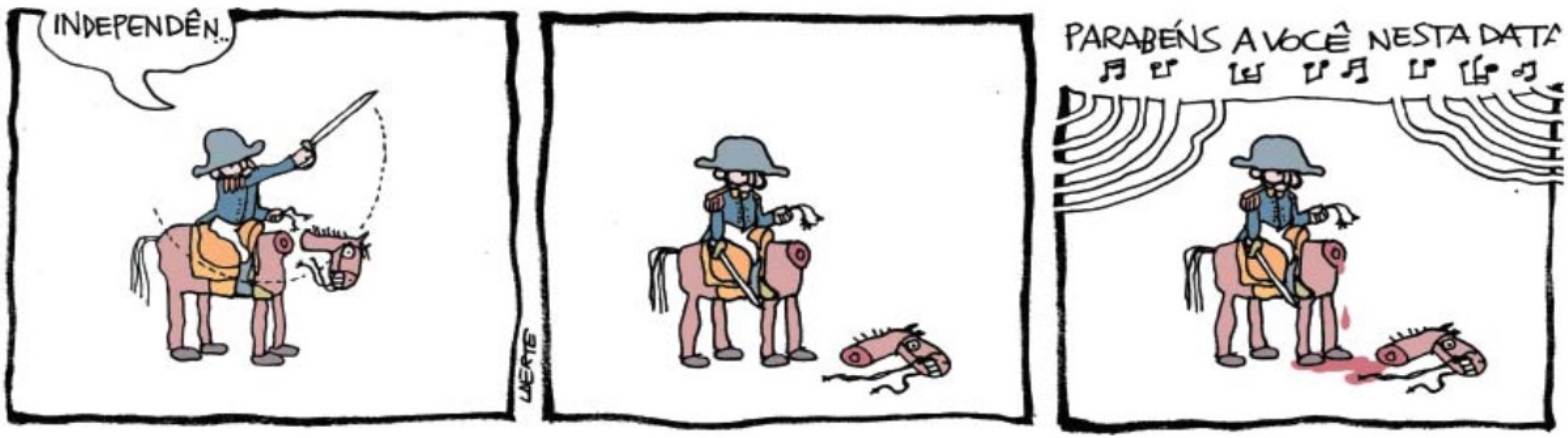
guilherme.germano@usp.br

edisciplinas.if.usp.br

Plano do Curso

16/08	13/09	11/10	08/11
19/08	16/09	14/10	11/11
23/08	20/09 P1	18/10	15/11
26/08	23/09	21/10 P2	18/11
30/08	27/09	25/10	22/11
02/09	30/09	28/10	25/11
06/09	04/10	01/11	29/11 P3
09/09	07/10	04/11	02/12 ex
			06/12 Sub

Aula 6



Laerte

O potencial eletrostático

$$\boxed{V(\mathbf{r}) \equiv -\int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}$$

A escolha mais comum do ponto de referência :

$$\boxed{V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E} \,.\, d\vec{l}}$$

A diferença de potencial não depende do ponto de referência :

$$\boxed{V(b) - V(a) = -\int_{a}^{b} \vec{E} \,.\, d\vec{l}}$$

Lei de Gauss

Forma intergal

$$\boxed{\boxed{\oint_A \vec{E}\,.\,\hat{n}\,da = \oint_A \vec{E}\,.\,d\vec{a} = \frac{Q_e}{\epsilon_0}}}$$

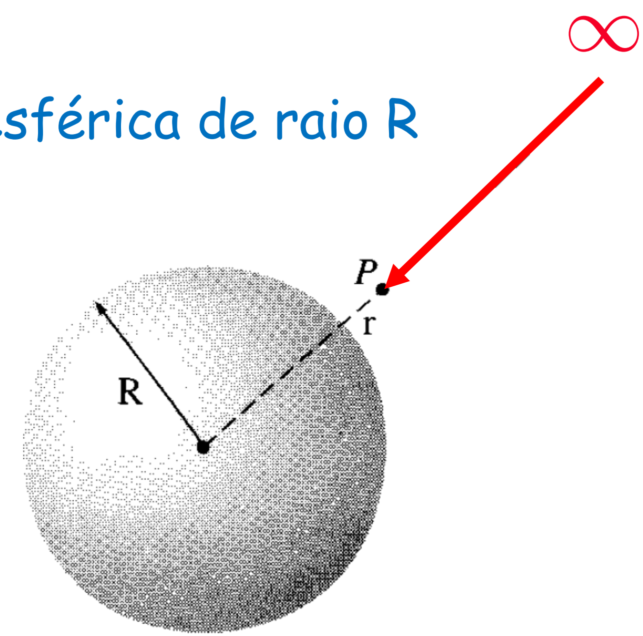
Forma diferencial

$$\boxed{\vec{\nabla}\,.\,\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

$$\rho = \epsilon_0\,\vec{\nabla}\,.\,\vec{E}$$

Exemplo 2.6

Calcule o potencial dentro e fora de uma casca esférica de raio R com carga q uniformemente distribuída.



a) Fora da casca (r>R):

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E} \, . \, d\vec{l}$$

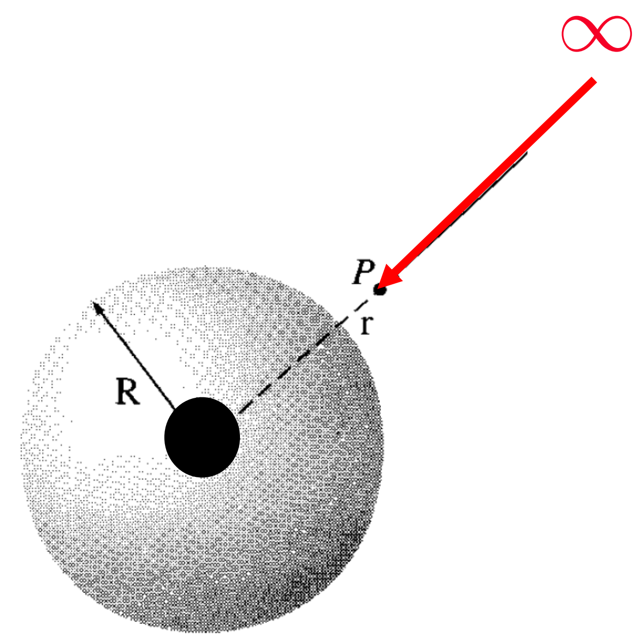
$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

$$d\mathbf{l} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr$$

$$V(r) = -\int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{r} \frac{q}{r'^2} \, dr' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'} \bigg|_{\infty}^{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}.$$

Calcule o potencial criado por uma carga q puntiforme a uma distância r da carga



$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}\,.\,d\vec{l}$$

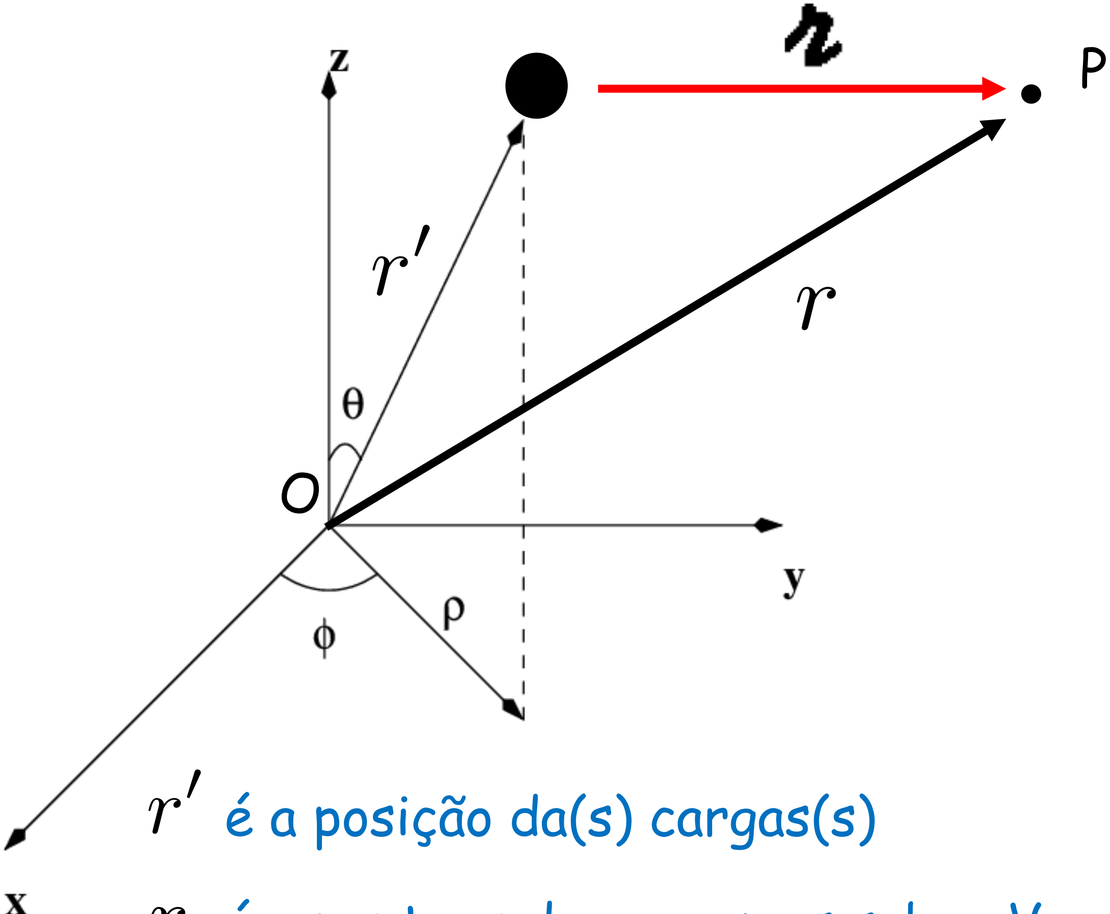
$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

$$d\mathbf{l} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}dr$$

$$V(r) = -\int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\infty}^{r}\frac{q}{r'^2}\,dr' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r'}\bigg|_{\infty}^{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}.$$

Se a carga não estiver na origem das coordenadas:

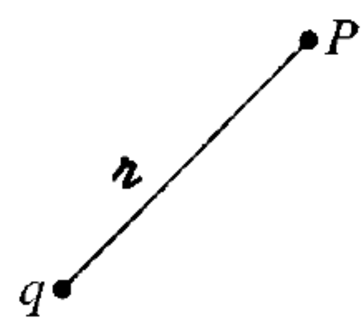


antes:

$$V(r) = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\,\frac{q}{r}$$

agora:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{\mathscr{r}}$$



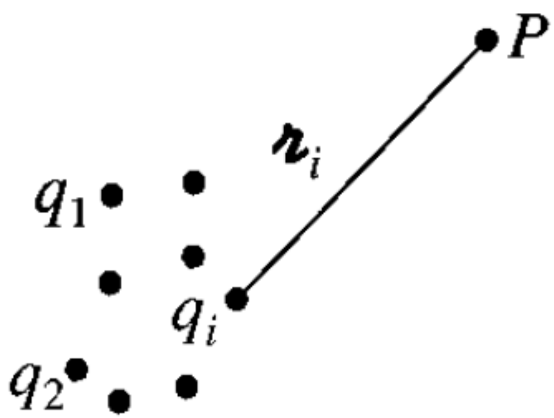
r' é a posição da(s) cargas(s)

r é o ponto onde queremos saber V

$\mathscr{r}$ é a distância entre a carga q e o ponto P

(a distância que "interessa"!)

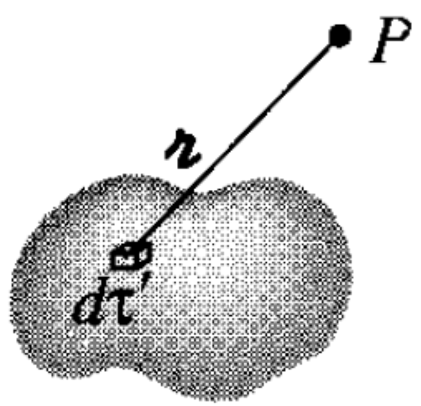
Se tivermos n cargas



$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{\mathscr{r}_i}$$

Se tivermos uma distribuição contínua de cargas

dq



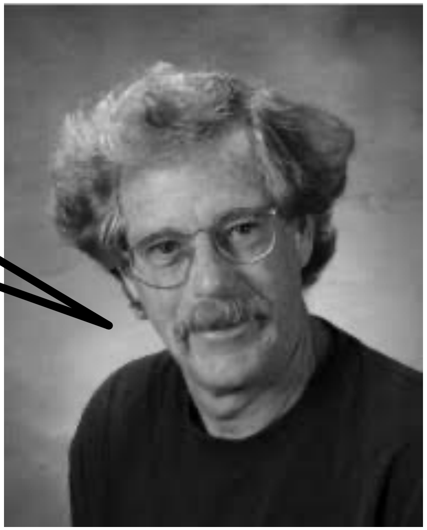
$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{1}{\mathscr{r}}dq$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\mathscr{r}}\,d\tau'$$

Obs: ponto de referência no infinito !

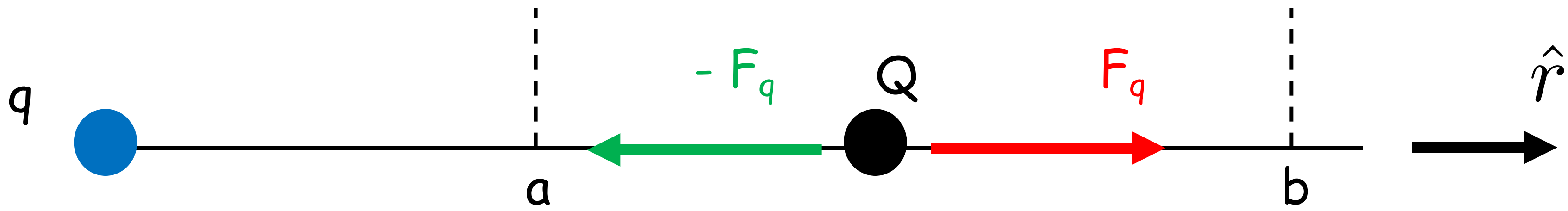
Potencial e energia potencial

Isto "melhorar" nossa compreensão do significado do potencial !



Griffiths

Trabalho e energia



Força que q faz em Q : $\vec{F}_q = Q\,\vec{E}$ $\qquad \vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{r^2}\hat{r}$

Trabalho de F_q quando Q vai de a para b: $\qquad W = \int_a^b \vec{F}_q \,.\, d\vec{l}$

Agente externo que faz força - F_q

Trabalho do agente (-F_q) quando Q vai de a para b:

$$W = -\int_a^b \vec{F}_q \,.\, d\vec{l}$$

$$W = -Q\int_a^b \vec{E} \,.\, d\vec{l}$$

$$W = -Q \int_a^b \vec{E} \, . \, d\vec{l}$$

Lembrando que $$V(b) - V(a) = -\int_a^b \vec{E} \, . \, d\vec{l}$$

$$W = Q \, [\, V(b) - V(a) \,]$$

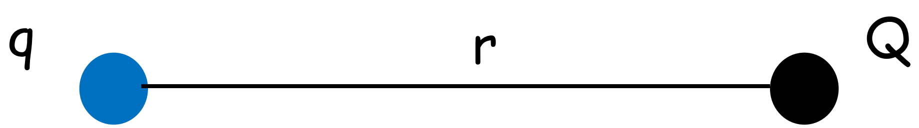
Se o ponto de partida for o infinito : $a \rightarrow \infty$

Se o ponto de chegada for r

$$W = Q \, [\, V(r) - V(\infty) \,]$$

Como $V(\infty) = 0$ $\longrightarrow$ $W = Q \, V(r)$

Potencial : energia por unidade de carga necessária para criar o sistema

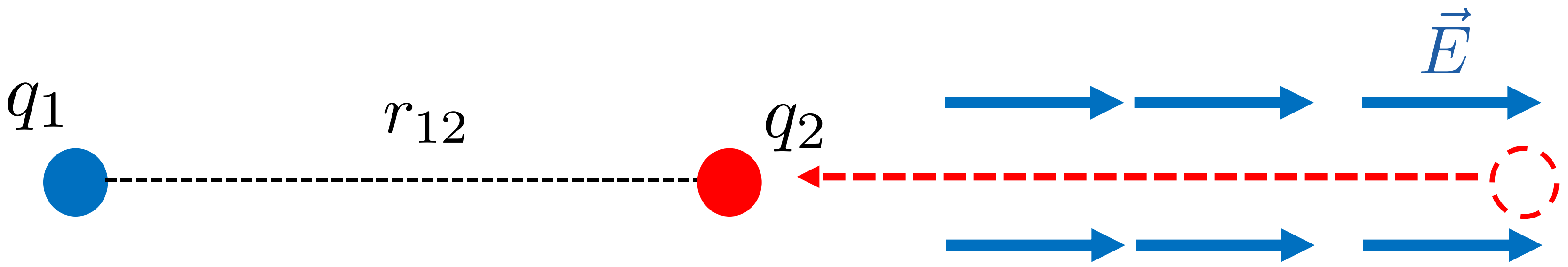


Energia para "montar"um sistema de duas cargas positivas

Vamos trazendo uma por uma do infinito

A primeira , q_1 , "não dá trabalho" porque o ambiente está vazio

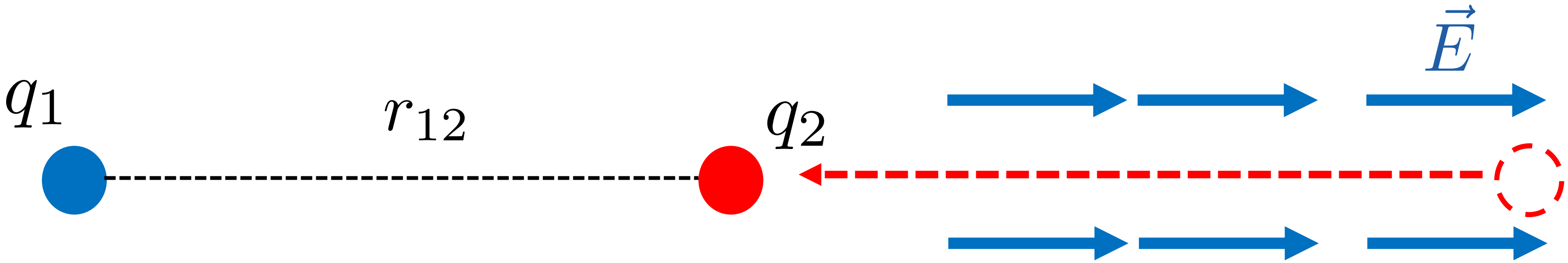
Para trazer a segunda, q_2 , temos que fazer trabalho contra o campo de q_1



$$W = q_2 V(r_{12})$$

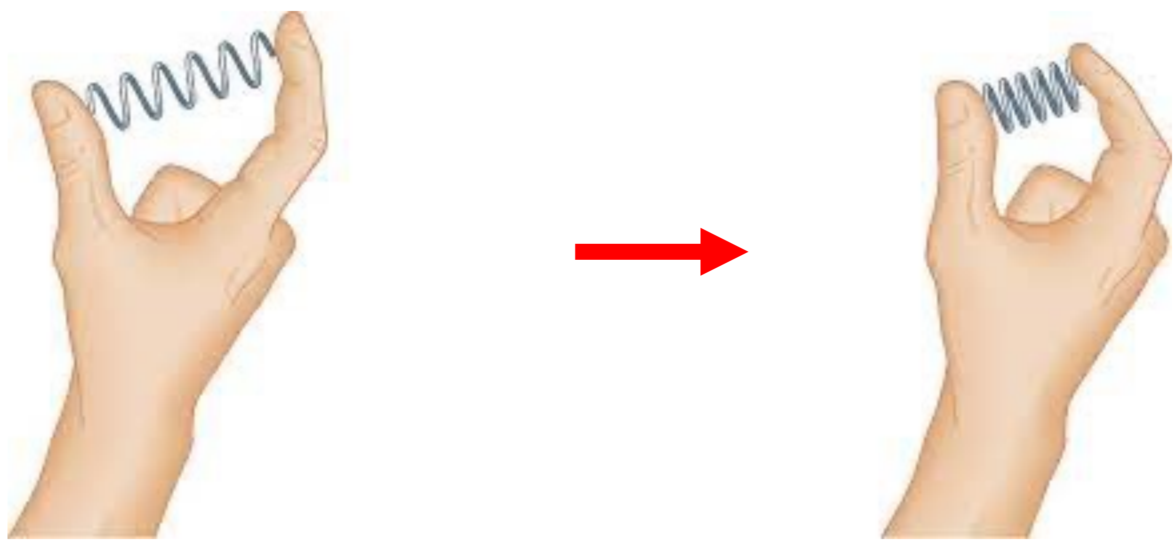
$$W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_2 \left(\frac{q_1}{r_{12}} \right)$$

Energia para “montar”um sistema de duas cargas positivas

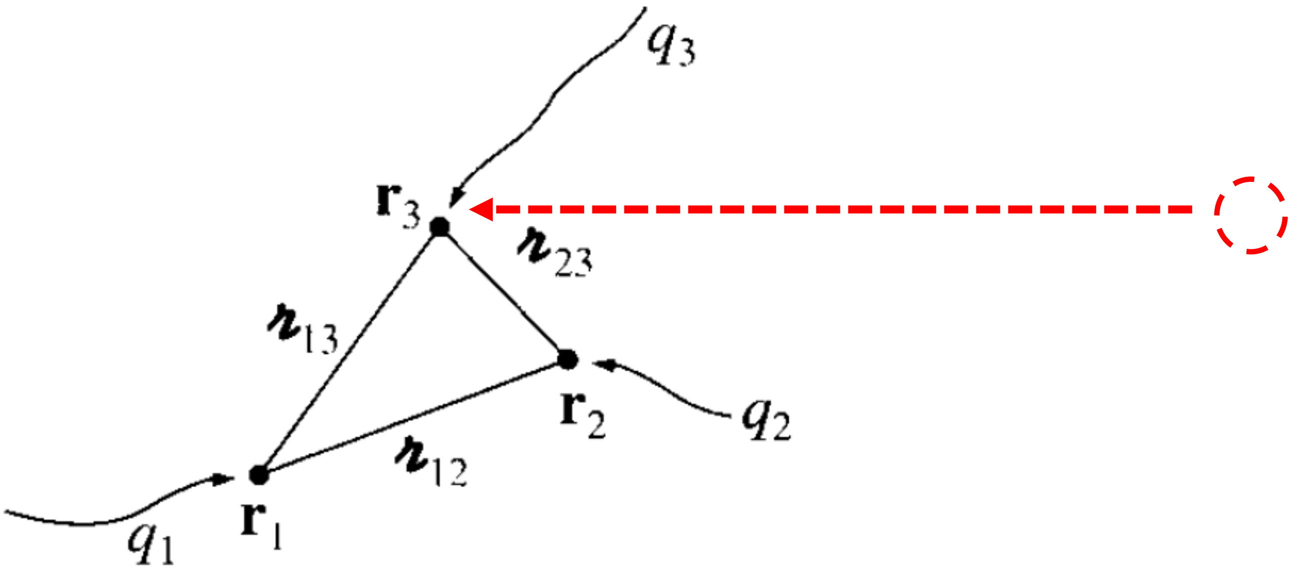


$$W = q_2 \, V(r_{12})$$

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_2 \left(\frac{q_1}{r_{12}} \right)$$



Para trazer a terceira carga, temos que fazer trabalho contra os campos das duas primeiras cargas.



Para vencer o campo da carga 1: $$W = q_3 V(r_{13}) = q_3 \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r_{13}}$$

Para vencer o campo da carga 2: $$W = q_3 V(r_{23}) = q_3 \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{r_{23}}$$

Trabalho total para trazer a carga 3: $$W = \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}}\right)$$

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_2 \left(\frac{q_1}{\mathscr{r}_{12}} \right) \qquad W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_3 \left(\frac{q_1}{\mathscr{r}_{13}} + \frac{q_2}{\mathscr{r}_{23}} \right)$$

Trabalho para trazer a quarta carga:

$$W_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_4 \left(\frac{q_1}{\mathscr{r}_{14}} + \frac{q_2}{\mathscr{r}_{24}} + \frac{q_3}{\mathscr{r}_{34}} \right)$$

Trabalho total para aproximar as 4 cargas: $W = W_2 + W_3 + W_4$

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{\mathscr{r}_{12}} + \frac{q_1 q_3}{\mathscr{r}_{13}} + \frac{q_1 q_4}{\mathscr{r}_{14}} + \frac{q_2 q_3}{\mathscr{r}_{23}} + \frac{q_2 q_4}{\mathscr{r}_{24}} + \frac{q_3 q_4}{\mathscr{r}_{34}} \right)$$

Se tivermos n partículas: $$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^{n} \frac{q_i q_j}{\mathscr{r}_{ij}}$$

Para não somar duas vezes

Podemos somar duas vezes e depois dividir por dois:

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{q_i q_j}{\mathscr{r}_{ij}}$$

Vamos colocar q_i em evidência:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_j}{\mathscr{r}_{ij}}\right)$$

O termo entre parêntesis é o potencial no ponto r_i onde está a carga q_i

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V(\mathbf{r}_i)$$

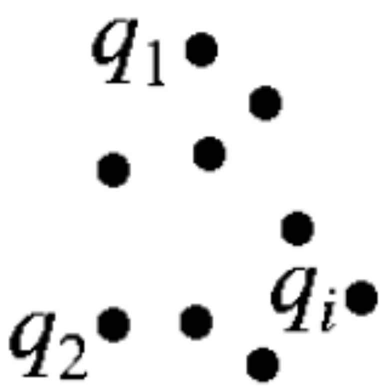
Se tivermos uma distribuição contínua de cargas

$$\sum_i q_i \to \int dq$$

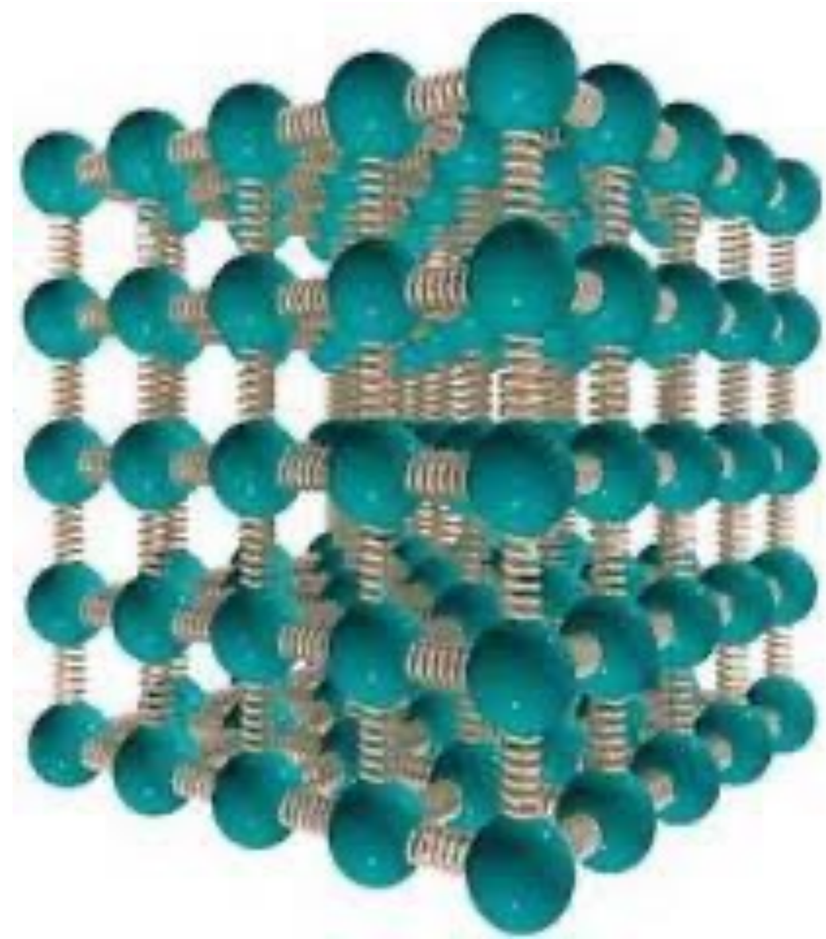
$$\boxed{W = \frac{1}{2}\int \rho V \, d\tau}$$

elemento de volume

Energia Potencial Eletrostática



=



Sistema de cargas positivas

Sistema molas comprimidas

Tão rápido que nem dói ...

$$W = \frac{1}{2}\int \rho V \, d\tau$$

Vamos usar a lei de Gauss na forma diferencial $\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\int (\nabla \cdot \mathbf{E}) V \, d\tau$$

Vamos usar uma fórmula de integração por partes G37

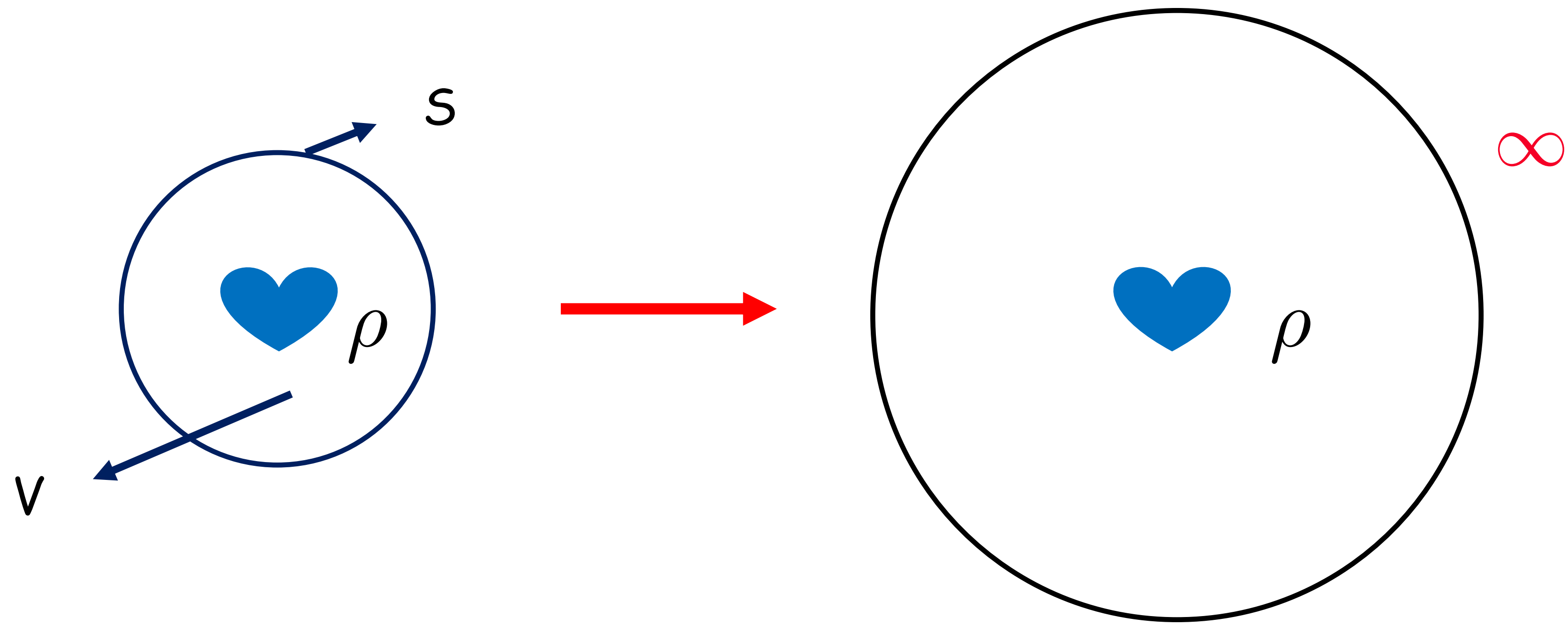
$$\int_{\mathcal{V}} f(\nabla \cdot \mathbf{A})\, d\tau = -\int_{\mathcal{V}} \mathbf{A} \cdot (\nabla f)\, d\tau + \oint_{\mathcal{S}} f\mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}.$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\left[-\int \mathbf{E} \cdot (\nabla V)\, d\tau + \oint V\mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}\right]$$

Vamos usar a relação $\nabla V = -\mathbf{E}$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\left(\int_{\mathcal{V}} E^2 \, d\tau + \oint_{\mathcal{S}} V\mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}\right)$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\left(\int_{\mathcal{V}} E^2\, d\tau + \cancelto{0}{\oint_{\mathcal{S}} V\mathbf{E}\cdot d\mathbf{a}}\right)$$



$$\boxed{\boxed{W = \frac{\epsilon_0}{2}\int_{\text{all space}} E^2\, d\tau}}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$$

Treinamento Funcional

$$\nabla = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla T = \left(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}\right) T$$

gradiente

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

divergente

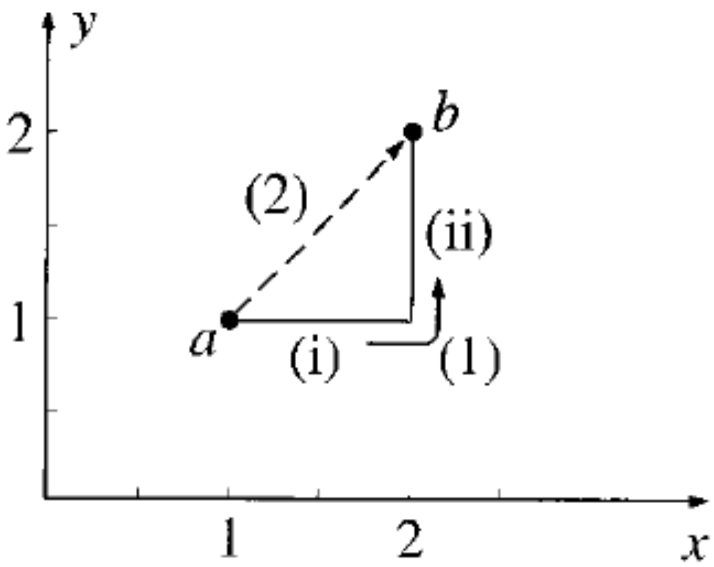
$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{x}}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \hat{\mathbf{y}}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \hat{\mathbf{z}}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

rotacional

Calcule o divergente e o rotacional : $\vec{v} = x^2\, y\, \hat{x} + 3\, x\, \hat{y} + 5\, z\, \hat{z}$

Vamos calcular uma integral de linha

Example 1.6



$$\begin{cases} \mathbf{v} = y^2\,\hat{\mathbf{x}} + 2x(y+1)\,\hat{\mathbf{y}} \\ d\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}. \end{cases}$$

$\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$ = ?

Pelo caminho 1:

(i) $d\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{x}}$, $y = 1$, $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = y^2\,dx = dx$, so $\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 dx = 1$

(ii) $d\mathbf{l} = dy\,\hat{\mathbf{y}}$, $x = 2$, $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 2x(y+1)\,dy = 4(y+1)\,dy$,

$$\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 4\int_1^2 (y+1)\,dy = 10.$$

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 1 + 10 = 11.$$

Pelo caminho 2: $x = y,\ dx = dy$, and $dz = 0$,

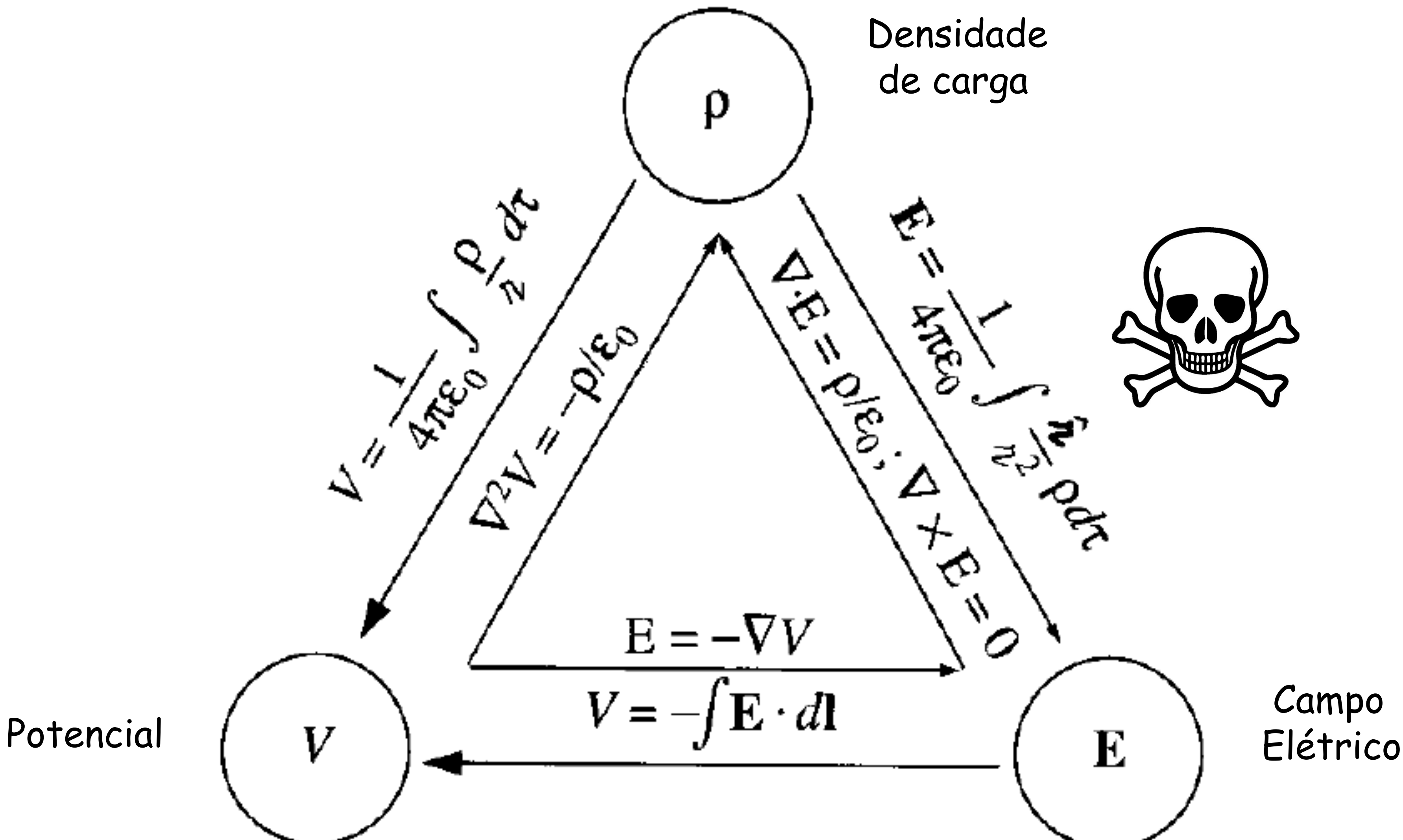
$$\begin{cases} \mathbf{v} = y^2\,\hat{\mathbf{x}} + 2x(y+1)\,\hat{\mathbf{y}} \\ d\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dx\,\hat{\mathbf{y}} \end{cases}$$

$$\mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = x^2\,dx + 2x(x+1)\,dx = (3x^2 + 2x)\,dx,$$

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 (3x^2 + 2x)\,dx = (x^3 + x^2)\Big|_1^2 = 10.$$

FIM

Resumo



Densidade
de carga
ρ
$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho}{r}\,d\tau$
$\nabla^2 V = -\rho/\varepsilon_0$
$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0;\ \nabla \times \mathbf{E} = 0$
$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\rho\,d\tau$
$\mathbf{E} = -\nabla V$
$V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$
Potencial
V
$\mathbf{E}$
Campo
Elétrico