Lista EDOs, exercício 2.

- 1) Use o método de Euler com passo $h = 0,5$ para calcular uma aproximação de $y(1)$ onde $y(t)$ é solução da EDO:

$$(PVI): \begin{cases} y''(t) + t y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 4 \qquad y'(0) = 2 \end{cases}$$

2) Use o método de Euler modificado com passo $h = 0,5$ para calcular uma aproximação de $y(1)$

Resposta:

1) Primeiro vamos transformar o (PVI) de segunda ordem em um (SPVI) de primeira ordem. Definimos

$$\begin{cases} u_1(t) = y(t) \\ u_2(t) = y'(t) \end{cases} \quad e \quad u(t) = (u_1(t), u_2(t))$$

Então

$$\begin{cases} u_1'(t) = y'(t) = u_2(t) \\ u_2'(t) = y''(t) = -ty'(t) - 2y(t) = -tu_2(t) - 2u_1(t) \end{cases}$$

Então temos

$$\begin{cases} u_1'(t) = f_1(t, u_1(t), u_2(t)) = u_2(t) \\ u_2'(t) = f_2(t, u_1(t), u_2(t)) = -tu_2(t) - 2u_1(t) \end{cases}$$

Usando a notação vetorial, podemos escrever o (SPVI) como

$$(\text{SPVI})\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(0) = \alpha \end{cases}$$

com $f(t,u) = \begin{pmatrix} u_2 \\ -tu_2 - 2u_1 \end{pmatrix}$ e $\alpha = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

observe que f é uma função vetorial!

- Agora vamos aplicar o método de Euler. Queremos obter uma aproximação de $y(1)$ com passo $h = 0,5$. Então precisamos calcular dois passos $w^{(1)}$ e $w^{(2)}$ do método de Euler e teremos $w^{(2)} \simeq u(1)$, e $u(1) = \begin{pmatrix} y(1) \\ y'(1) \end{pmatrix}$ então $y(1) \simeq w_1^{(2)}$, onde w é aproximação de u usando o método de Euler.

<u>Euler:</u> $\begin{cases} w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i) \\ w_0 = \alpha \end{cases}$

Aqui <u>w_i é um vetor!</u>

<u>1^a iteração:</u>

$$w_1 = w_0 + hf(t_0, w_0) = \alpha + h\begin{pmatrix} w_{0,2} \\ -t_0 w_{0,2} - 2w_{0,1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \cdot 4 \end{pmatrix} \text{ pois } \underline{t_0 = 0}$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 4 + \frac{1}{2} \cdot 2 \\ 2 - \frac{1}{2} \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2ª iteração:

$$w_2 = w_1 + h f(t_1, w_1)$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} w_{1,2} \\ -t_1 w_{1,2} - 2 w_{1,1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2}(-2) - 2 \cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 - 1 \\ -2 + \frac{1}{2} - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -\frac{13}{2} \end{pmatrix}$$

então $\boxed{y(1) \simeq w_{2,1} = 4}$

(cuidado, aqui $w_{2,1}$ é a primeira componente de w_2, e w_2 é a segunda iteração)

2) Agora vamos aplicar o método de Euler modificado

Euler modificado:

$$\begin{cases} w_{i+1} = w_i + h f\left(r_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2} f(r_i, w_i)\right) \\ w_0 = \alpha \end{cases}$$

1ª iteração:

$$w_1 = w_0 + h f\left(r_0 + \frac{h}{2}, w_0 + \frac{h}{2} f(r_0, w_0)\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left[w_{0,2} + \frac{h}{2} f_2(r_0, w_0)\right] \\ \left[-\left(r_0 + \frac{h}{2}\right)\left(w_{0,2} + \frac{h}{2} f_2(r_0, w_0)\right) - 2\left(w_{0,1} + \frac{h}{2} f_1(r_0, w_0)\right)\right] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{4}(-2 \cdot 4) \\ -\left(\frac{1}{4}\right) \cdot 0 - 2\left(4 + \frac{1}{4} 2\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2{,}5 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = w_1 + h f\left(r_1 + \frac{h}{2}, w_1 + \frac{h}{2} f(r_1, w_1)\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ -2{,}5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} w_{1,2} + \frac{h}{2} f_2(r_1, w_1) \\ -\left(r_1 + \frac{h}{2}\right)\left(w_{1,2} + \frac{h}{2} f_2(r_1, w_1)\right) - 2\left(w_{1,1} + \frac{h}{2} f_1(r_1, w_1)\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ -2{,}5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \underbrace{-2{,}5 + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}(-2{,}5) - 2 \cdot 4\right)} \\ -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)\underbrace{\left(\quad\right)}_{(-4{,}1875)} - 2\left(4 + \frac{1}{4} \cdot (-2{,}5)\right) \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2,5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4,1875 \\ -\frac{3}{4}\left(-4,1875\right) - 2\left(4 - \frac{2,5}{4}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1,90625 \\ -4,3046875 \end{pmatrix}$$

então $y(1) \simeq w_{2,1} = 1,90625$