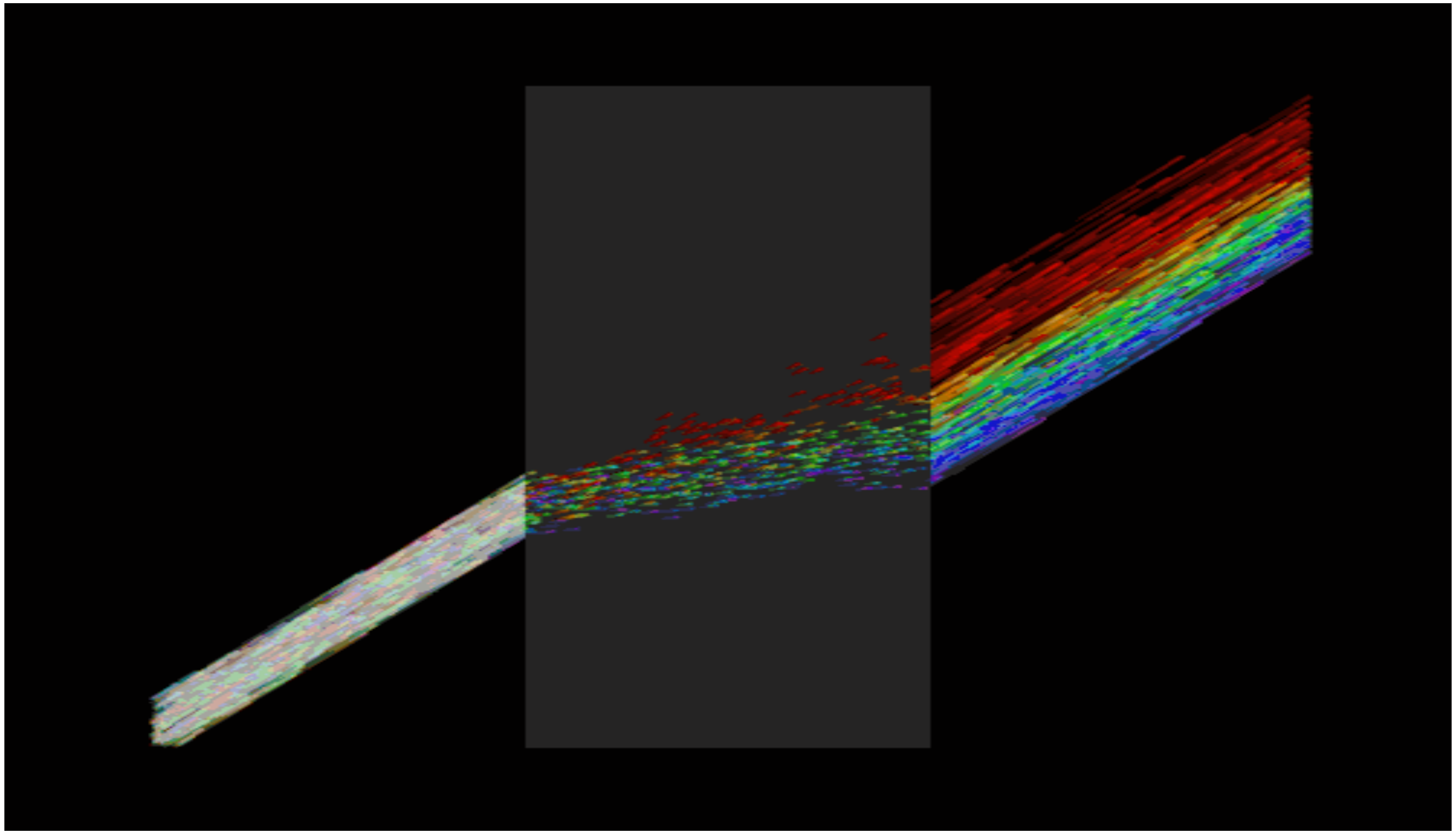


Reflexão, transmissão e refração de ondas

- ⚡ Condições de contorno
- ⚡ Reflexão e transmissão
- ⚡ Leis de Snell e Fresnel
- ⚡ Ângulo de Brewster
- ⚡ Reflexão interna total

Ondas em meios lineares

- Nesta aula vamos discutir o que acontece na seguinte situação: uma onda eletromagnética (vamos assumir que se trata de uma ***onda plana***, ***monocromática***, de polarização linear) se propaga num ***meio linear (1)***, e encontra uma ***interface*** com ***outro meio linear (2)***.
- O que vai acontecer com a onda original, ***incidente***? Uma parte dela pode ser ***refletida***, e uma outra parte pode ser ***transmitida***. Esse fenômeno se chama ***refração de ondas***.
- Vamos repetir aqui alguns dos resultados obtidos nas aulas passadas com relação a ondas eletromagnéticas:

Velocidade de propagação: $$c_s = \frac{1}{\sqrt{\mu\,\epsilon}}$$

Vetor de Poynting: $$\vec{S} = \frac{1}{\mu}\vec{E} \times \vec{B} = \epsilon c_s \vec{E}^2\,\hat{k}$$

Intensidade da onda: $$\langle |\vec{S}|\rangle_t = \frac{1}{2}\epsilon c_s \vec{E}_0^2$$

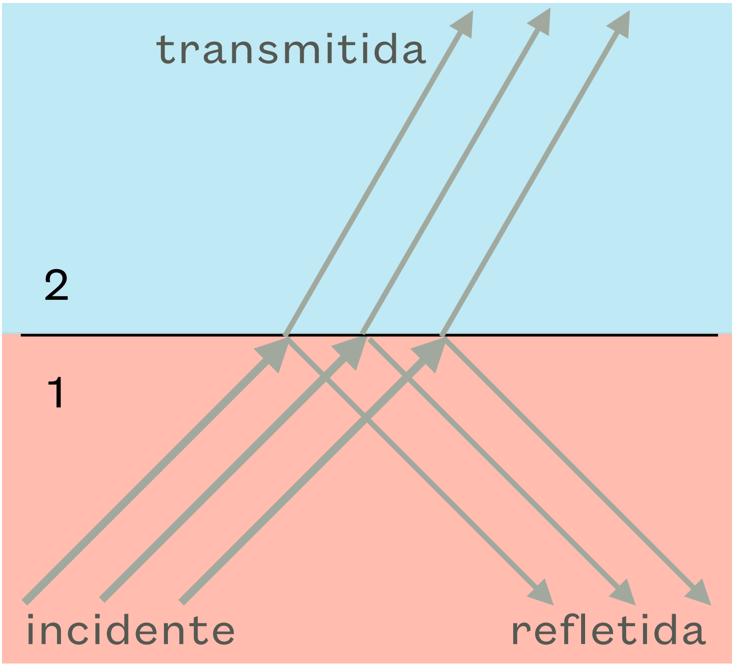
- Veremos que todas as propriedades "óticas" dessas ondas são consequência das ***condições de contorno*** dos campos eletromagnéticos, ou seja:

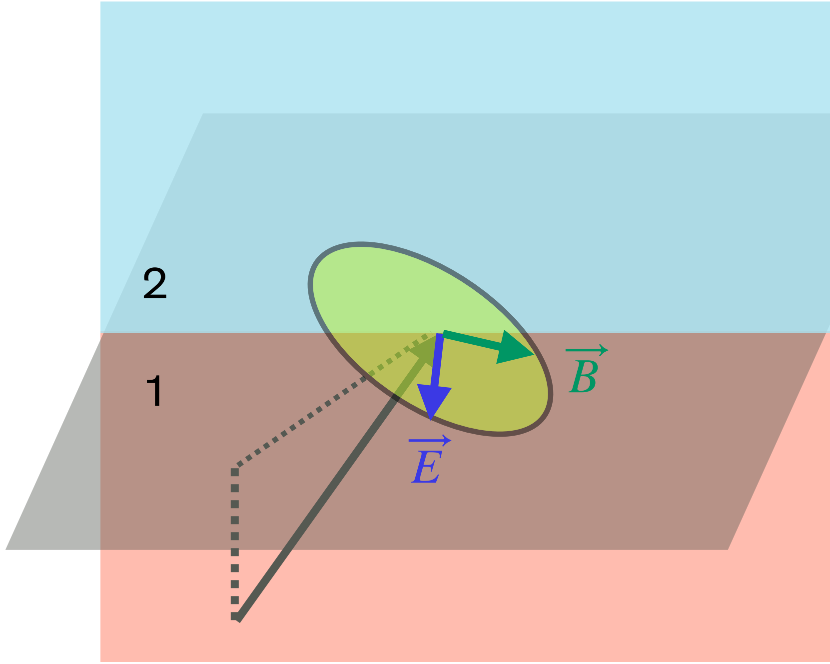
$$\Delta \vec{D}^{\perp} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon_1 \vec{E}_1^{\perp} = \epsilon_2 \vec{E}_2^{\perp}$$

$$\Delta \vec{E}^{||} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{E}_1^{||} = \vec{E}_2^{||}$$

$$\Delta \vec{B}^{\perp} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{B}_1^{\perp} = \vec{B}_2^{\perp}$$

$$\Delta \vec{H}^{||} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\mu_1}\vec{B}_1^{||} = \frac{1}{\mu_2}\vec{B}_2^{||}$$





Ondas em meios lineares

- Vamos expressar a segunda figura acima de um modo mais claro, que nos permita escrever as diferentes componentes.
- Primeiro, vamos girar o sistema de coordenadas de forma que a ***interface*** coincida com o plano $z = 0$.
- No exercício que farei a seguir, vou assumir que o campo elétrico (ou seja, a polarização) da onda incidente não tem nenhuma componente no eixo y — ou seja, as componentes do campo elétrico são apenas nas direções x e z. Isso significa que a ***polarização é paralela ao plano de incidência***, que contém o vetor da propagação da onda incidente e a normal à superfície — ou seja, a tela/slide.
- O campo magnético, por outro lado, não tem componentes nas direções x e z — só em y.
- Vamos então escrever as componentes de todos esses vetores no caso da onda incidente:

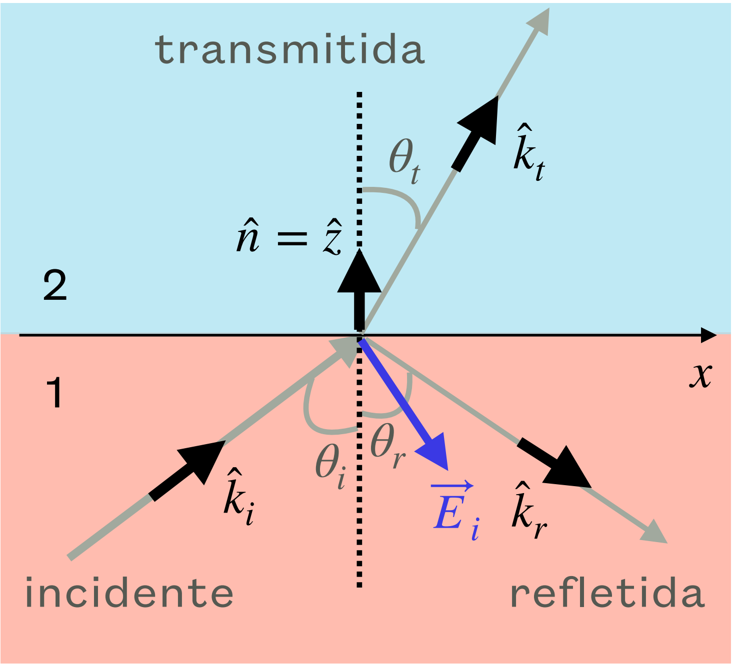
$$\hat{k}_i = \hat{z}\cos\theta_i + \hat{x}\sin\theta_i$$

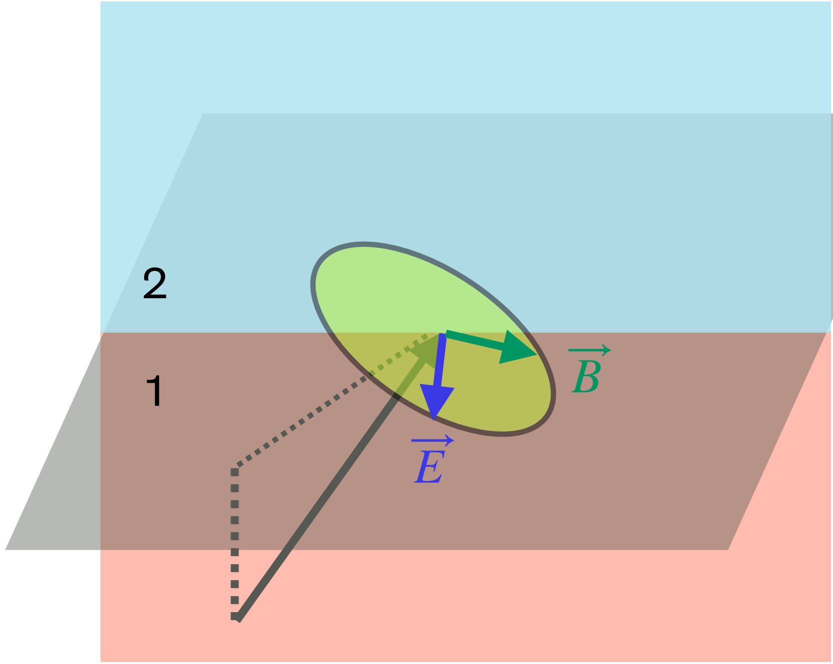
$$\vec{E}_i = E_0(-\hat{z}\sin\theta_i + \hat{x}\cos\theta_i)$$

$$\vec{B}_i = \frac{E_0}{c_i}\hat{y}$$

Portanto, $\hat{k}_i \cdot \vec{E}_i = \hat{k}_i \cdot \vec{B}_i = \vec{B}_i \cdot \vec{E}_i = 0$

- Finalmente, note que na ***região 1*** temos uma ***combinação (soma) da onda incidente e refletida***, enquanto na região 2 temos apenas a onda transmitida.



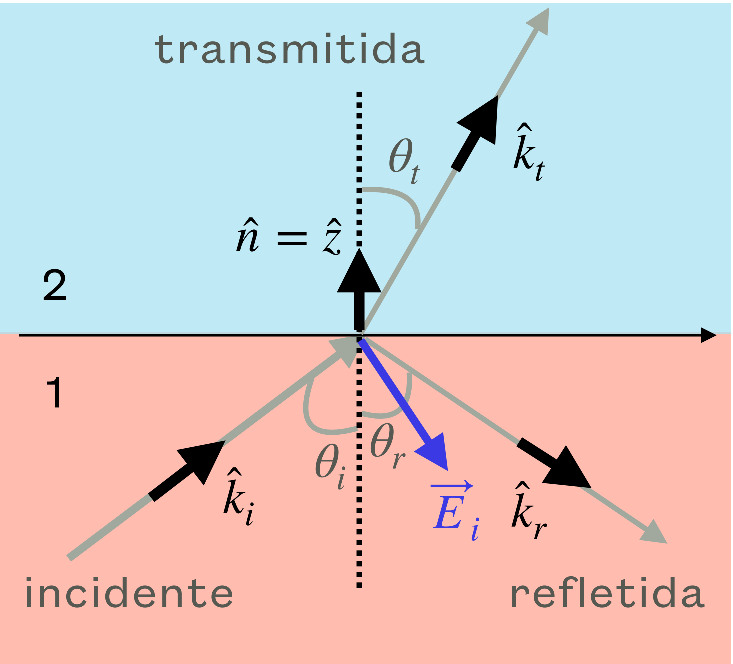


Reflexão e transmissão de ondas: polarização paralela ao plano de incidência

- Note que, do modo que configuramos o sistema de coordenadas, o campo magnético fica na direção y. Claramente, esse campo magnético permanece sempre paralelo à interface: na onda incidente, na onda refletida e na onda transmitida. Ou seja, usando as condições de contorno temos:

$$\vec{B}_1^{\perp} = \vec{B}_2^{\perp} \quad \Rightarrow \quad \vec{B}_i^{\perp} + \vec{B}_r^{\perp} = \vec{B}_t^{\perp} \quad , \quad \text{sendo todos nulos}$$

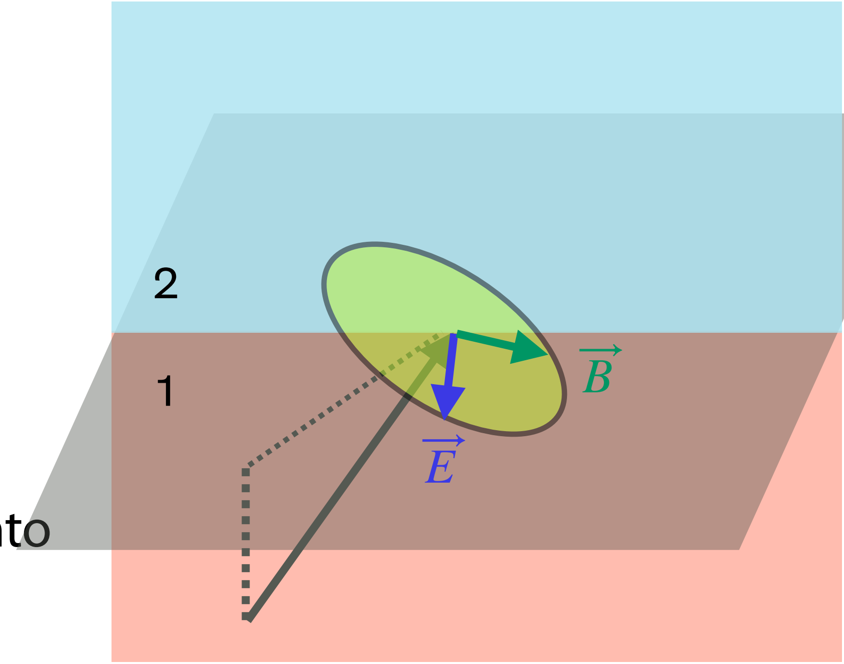
$$\frac{1}{\mu_1}\vec{B}_1^{||} = \frac{1}{\mu_2}\vec{B}_2^{||} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\mu_1}\left(\vec{B}_i^{||} + \vec{B}_r^{||}\right) = \frac{1}{\mu_2}\vec{B}_t^{||}$$



- Para o campo elétrico, temos as componentes paralelas e perpendiculares:

$$\epsilon_1 \vec{E}_1^{\perp} = \epsilon_2 \vec{E}_2^{\perp} \quad \Rightarrow \quad \epsilon_1\left(\vec{E}_i^{\perp} + \vec{E}_r^{\perp}\right) = \epsilon_2 \vec{E}_t^{\perp}$$

$$\vec{E}_1^{||} = \vec{E}_2^{||} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_i^{||} + \vec{E}_r^{||} = \vec{E}_t^{||}$$



- Agora temos que substituir as componentes desses campos nas expressões acima, lembrando que as componentes paralelas à interface são x e y, enquanto a componente perpendicular é na direção z.

Reflexão e transmissão de ondas: polarização paralela ao plano de incidência

- Temos então um monte de equações — mas todas muito simples. Para o campo magnético:

$$B_i^z + B_r^z = B_t^z \quad \Rightarrow \quad B_r^z = B_t^z \quad \text{(ambas nulas)}$$

$$\frac{1}{\mu_1}\left(B_i^x + B_r^x\right) = \frac{1}{\mu_2}B_t^x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\mu_1}B_r^x = \frac{1}{\mu_2}B_t^x \quad \text{(ambas nulas)}$$

$$\frac{1}{\mu_1}\left(B_i^y + B_r^y\right) = \frac{1}{\mu_2}B_t^y$$

- Agora para o campo elétrico. Lembrando que para a onda incidente $\vec{E}_i = E_0(-\hat{z}\sin\theta_i + \hat{x}\cos\theta_i)$, temos então:

$$\epsilon_1\left(E_i^z + E_r^z\right) = \epsilon_2 E_t^z \quad \Rightarrow \quad \epsilon_1\left(-E_0\sin\theta_i + E_r^z\right) = \epsilon_2 E_t^z$$

$$E_i^x + E_r^x = E_t^x \quad \Rightarrow \quad E_0\cos\theta_i + E_r^x = E_t^x$$

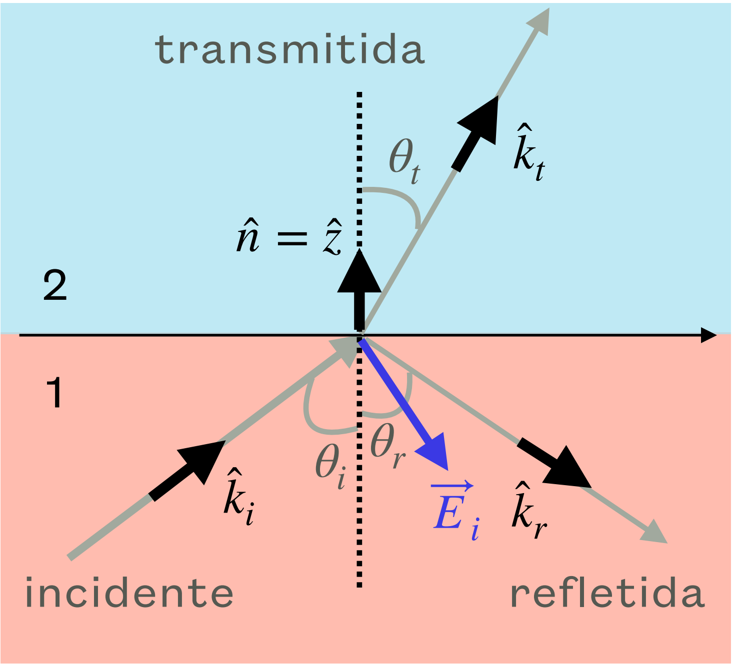
$$E_i^y + E_r^y = E_t^y \quad \Rightarrow \quad E_r^y = E_t^y$$

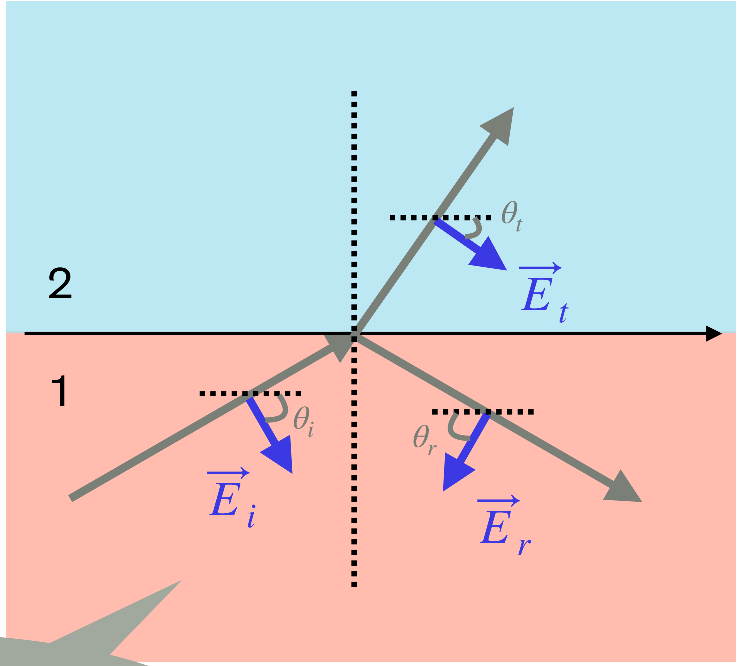
- Claramente, uma solução existe na qual o campo magnético de todas as ondas é só na direção y, e o campo elétrico não tem nenhuma componente na direção y. Temos portanto, analisando com cuidado os ângulos do problema:

$$\frac{1}{\mu_1}\left(B_i^y + B_r^y\right) = \frac{1}{\mu_2}B_t^y \quad \Rightarrow \quad E_0 + E_r = \frac{\mu_1 c_1}{\mu_2 c_2}E_t$$

$$\epsilon_1\left(-E_0\sin\theta_i + E_r^z\right) = \epsilon_2 E_t^z \quad \Rightarrow \quad E_0\sin\theta_i + E_r\sin\theta_r = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}E_t\sin\theta_t$$

$$E_0\cos\theta_i + E_r^x = E_t^x \quad \Rightarrow \quad E_0\cos\theta_i - E_r\cos\theta_r = E_t\cos\theta_t$$





Note que a minha convenção para E_r é o oposto da do Griffiths, mas o resultado físico final é o mesmo.

Reflexão e transmissão de ondas: polarização paralela ao plano de incidência

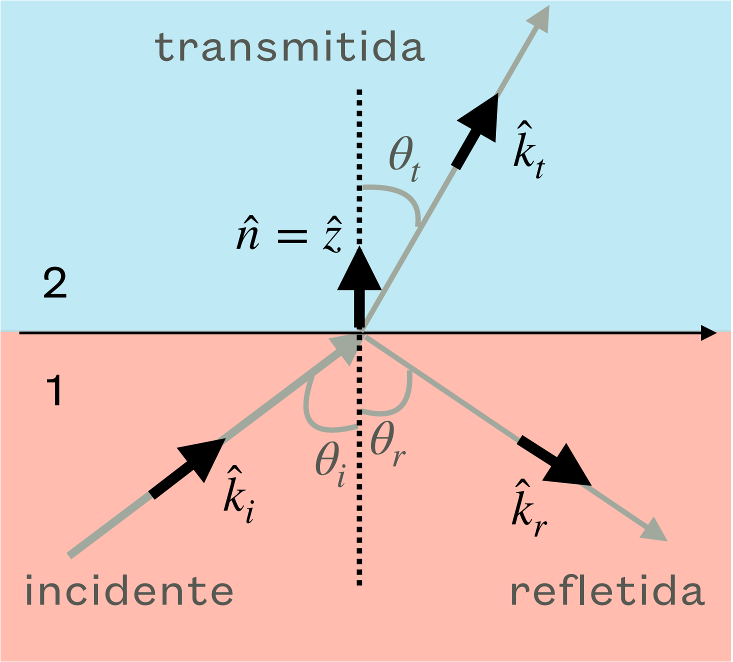
- Vamos repetir esses resultados aqui:

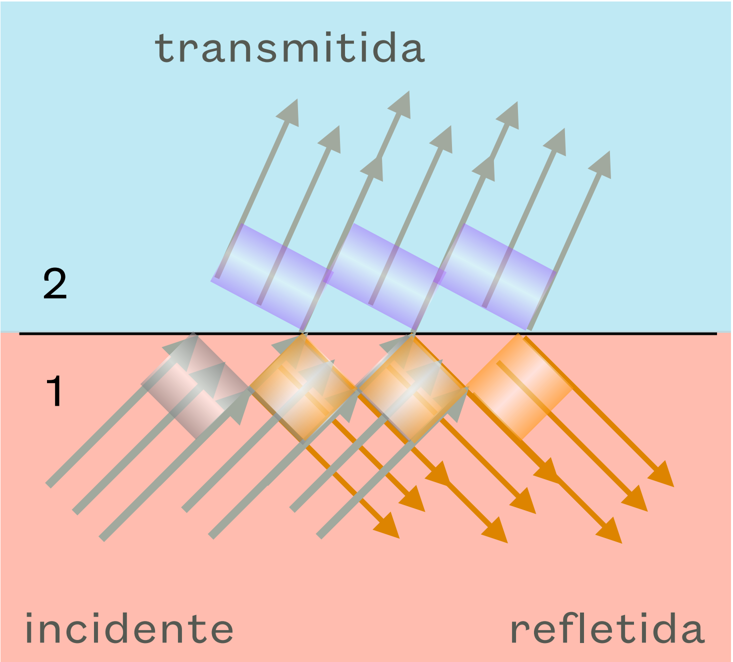
$$E_0 + E_r = \frac{\mu_1 c_1}{\mu_2 c_2} E_t$$

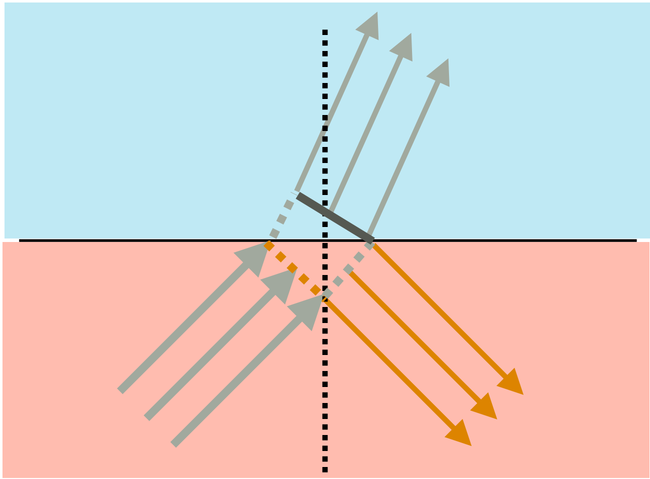
$$E_0 \sin\theta_i + E_r \sin\theta_r = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} E_t \sin\theta_t$$

$$E_0 \cos\theta_i - E_r \cos\theta_r = E_t \cos\theta_t$$

- Temos acima ***três equações*** mas ***quatro incógnitas***: E_r, E_t, θ_r e θ_t. Está faltando uma condição — que tem que ver com as ***fases*** dessas ondas.
- Considere três ***frentes de ondas***, separadas por um comprimento de onda cada — veja a figura.
- Cada caixinha tem um comprimento igual a exatamente um ***comprimento de onda***.
- Agora vamos analisar cuidadosamente a geometria desse problema nas figuras abaixo.

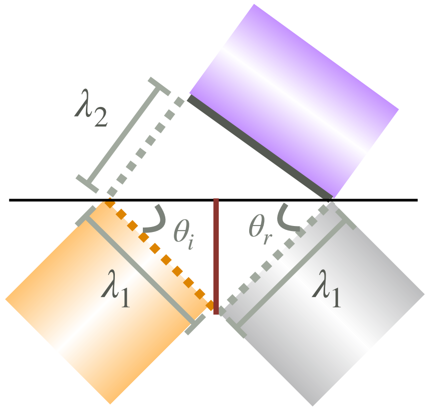






$$\lambda_2 = \frac{2\pi}{k_2} = 2\pi\frac{c_2}{\omega}$$

$$\lambda_1 = \frac{2\pi}{k_1} = 2\pi\frac{c_1}{\omega}$$



$$\lambda_1 \sin\theta_i = \lambda_1 \sin\theta_r \quad \Rightarrow \quad \theta_r = \theta_i \;\; !!!$$

Reflexão e transmissão de ondas: polarização paralela ao plano de incidência

- OK, então temos agora um sistema de três equações e três incógnitas:

(i) $$E_0 + E_r = \frac{\mu_1 c_1}{\mu_2 c_2} E_t$$

(ii) $$(E_0 + E_r)\sin\theta_i = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} E_t \sin\theta_t$$

(iii) $$(E_0 - E_r)\cos\theta_i = E_t \cos\theta_t$$

- Substituindo (i) em (ii) obtemos a ***Lei de Snell***:

$$\frac{\mu_1 c_1}{\mu_2 c_2} E_t \sin\theta_i = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} E_t \sin\theta_t \quad \Rightarrow \quad \mu_1 \epsilon_1 c_1 \sin\theta_i = \mu_2 \epsilon_2 c_2 \sin\theta_t$$

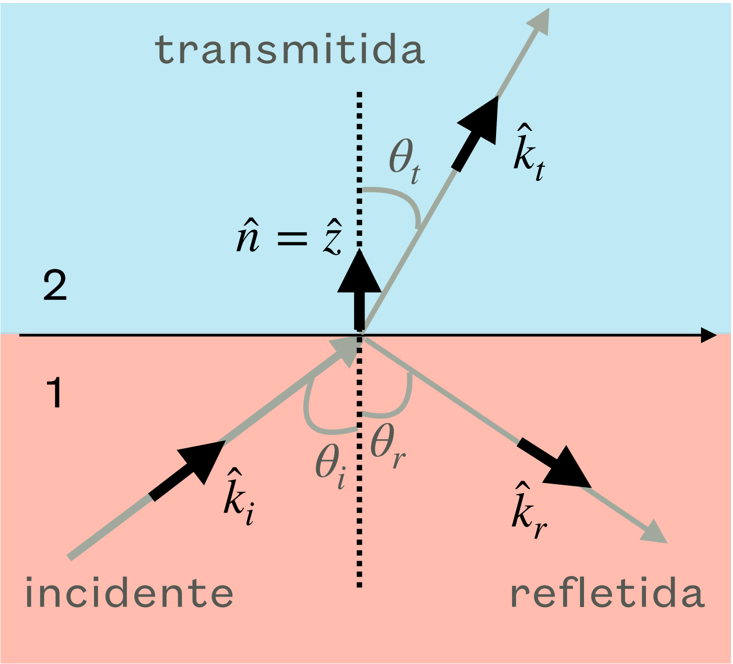
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{c_1} \sin\theta_i = \frac{1}{c_2} \sin\theta_t \quad \text{ou} \quad \boxed{\sin\theta_t = \frac{c_2}{c_1} \sin\theta_i = \frac{n_1}{n_2} \sin\theta_i}$$

onde $n_1 = c/c_1$ é o ***índice de refração*** do meio 1, etc. [A Lei de Snell também pode ser obtida da geometria da figura mostrada no slide anterior.]

- Agora temos de encontrar as ***amplitudes*** dos campos refletido e transmitido, substituindo a Lei de Snell de volta nas equações acima. De (i) e (iii) segue que:

(i) $$E_0 + E_r = \frac{\mu_1 c_1}{\mu_2 c_2} E_t$$

(iii) $$E_0 - E_r = \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i} E_t$$



- Portanto, obtemos que:

$$2E_0 = \left(\frac{\mu_1 c_1}{\mu_2 c_2} + \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i} \right) E_t$$

$$2E_r = \left(\frac{\mu_1 c_1}{\mu_2 c_2} - \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i} \right) E_t$$

Reflexão e transmissão de ondas: polarização paralela ao plano de incidência

- Finalmente, então, obtemos que as amplitudes dos campos refletido e transmitido são dadas por:

$$E_t = \frac{2}{b+a} E_0$$

$$E_r = \frac{1}{2}\left(b-a\right) E_t = \frac{b-a}{b+a} E_0$$

onde definimos:

$$a = \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i} \quad , \quad \text{e} \quad b = \frac{\mu_1 c_1}{\mu_2 c_2}$$

- Essa é a chamada ***Lei de Fresnel*** — no caso, para a polarização paralela ao plano de incidência.
- Note que a ***potência total*** das ondas deve ser ***conservada***, no sentido do ***vetor de Poynting***. Vamos analisar a potência transmitida na direção z:

$$\vec{S}_i \cdot \hat{z} = \frac{1}{2}\epsilon_1 c_1 E_0^2 \cos\theta_i \quad , \quad \vec{S}_r \cdot \hat{z} = -\frac{1}{2}\epsilon_1 c_1 E_r^2 \cos\theta_i \quad , \quad \vec{S}_t = +\frac{1}{2}\epsilon_2 c_2 E_t^2 \cos\theta_t$$

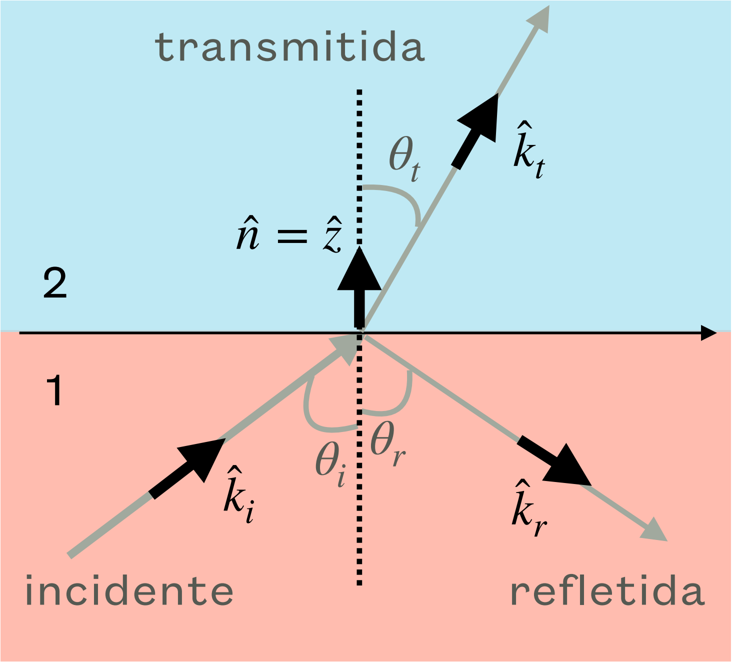
$$\Rightarrow \quad \vec{S}_i \cdot \hat{z} + \vec{S}_r \cdot \hat{z} = \vec{S}_t \cdot \hat{z}$$

- Portanto, devemos verificar que:

$$\Rightarrow \quad \epsilon_1 c_1 E_r^2 \cos\theta_i + \epsilon_2 c_2 E_t^2 \cos\theta_t = \epsilon_1 c_1 E_0^2 \cos\theta_i \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{b-a}{b+a}\right)^2 + ab\left(\frac{2}{b+a}\right)^2 = 1 \qquad \text{OK!!}$$

onde usamos o fato que:

$$\frac{\epsilon_2 c_2}{\epsilon_1 c_1} = \frac{\epsilon_2 c_2^2 c_1}{\epsilon_1 c_2 c_1^2} = \frac{\epsilon_2 c_1}{\epsilon_1 c_2}\frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_2 \mu_2} = \frac{\mu_1 c_1}{\mu_2 c_2}$$



Coeficientes de Reflexão e Transmissão:

$$R = \left(\frac{b-a}{b+a}\right)^2$$

$$T = \frac{4ab}{(b+a)^2}$$

Ângulo de Brewster

- Ainda no caso da ***polarização paralela*** ao plano de incidência, temos:

$$E_t = \frac{2}{b+a} E_0 \quad , \text{ e } \quad E_r = \frac{b-a}{b+a} E_0$$

onde: $\quad a = \dfrac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i} \quad , \text{ e } \quad b = \dfrac{\mu_1 c_1}{\mu_2 c_2}$

- Vamos supor que $b = a$, o que faz com que $E_r \to 0$, ou seja, a onda é ***totalmente transmitida***. Nesse caso:

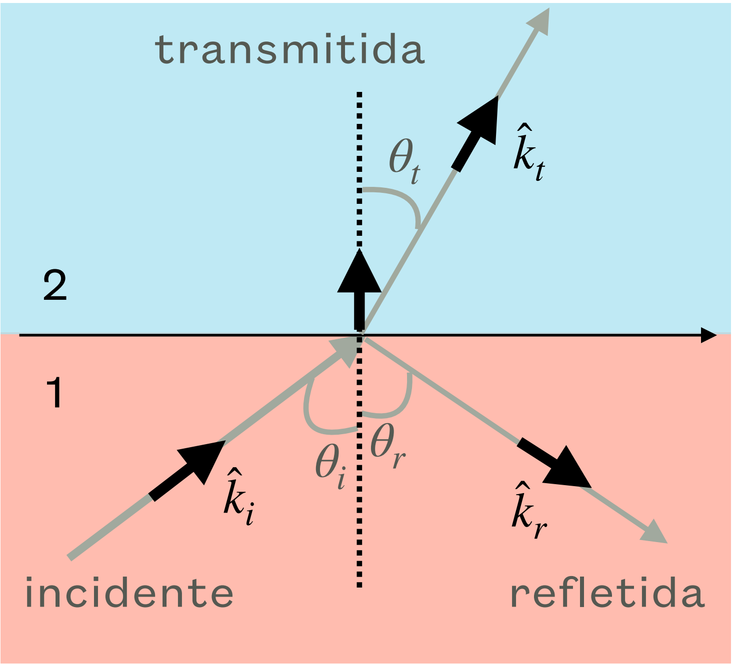
$$\frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i} = \frac{\mu_1 c_1}{\mu_2 c_2} \quad , \text{ ou seja, } \quad \frac{\mu_1^2 c_1^2}{\mu_2^2 c_2^2} = \frac{\cos^2\theta_t}{\cos^2\theta_i} = \frac{1-\sin^2\theta_t}{\cos^2\theta_i} = \frac{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_i}{\cos^2\theta_i}$$

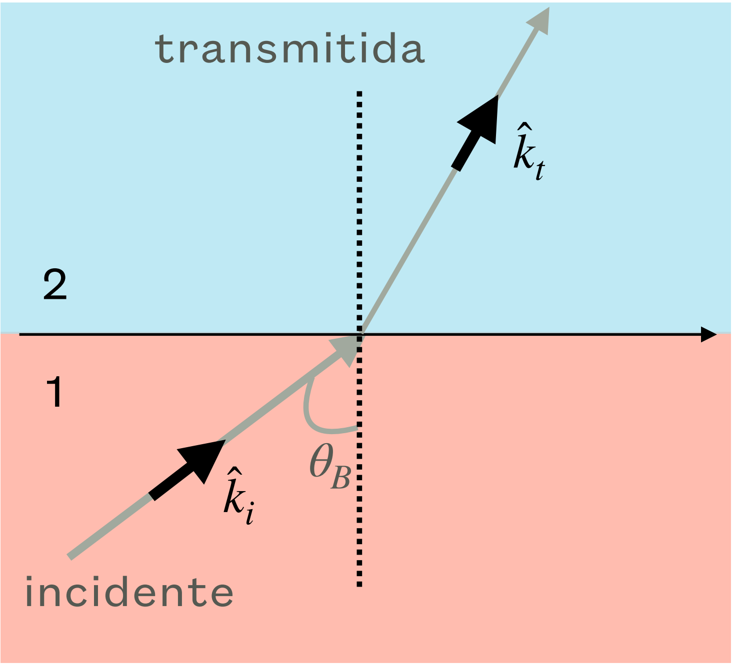
- Agora, podemos considerar que a maioria dos materiais ópticos não são materiais magnéticos, de modo que $\mu_1 \simeq \mu_2 \simeq \mu_0$, e portanto o índice de refração é basicamente determinando pelas permeabilidades elétricas dos meios. Podemos então escrever que, nesse ângulo crítico (ou ***ângulo de Brewster***) teremos:

$$\frac{\mu_1^2 c_1^2}{\mu_2^2 c_2^2} \simeq \frac{n_2^2}{n_1^2} = \frac{1}{\cos^2\theta_B} - \frac{n_1^2}{n_2^2}\tan^2\theta_B = 1 + \tan^2\theta_B - \frac{n_1^2}{n_2^2}\tan^2\theta_B$$

$$\Rightarrow \quad \frac{n_2^2}{n_1^2} - 1 = \left(1 - \frac{n_1^2}{n_2^2}\right)\tan^2\theta_B \quad \Rightarrow \quad \tan^2\theta_B = \frac{n_2^2}{n_1^2}$$

- Quando o ângulo da onda incidente é igual ao ângulo de Brewster a onda é totalmente transmitida — e não há nenhuma parte refletida! Por exemplo, para a interface água ($n_1 = 1.333$) com o ar ($n_2 = 1$) obtemos $\theta_B \simeq 37^\circ$.





Reflexão e transmissão de ondas: polarização transversal ao plano de incidência

- Nossos resultados até agora foram para o caso de uma onda com ***polarização paralela*** ao plano de incidência, no qual as ondas transmitida e refletida são dadas por:

$$E_t = \frac{2}{b+a} E_0 \quad , \text{ e } \quad E_r = \frac{b-a}{b+a} E_0$$

onde: $$a = \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i} \quad , \text{ e } \quad b = \frac{\mu_1 c_1}{\mu_2 c_2}$$

- Para ***polarização perpendicular*** ao plano de incidência — ou seja, quando o campo elétrico está na direção y na figura ao lado — o resultado é parecido (veja exercícios no Griffiths e na lista), e a Lei de Fresnel fica:

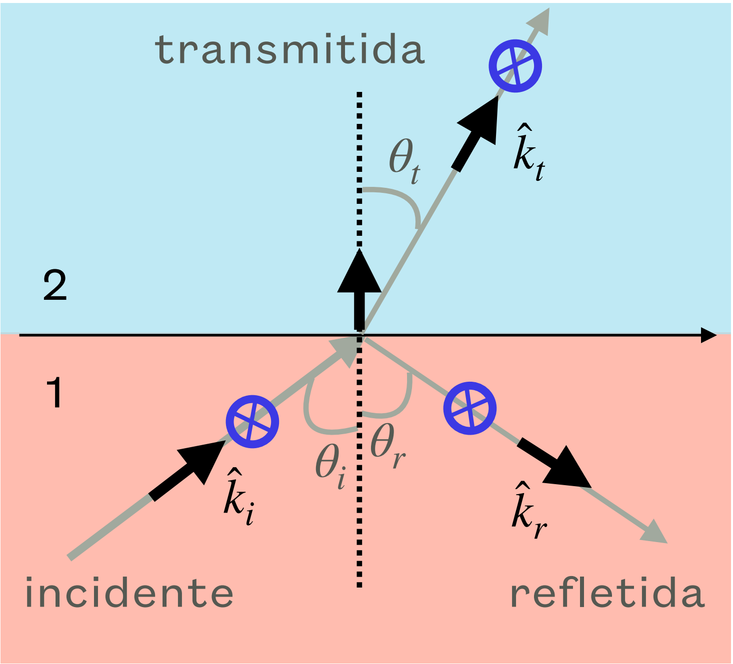
$$E_t = \frac{2}{1+ba} E_0 \quad , \text{ e } \quad E_r = \frac{1-ba}{1+ba} E_0$$

- Novamente, verificamos que a potência total transmitida se conserva:

$$\epsilon_1 c_1 E_r^2 \cos\theta_i + \epsilon_2 c_2 E_t^2 \cos\theta_t = \epsilon_1 c_1 E_0^2 \cos\theta_i \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1-ba}{1+ba}\right)^2 + ab\left(\frac{2}{1+ba}\right)^2 = 1$$

- Qualquer estado de polarização pode ser escrito como uma superposição de polarizações paralela e transversal ao plano de incidência, portanto nossos ***resultados valem de um modo totalmente geral***, e de quebra verificamos que a potência é sempre conservada — desde que, claro, tenhamos meios lineares.

- Em meios condutores, como há dissipação de energia (resistência), essa potência não é conservada, devido ao consumo de energia dentro do condutor . Nesses casos a equação utilizada acima, para o vetor de Poynting, tem que ser complementada pela potência consumida pela resistividade, $\vec{J} \cdot \vec{E} = \sigma \vec{E}^2$.



Reflexão total interna

- Vamos retornar a um dos nossos principais resultados, a Lei de Snell:

$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t$$

- Note que nem sempre é possível satisfazer essa relação:

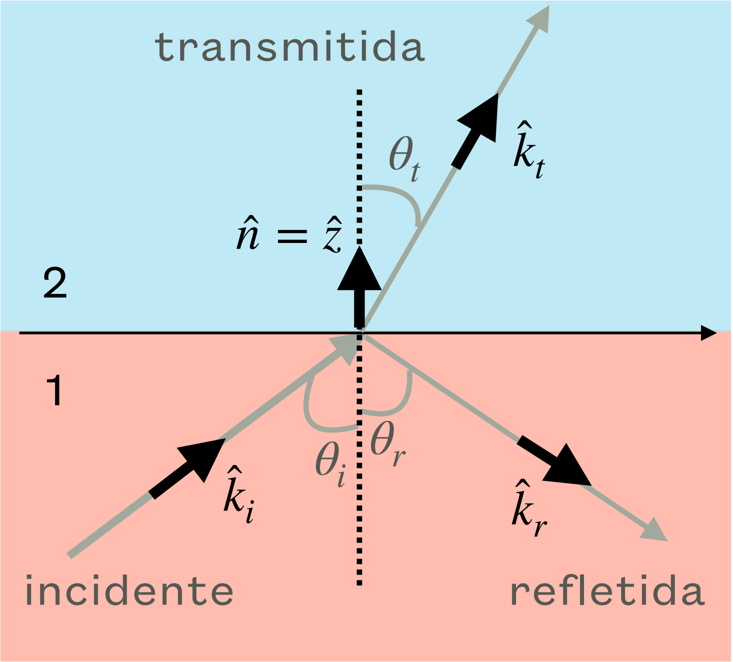
se $\dfrac{n_1}{n_2}\sin\theta_i > 1$, então não existe um ângulo θ_t que satisfaça a relação!

- O ângulo "crítico" de incidência, além do qual não pode haver transmissão, é dado por:

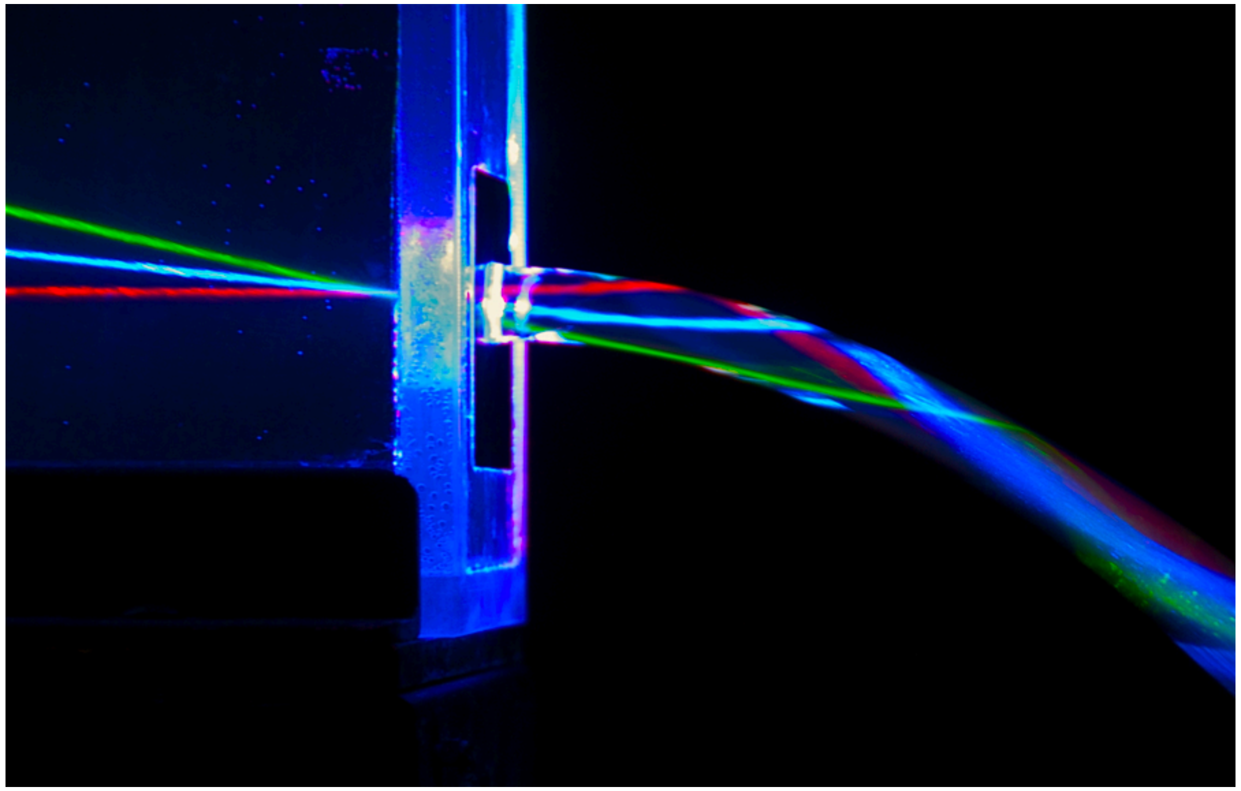
$$\sin\theta_c = \frac{n_2}{n_1}$$

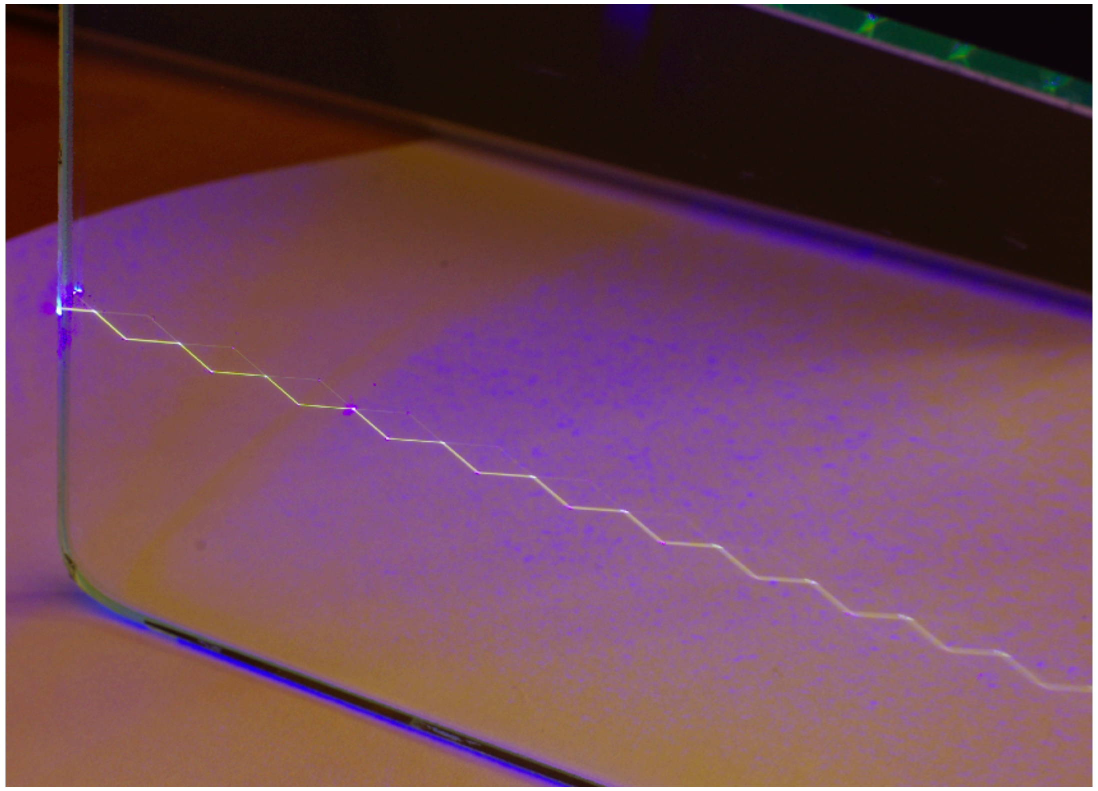
Num meio (1) que tem um índice de refração maior que o meio 2, uma onda incidente com um ângulo maior do que θ_c será ***totalmente refletida***.

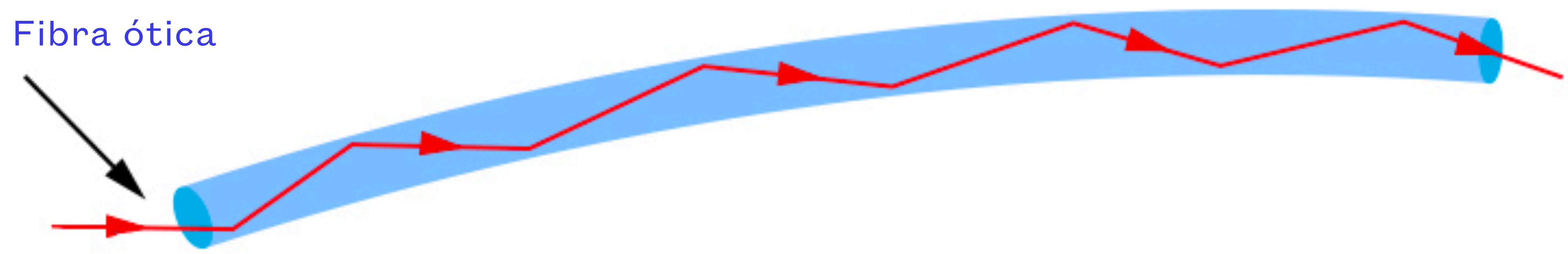
- Esse fenômeno se chama ***reflexão total interna*** e ocorre, por exemplo, se você está numa piscina (a água com índice de refração de $n_2 \simeq 1.33$) e olha para fora (ar, índice de refração de 1). Se você está dentro da água e tentar olhar para fora num ângulo maior do que 48°, a superfície da água (vista por baixo) se parece com um espelho.



Reflexão total interna







Reflexão total interna

- Na verdade, mesmo nos casos onde ocorre reflexão total interna há uma certa propagação da onda no meio 2 — porém, as equações de Maxwell para as ondas envolvem ***coeficientes imaginários.***

- Assim, em vez da onda ter uma propagação do tipo $e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ no meio 2 , a propagação é do tipo e^{-qz} — ou seja, ela apresenta um ***decaimento exponencial*** à medida que entra naquele meio.

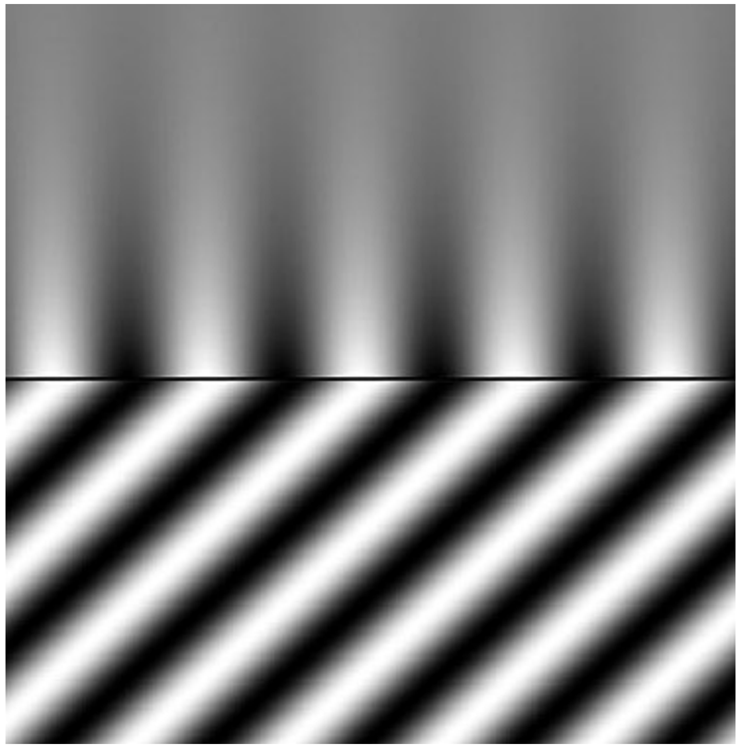
- Esse tipo de onda que decai exponencialmente dentro de um meio se chama ***onda evanescente***.

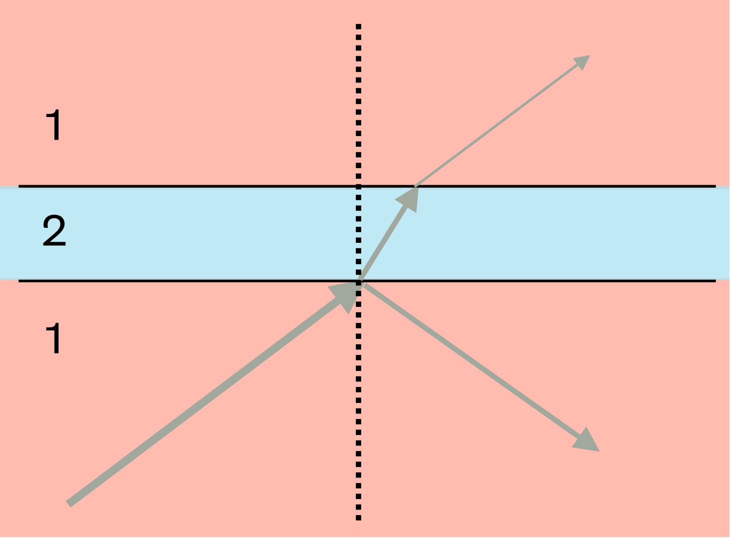
- Devido a esse decaimento dentro do meio 2, a onda evanescente ***não transmite energia***, e portanto a onda incidente é ***totalmente refletida***:

$$E_t \to 0$$

$$E_r \to E_0$$

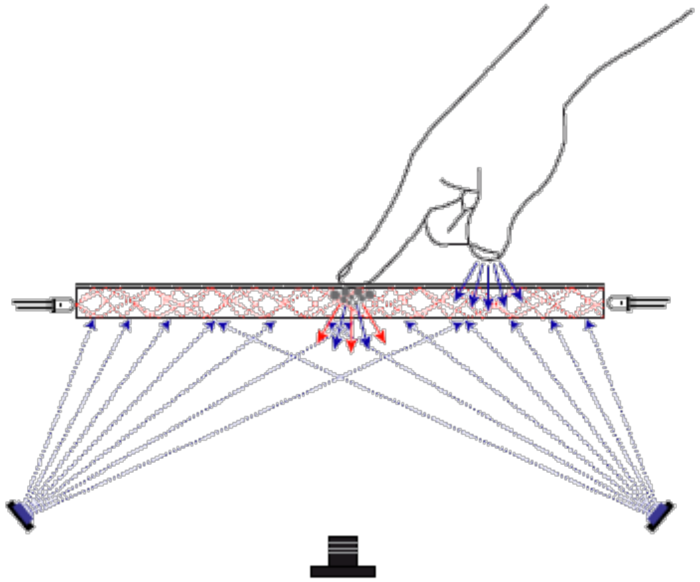
- Porém, podemos recuperar a onda evanescente se o meio de propagação voltar a ter um índice de refração menor — ou seja, se fizermos um “sanduíche" do meio 2, com o meio 1 (o “pão”) acima e abaixo de uma “fatia" do meio 2 (a “mortadela”).

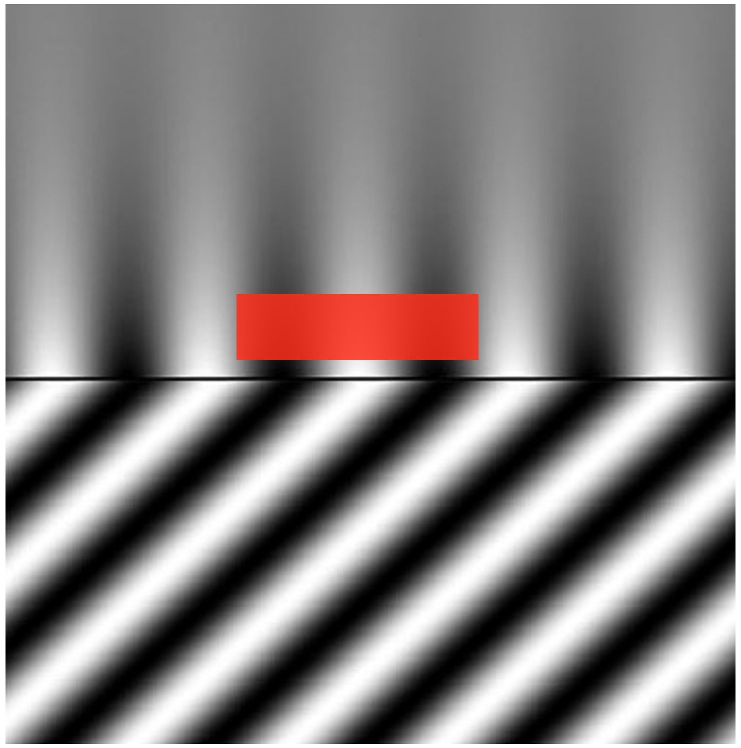


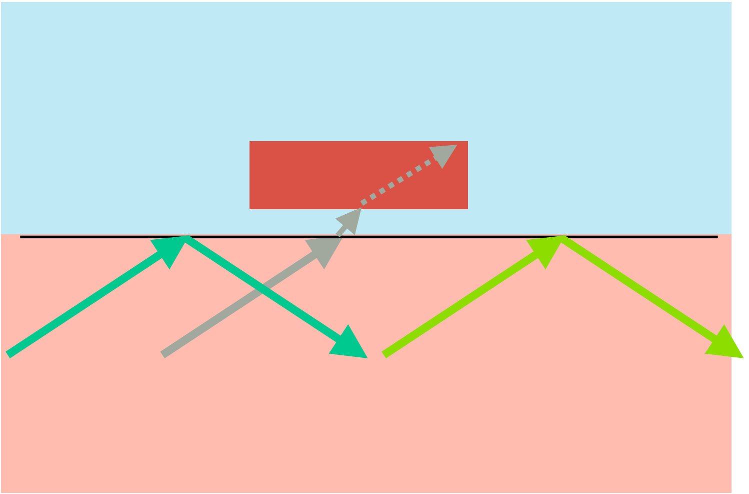


Reflexão total interna frustrada

- Um outro modo de "burlar" a reflexão total interna é perturbando as propriedades da interface entre os dois meios.
- Se colocamos um objeto com índice de refração alto (a caixinha vermelha da figura ao lado) muito próximo da interface dos dois meios, a onda evanescente ainda tem uma intensidade alta quando atinge aquele meio.
- Esse efeito pode ser visto em algumas situações interessantes, e é a base para alguns aparatos bem legais — incluindo telas tipo "touch screen".







Transmissão e reflexão: caso geral (polarização paralela ao plano de incidência)

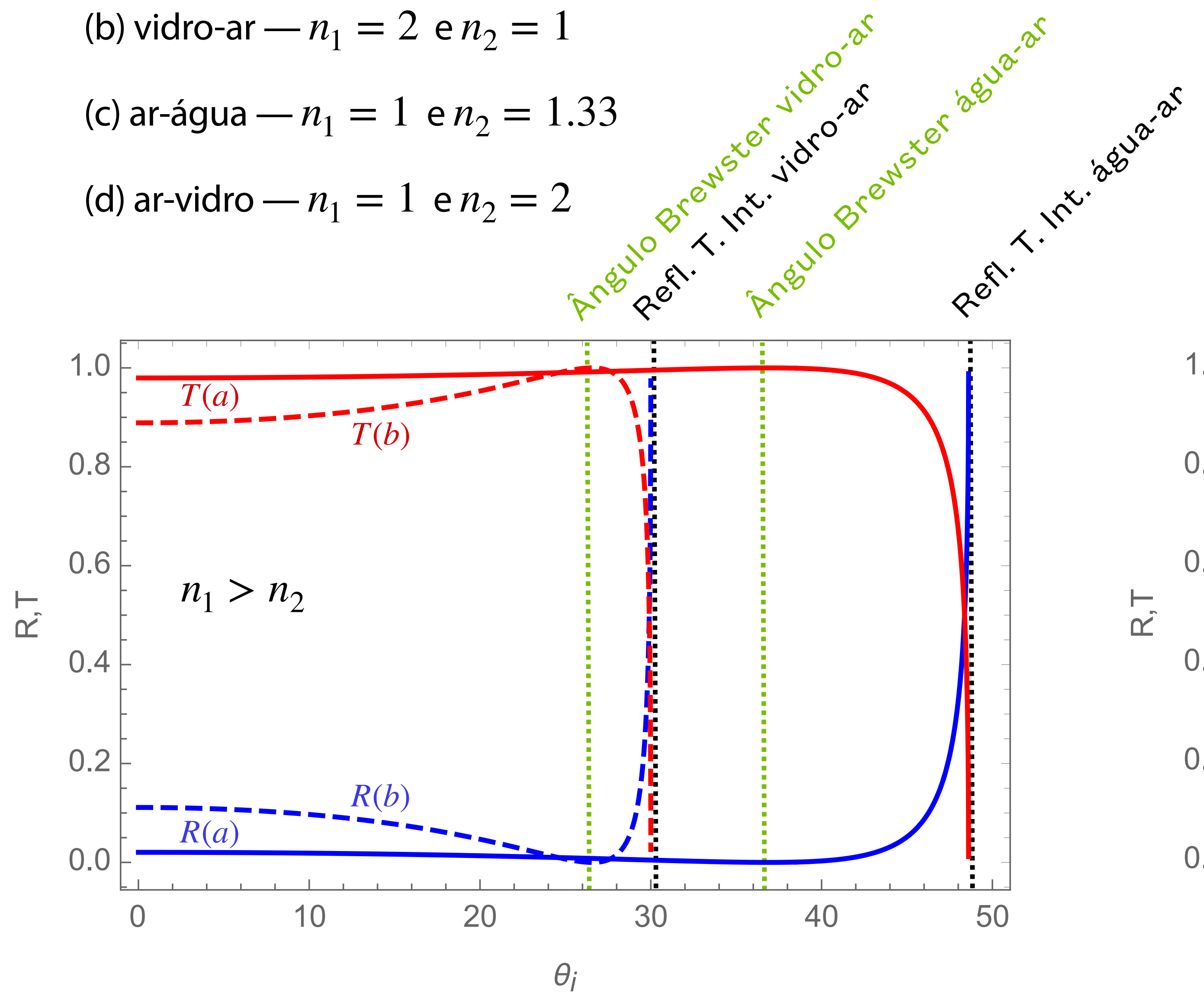
- As figuras abaixo ilustram a situação geral em quatro casos:

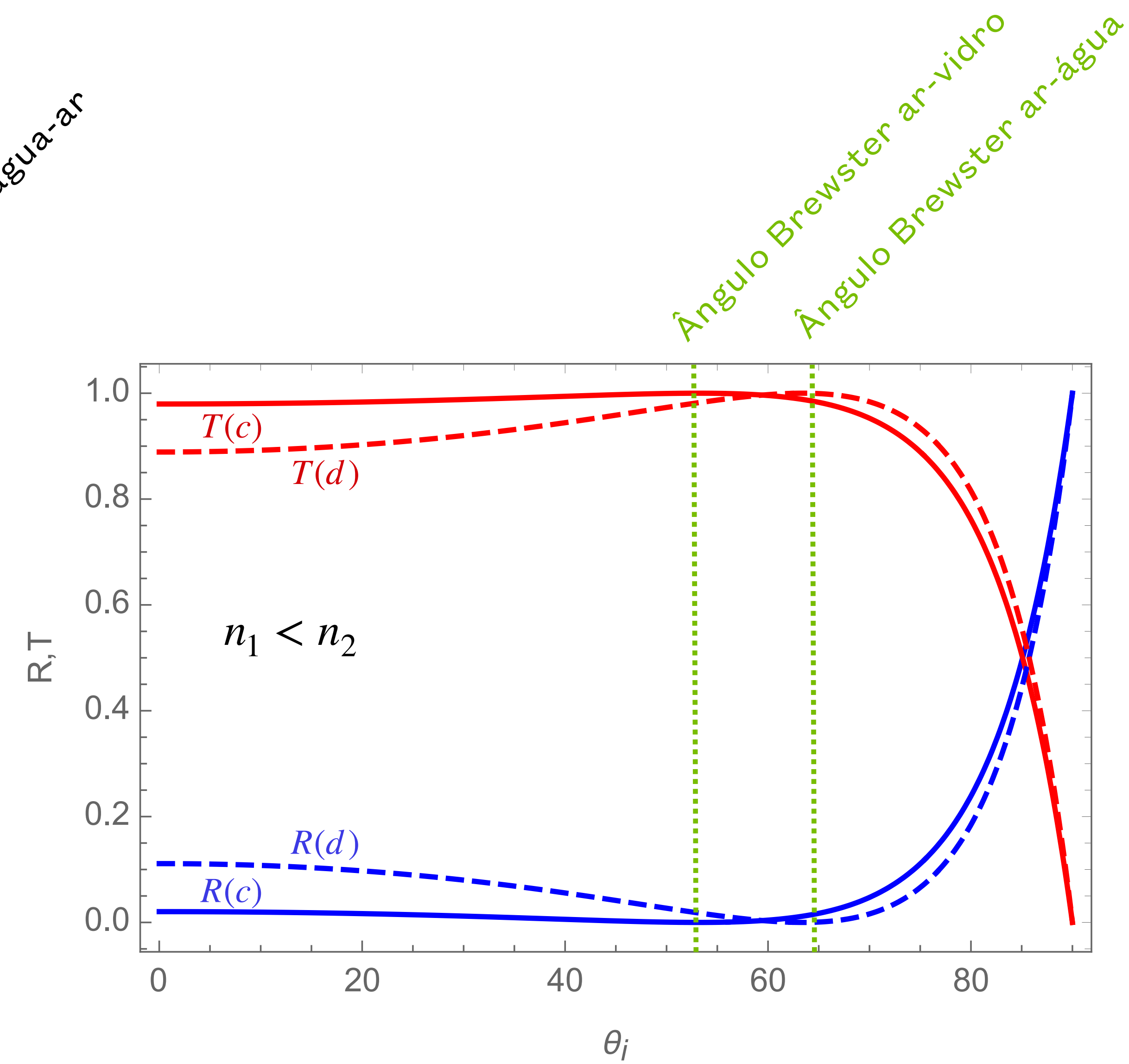
  (a) água-ar — $n_1 = 1.33$ e $n_2 = 1$

  (b) vidro-ar — $n_1 = 2$ e $n_2 = 1$

  (c) ar-água — $n_1 = 1$ e $n_2 = 1.33$

  (d) ar-vidro — $n_1 = 1$ e $n_2 = 2$





Fim da disciplina!

- Prova final dia 14/12
- Equações de Maxwell
- Radiação eletromagnética
- Ondas eletromagnéticas: polarização, reflexão/refração

- Griffiths, Caps. 7-11