

Observações sobre o Teste de Friedman

- 1- O teste paramétrico equivalente é o da análise de variância com dois fatores, um sendo tratamento e o outro, fator bloco.
- 2- Para $K=2$, a eficiência relativa do teste de Friedman em relação ao teste t -pareado é 0,637.
- 3- Para K tratamentos, a ARE do teste de Friedman em relação ao teste F da tabela de análise de variância é $\frac{0,955 K}{K+1}$ se houver normalidade, $\frac{K}{K+1}$ se as populações tiverem distribuições uniformes e $\frac{3K}{2(K+1)}$ se a distribuição for exponencial dupla.
- 4- De modo geral, verifica-se que $ARE \geq \frac{0,864 K}{K+1}$.
 $\exists \rightarrow F$

5 - Teste de Durbin - Planejamento em Blocos Incompletos Balanceados (BIB)

Quando o n° de tratamentos é muito grande (e/ou o n° de unidades do bloco é pequeno), pode ser impossível aplicar todos os tratamentos a todos os elementos do bloco.

Se o bloco é indivíduo, pode ser impreciso um indivíduo analisar todos os tratamentos.

Blocos Incompletos Balanceados - experimento no qual nem todos os tratamentos são aplicados ao mesmo bloco.

- a) Todo bloco contém k unidades experimentais.
- b) Cada tratamento aparece em exatamente r blocos.
- c) Cada tratamento aparece com qualquer outro o mesmo número de vezes.

Sejam $t = n^{\circ}$ de tratamentos

$k = n^{\circ}$ de unidades experimentais por bloco ($k < t$)

Se $k = t$, teste de Friedman

$b = n^{\circ}$ de blocos

$r = n^\circ$ de vezes que cada tratamento é analisado
($r < b$)

$\lambda = n^\circ$ de blocos nos quais o i -ésimo tratamento e o j -ésimo aparecem juntos (λ é o mesmo para todos os pares de tratamentos)

X_{ij} - resultado do j -ésimo tratamento no i -ésimo bloco

$$R_j = \sum_{i=1}^b R(X_{ij})$$

$\hookrightarrow$ soma dos postos do j -ésimo tratamento
 $j = 1, 2, \dots, t$

$R(X_{ij}) = 0$ se o tratamento j não é analisado no i -ésimo bloco.

R_j possui r parcelas $\neq 0$.

Suposições:

- 1 - Os blocos são independentes entre si
- 2 - Dentro de cada bloco, as observações podem ser ordenadas segundo algum critério de interesse (um n.º moderado de empates e tolerável).

H_0 : Não existem diferenças entre as médias dos tratamentos (Todas as distribuições de postos são igualmente prováveis)

H_a : Pelo menos um dos tratamentos tende a produzir observações maiores.

Associa-se postos dentro dos blocos.

Estatística de Teste:

Se não existir empates, utilizar

$$T = \frac{12(t-1)}{rt(k-1)(k+1)} \sum_{j=1}^t \left[R_j - \frac{r(k+1)}{2} \right]^2$$

Sob H_0 , $E(R_j) = \frac{r(k+1)}{2}$

Regra de Decisão:

Rejeita-se H_0 ao nível α se $T \geq \chi_{1-\alpha}$, em que $\chi_{1-\alpha}$ é o quantil de ordem $(1-\alpha)$ da dist. χ^2 com $t-1$ g.l.

Se existirem empates, usar a estatística corrigida para empates:

$$T_1 = \frac{(t-1) \left[\sum_{j=1}^t R_j^2 - n C \right]}{A - C} \quad \text{com}$$

$$A = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^t [R(x_{ij})]^2 \quad C = \frac{b k (k+1)^2}{4},$$

com a mesma R.C de T .

No entanto, para que o α real do teste seja mais próximo do fixado, Conover sugere utilizar a estatística

Se não existirem empates, usar

$$T_2 = \frac{T_1 / (t-1)}{[b(k-1) - T_1] / (bk - b - t + 1)} \cdot \frac{T / (t-1)}{[b(k-1) - T] / (bk - b - t + 1)}$$

$$\text{Se } H_0, T_2 \sim F_{K_1, K_2} \quad K_1 = t-1 \quad K_2 = bk - b - t + 1$$

$$RC: T_2 > F_{c, k_1, k_2}$$

F_{c, k_1, k_2} quantil de ordem $1-\alpha$ da dist F, com k_1 gl no numerador e k_2 gl no denominador.

Comparações Múltiplas

Se a hipótese nula é rejeitada, conclui-se que os tratamentos i e j têm médias diferentes se R_i e R_j satisfazem à desigualdade

$$|R_i - R_j| > t_{1-\frac{\alpha}{2}} \left[\frac{(A-C)2r}{bk-b-t+1} \left(1 - \frac{T_1}{b(k-1)} \right) \right]^{1/2} *$$

$t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ - quantil de ordem $1-\frac{\alpha}{2}$ da dist. t-student com $bk-b-t+1$ gl.

Se não existirem empates * fica

$$|R_i - R_j| > t_{1-\frac{\alpha}{2}} \left[\frac{rk(k+1)}{b(bk-b-t+1)} (b(k-1)-T) \right]^{1/2}$$

Obs: Para este planejamento

a) $kb = rt$

b) $\lambda = \frac{r(k-1)}{t-1}$

c) Em geral, dados t e k , determinamos b , r e λ .

Existem métodos de associar os tratamentos às unidades dos blocos de modo que a condição λ constante seja satisfeita.

d) O correspondente planejamento paramétrico é o BIB.

Exemplo:

Um fabricante de sorvetes quer testar a preferência relativamente a sete variedades que fabrica. Ele pede a cada uma de sete pessoas que prove três variedades e ordene de 1 (+ preferido) a 3 (- preferido).

A associação de postos foi a seguinte:

Varied. Pessoas	1	2	3	4	5	6	7
1	2	3		1			
2		3	1		2		
3			2	1		3	
4				1	2		3
5	3				1	2	
6		3				1	2
7	3		1				2
R_j	8	9	4	3	5	6	7

$t = 7 \rightarrow$ total de variedades

$k = 3 \rightarrow$ n.º de variedades analisadas por pessoa

$b = 7 \rightarrow$ n.º de pessoas (blocos)

$r = 3 \rightarrow$ n.º de vezes que cada variedade é testada

$\lambda = 1 \rightarrow$ n.º de vezes que cada variedade é comparada com outra

$$r = \frac{R \cdot b}{t} = \frac{3 \cdot 7}{7} = 3 \quad \lambda = \frac{r(k-1)}{t-1} = \frac{3 \cdot 2}{6} = 1$$

Como não existem empates

$$T = \frac{12(t-1)}{rt(k-1)(k+1)} \sum_{j=1}^t \left[R_j - \frac{r(k+1)}{2} \right]^2$$

$$= \frac{12 \cdot 6}{3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 4} \left[(8-6)^2 + (9-6)^2 + \dots + (7-6)^2 \right] = 12$$

Utilizar T_2 :

$$T_2 = \frac{T / (t-1)}{[b(k-1) - T] / (bk - b - t + 1)} = \frac{12/6}{(14-12)/8} = 8$$

Para $\alpha = 0,05$ $F_{6,8} = 3,58$ $t-1 = 6 = k_1$
 $k_2 = bk - b - t + 1 = 8$

$T_2 \in RC$, rejeita-se H_0 , ao nível 0,05 rejeita-se a hipótese de equivalência na preferência pelos sete tipos de sorvete.

Exercício : Construir as comparações múltiplas

Obs :

- O teste de Durbin se reduz ao de Friedman se o n.º de tratamentos é igual ao n.º de unidades experimentais por bloco.
- A ARE do teste de Durbin com relação ao seu correspondente paramétrico é a mesma do teste de Friedman com relação ao seu correspondente paramétrico.