Exercício 10

a) $x^\mu = (t, r_0, 0, \Omega t) \Rightarrow u^\mu = \frac{dt}{d\tau}(1,0,0,\Omega)$. Impondo $u^\mu u_\mu = -1$, temos:

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \left[-\left(1-\frac{2GM}{r_0}\right) + r_0^2\Omega^2 \right] = -1 \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2GM}{r_0} - r_0^2\Omega^2}} \quad (= \text{cte})$$

Logo, a 4-velocidade é dada por $u^\mu = \frac{(1,0,0,\Omega)}{\sqrt{1-\frac{2GM}{r_0}-r_0^2\Omega^2}}$ (= constantes). Portanto, a 4-aceleração será:

$$a^\mu = u^\alpha \nabla_\alpha u^\mu = \cancelto{0}{\frac{du^\mu}{d\tau}} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = \frac{\Gamma^\mu_{00} + 2\cancelto{0}{\Gamma^\mu_{03}}\Omega + \Omega^2 \Gamma^\mu_{33}}{\left(1-\frac{2GM}{r_0} - \Omega^2 r_0^2\right)} = \frac{\delta^\mu_r \left(\Gamma^r_{00} + \Omega^2 \Gamma^r_{33}\right)}{\left(1-\frac{2GM}{r_0} - r_0^2\Omega^2\right)}$$

Calculando os Γ's necessários:

$$\Gamma^r_{00} = -\frac{1}{2} g^{rr} \partial_r g_{00} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{2GM}{r}\right)\frac{2GM}{r^2} = \frac{GM}{r^2}\left(1-\frac{2GM}{r}\right)$$

$$\Gamma^r_{33} = -\frac{1}{2} g^{rr} \partial_r g_{33} = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{2GM}{r}\right) 2r\sin^2\theta = -(r-2GM)\sin^2\theta$$

Substituindo, temos:

$$a^\mu = \delta^\mu_r \frac{\left[(GM/r_0^3)(r_0-2GM) - \Omega^2(r_0-2GM)\right]}{\left(1-\frac{2GM}{r_0}-\Omega^2 r_0^2\right)} = \delta^\mu_r \left(1-\frac{2GM}{r_0}\right)\left(\frac{GM}{r_0^2} - \Omega^2 r_0\right) \Big/ \left(1-\frac{2GM}{r_0} - \Omega^2 r_0^2\right)$$

Calculando a aceleração própria: $a = \sqrt{a^\mu a_\mu} = \sqrt{g_{rr}(a^r)^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{a = \sqrt{1-\frac{2GM}{r_0}} \; \frac{\left(\frac{GM}{r_0^2} - \Omega^2 r_0\right)}{\left(1-\frac{2GM}{r_0} - \Omega^2 r_0^2\right)}}$$

O sentido de a^μ é radial mas depende do sinal de $\left(\frac{GM}{r_0} - \Omega^2 r_0^2\right)$. Para $\Omega^2 r_0^2 < GM/r_0$, o sentido é positivo; para $\Omega^2 r_0^2 > \frac{GM}{r_0}$, o sentido é negativo. Em qualquer caso, é o propulsor da nave que provê essa aceleração.

b) Se $r_0 = 3GM$, temos:

$$a = \sqrt{\frac{1}{3}} \; \frac{1}{3GM} \; \frac{\left(\frac{1}{3} - \cancel{(3GM)^2\Omega^2}\right)}{\left(\frac{1}{3} - \cancel{\Omega^2 (3GM)^2}\right)} = \frac{1}{3\sqrt{3}GM}$$

. Independe de Ω.

c) $$a_{cf} = \sqrt{1-\frac{2GM}{r_0}} \; \frac{1}{r_0} \left\{ \frac{\left(GM/r_0 - \Omega^2 r_0^2\right)}{\left(1-\frac{2GM}{r_0} - \Omega^2 r_0^2\right)} - \frac{GM/r_0}{\left(1-\frac{2GM}{r_0}\right)} \right\} =$$

$$= \frac{1}{r_0} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2GM}{r_0}}\left(1-\frac{2GM}{r_0} - \Omega^2 r_0^2\right)} \left\{ \left(\frac{GM}{r_0} - \Omega^2 r_0^2\right)\left(1-\frac{2GM}{r_0}\right) - \frac{GM}{r_0}\left(1-\frac{2GM}{r_0} - \Omega^2 r_0^2\right) \right\} =$$

$$= \frac{1}{r_0\sqrt{1-\frac{2GM}{r_0}}\left(1-\frac{2GM}{r_0}-\Omega^2 r_0^2\right)}\left\{\cancel{\frac{GM}{r_0}} - \cancel{\frac{2G^2M^2}{r_0^2}} - \Omega^2 r_0^2 + 2GM\Omega^2 r_0 - \cancel{\frac{GM}{r_0}} + \cancel{\frac{2G^2M^2}{r_0^2}} + GM\Omega^2 r_0\right\} =$$

$$= \frac{-\Omega^2 r_0\left(1-3GM/r_0\right)}{\sqrt{1-\frac{2GM}{r_0}}\left(1-\frac{2GM}{r_0}-\Omega^2 r_0^2\right)}$$

. Note que se $r_0 > 3GM$, $a_{cf} < 0$ e fica cada vez mais negativo p/ Ω crescente. Já se $r_0 < 3GM$, $a_{cf} > 0$ e fica cada vez maior p/ Ω crescente.

Reescrevendo a aceleração total como:

$$a = a(r_0, 0) + a_{cf}(r_0, \Omega),$$

vemos que se $r_0 > 3GM$, então aumentar a velocidade angular facilita a tarefa de afastar a nave, pois diminui a aceleração necessária. Já se $r_0 < 3GM$, qualquer $\Omega \neq 0$ dificulta o afastamento da nave, pois aumenta a aceleração necessária. Assim, embora o meio mais "econômico" de se afastar de um corpo central seja em movimento "espiralado" (p/ fora) na região $r > 3GM$, se $r < 3GM$ o modo mais fácil de escapar do corpo central é através de um movimento radial ($\Omega = 0$).