

$$\alpha_1 - \alpha_2 = q' \beta \quad \text{para} \quad q' = [0 \ 1 \ -1 \ 0]$$

$$\therefore \text{Var}(\hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2) = [0 \ 1 \ -1 \ 0] G \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \hat{\sigma}^2 = \frac{5}{6} \hat{\sigma}^2$$

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2) = \frac{5}{6} \hat{\sigma}^2 = \frac{5}{6} \frac{70}{3}$$

4) Pelo Teorema 3, $\hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2$ e $\hat{\mu} + \hat{\alpha}_1$ são NVUM para $E(Y_{11}) - E(Y_{21})$ e $E(Y_{11})$.

5) $K=3 \Rightarrow$ obteríamos no máximo três funções estimáveis linearmente independentes.

$r(X)=3 \Rightarrow X$ tem três linhas que formam vetores LI, $\tilde{l}'_1, \tilde{l}'_2, \tilde{l}'_3$

Como cada linha de $X\beta$ é estimável, $\tilde{l}'_1\beta, \tilde{l}'_2\beta$ e $\tilde{l}'_3\beta$ são três funções estimáveis linearmente independentes.

No exemplo,

$$\tilde{l}'_1 = [1 \ 1 \ 0 \ 0] \quad \tilde{l}'_2 = [1 \ 0 \ 1 \ 0] \quad \text{e} \quad \tilde{l}'_3 = [1 \ 0 \ 0 \ 1]$$

são LI pois

$$a_1 \tilde{l}'_1 + a_2 \tilde{l}'_2 + a_3 \tilde{l}'_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0.$$

Portanto $\tilde{l}'_1 \beta$, $\tilde{l}'_2 \beta$ e $\tilde{l}'_3 \beta$ são funções estimáveis linearmente independentes.

$$\tilde{l}'_1 \beta = \mu + \alpha_1$$

$$\tilde{l}'_2 \beta = \mu + \alpha_2$$

$$\tilde{l}'_3 \beta = \mu + \alpha_3$$

Dizemos que $\tilde{l}'_1 \beta$, $\tilde{l}'_2 \beta$ e $\tilde{l}'_3 \beta$ é um conjunto base de funções estimáveis.

É fácil verificar que combinações lineares de funções estimáveis são estimáveis.

Todas as funções estimáveis nesse modelo serão combinações lineares de $\tilde{l}'_1 \beta$, $\tilde{l}'_2 \beta$ e $\tilde{l}'_3 \beta$.

Definição Formal

Seja $L = \begin{bmatrix} \tilde{l}'_1 \\ \tilde{l}'_2 \\ \vdots \\ \tilde{l}'_k \end{bmatrix}_{k \times p}$ onde $\tilde{l}'_j \beta$ é estimável para todo $j = 1, 2, \dots, k$.

$L\beta = \begin{bmatrix} \tilde{l}'_1 \beta \\ \tilde{l}'_2 \beta \\ \vdots \\ \tilde{l}'_k \beta \end{bmatrix}$ é um conjunto base de funções estimáveis de β

se $r(L) = k$

Resultado

Se $L\beta$ é um conjunto base de funções estimáveis, a estatística

$[\hat{\sigma}^2, (L\hat{\beta}^*)']$ $k+1$ -dimensional é suficiente e completa

↓
vetor

para o modelo $Y = X\beta + \varepsilon$, $r(X) = k < p < n$

$X_{n \times p}$, $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$.

Como consequência do resultado e do teorema de Lehmann-Scheffé, qualquer estimador não viciado de $h(\beta, \sigma^2)$, que seja função de $[\hat{\sigma}^2, (L\hat{\beta}^*)']$ será NVUM de $h(\beta, \sigma^2)$.

Teorema 4

No modelo $Y = X\beta + \varepsilon$, $\varepsilon \sim NN(0, \sigma^2 I)$ $X_{n \times p}$ $r(X) = K < p < n$.

Se $L = \begin{bmatrix} \tilde{l}_1' \\ \tilde{l}_2' \\ \vdots \\ \tilde{l}_q' \end{bmatrix}_{q \times p}$ é uma matriz de posto $m \leq q$ tal que

$L\beta$ é um conjunto de q funções estimáveis, então

$$a) L\hat{\beta}^* = \begin{bmatrix} \tilde{l}_1' \hat{\beta}^* \\ \tilde{l}_2' \hat{\beta}^* \\ \vdots \\ \tilde{l}_q' \hat{\beta}^* \end{bmatrix} \sim N_q(L\beta, \sigma^2 LGL')$$

onde G é qualquer inversa generalizada de $X'X$.

$$\text{Var}(\hat{\beta}^*) = GX'XG'\sigma^2$$

$$\text{Var}(L\hat{\beta}^*) = LGX'XG'L'\sigma^2 = \underbrace{TXGX'XG'X'T'}_X \sigma^2 =$$

$$= \cancel{TXGX'XG'X'T'} \sigma^2 = \underbrace{TXG'X'T'}_{\text{invariante}} \sigma^2 = TXGX'T'\sigma^2 = LGL'\sigma^2$$

(LGL') é invariante em G pois

$$L = \begin{bmatrix} \tilde{t}_1' X \\ \tilde{t}_2' X \\ \vdots \\ \tilde{t}_q' X \end{bmatrix} = \underset{q \times n \quad n \times p}{T} X \Rightarrow LGL' = \underbrace{T X G X' T'}_{\text{invariante}}$$

Esta distribuição pode ser normal singular, pois $r(LGL') = m$, que pode ser menor que q .

$$b) U = \frac{(n-k) \hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^2} \sim \chi^2_{n-k}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{(Y - X\hat{\beta}^*)'(Y - X\hat{\beta}^*)}{n-k}$$

c) $L\hat{\beta}^*$ é independente de U .

Nos exemplos vimos que no mesmo modelo podem ser usadas diferentes parametrizações

$$\underset{\substack{\sim \\ \hookrightarrow p \times 1}}{Y} = X \underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon} \quad \underset{\sim}{\varepsilon} \sim NN(0, \sigma^2 I) \quad X_{n,p} \quad r(X) = k < p < n \quad (1)$$

$$\text{Seja } L = \begin{bmatrix} \tilde{l}_1' \\ \tilde{l}_2' \\ \vdots \\ \tilde{l}_m' \end{bmatrix} \text{ matriz } m \times p \ (m < p) \text{ conhecida}$$

Definições

Nas condições anteriores

a) $\underline{\Theta} = L\underline{\beta}$ é uma transformação de $\underline{\beta}$ em $\underline{\Theta}$.

b) A transformação $\underline{\Theta} = L\underline{\beta}$ é uma reparametrização de $\underline{\beta}$ em $\underline{\Theta}$ se cada $\theta_j = \underline{l}_j' \underline{\beta}$ $j=1,2,\dots,m$ é estimável e L for de posto completo (m) e $m=k$.

(Estas condições são satisfeitas para $L\underline{\beta}$ conjunto base de funções estimáveis de $\underline{\beta}$).

Teorema 13.2.7, Graybill

Verifica-se que se $\underline{\Theta} = L\underline{\beta}$ é uma reparametrização, então o modelo

$$r(L) = m = k \quad L_{m \times p}$$

$$\underline{y} = X\underline{\beta} + \underline{\epsilon} \quad (1)$$

pode ser escrito como

$$\underline{y} = Q\underline{\Theta} + \underline{\epsilon} \quad \underline{\Theta} \text{ vetor } \begin{cases} m \times 1 \\ \parallel \\ k \times 1 \end{cases}$$

A matriz de planejamento $n \times k$ de posto completo
 $r(Q) = k$

Obs: Para cada L , Q é única e é dada por $Q = XL'(LL')^{-1}$.

Teorema 5

Seja $\underline{Y} = X\beta + \underline{\epsilon}$ um modelo de posto incompleto e $\underline{Y} = Q\theta + \underline{\epsilon}$ uma reparametrização desse modelo. O estimador NVUVM de qualquer função estimável de β é o mesmo nos dois modelos e pode ser obtido através das equações normais de qualquer um dos modelos. O estimador NVUVM de θ^2 também é o mesmo em ambos os modelos.

Obs: Se $\theta = L\beta$ é uma reparametrização e $\theta_1 = L_1\beta$ é outra reparametrização, então $\exists B_{K \times K}$ não singular tal que $L_1 = BL$.

Exemplo

Modelo de Análise de Variância, 1 fator com 2 níveis, 3 observações por casela

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ y_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} + \underline{\epsilon}$$

$$n=6 \quad p=3 \quad K=2$$

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij} \quad \begin{matrix} i=1,2 \\ j=1,2,3 \end{matrix}$$

$$\beta' = [\mu \quad \tau_1 \quad \tau_2]$$

$$\underline{L}'_1 = (1 \ 1 \ 0) \quad \text{e} \quad \underline{L}'_2 = (1 \ 0 \ 1) \text{ são LI, } L = \begin{bmatrix} \underline{L}'_1 \\ \underline{L}'_2 \end{bmatrix}$$

$r(L)=2$ e as componentes de $L\beta$ são estimáveis.

Portanto $L\beta = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1' \\ \tilde{y}_2' \end{bmatrix}$ β é um conjunto base de funções

estimáveis de β e $\tilde{\theta} = L\beta$ é uma reparametrização.

$$L\beta = \begin{bmatrix} \mu + \tau_1 \\ \mu + \tau_2 \end{bmatrix} = \tilde{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \text{ e o modelo reparametrizado fica}$$

$$\underset{6 \times 2}{\tilde{Y}} = \underset{6 \times 2}{Q} \underset{2 \times 1}{\tilde{\theta}} + \underset{6 \times 1}{\varepsilon} \quad \text{para } \theta_1 = E(Y_{1j}) \quad \theta_2 = E(Y_{2j}) \text{ e}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q\tilde{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$r(Q) = K = 2$$

Parametrizações da média da casela

$$\hat{\tilde{\theta}} = (Q'Q)^{-1}Q'\tilde{Y}$$

$$Q'\tilde{Y} = \begin{bmatrix} Y_{1\cdot} \\ Y_{2\cdot} \end{bmatrix} \quad Q'Q = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (Q'Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\tilde{\theta}} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Y_{1\cdot}}{3} \\ \frac{Y_{2\cdot}}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_1 \\ \bar{Y}_2 \end{bmatrix} \quad \therefore E(\hat{Y}_{1j}) = \bar{Y}_1 \\ E(\hat{Y}_{2j}) = \bar{Y}_2$$

Verificar que $Q = XL'(LL')^{-1}$

Resolução via modelo com matriz de planejamento de posto incompleto

$$X'X = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad X'Y = \begin{bmatrix} Y_{..} \\ Y_{1.} \\ Y_{2.} \end{bmatrix}$$

$$Y_{..} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 Y_{ij} \quad Y_{1.} = \sum_{j=1}^3 Y_{1j} \rightarrow \text{total da 1}^{\text{a}} \text{ casela}$$

$$Y_{2.} = \sum_{j=1}^3 Y_{2j} \rightarrow \text{total da 2}^{\text{a}} \text{ casela}$$

Equações Normais:

$$\begin{cases} 6\hat{\mu}_0^* + 3\hat{\tau}_1^* + 3\hat{\tau}_2^* = Y_{..} \\ 3\hat{\mu}_0^* + 3\hat{\tau}_1^* = Y_{1.} \\ 3\hat{\mu}_0^* + \dots + 3\hat{\tau}_2^* = Y_{2.} \end{cases} \quad \hat{\beta}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{Y}_1 \\ \bar{Y}_2 \end{bmatrix} \text{ é uma solução do sistema}$$

Como $L\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \beta = \begin{bmatrix} \mu + \tau_1 \\ \mu + \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(Y_{1j}) \\ E(Y_{2j}) \end{bmatrix}$ é estimável,

$$\begin{bmatrix} \hat{\mu} + \hat{\tau}_1 \\ \hat{\mu} + \hat{\tau}_2 \end{bmatrix} = L\hat{\beta}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{\beta}_0 \text{ é o estimador}$$

NVUM de $L\beta$.

$$L\hat{\beta}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mu} + \hat{\tau}_1 \\ \hat{\mu} + \hat{\tau}_2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore E(\gamma_{1j}) = \bar{y}_1 \quad E(\gamma_{2j}) = \bar{y}_2.$$

Uso de Restrições

$$\left\{ \begin{array}{l} 6\hat{\mu}_0^* + 3\hat{\tau}_1^* + 3\hat{\tau}_2^* = \gamma_{..} \\ 3\hat{\mu}_0^* + 3\hat{\tau}_1^* = \gamma_{1.} \\ 3\hat{\mu}_0^* + \dots + 3\hat{\tau}_2^* = \gamma_{2.} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow \text{combinações lineares das} \\ \text{outras} \\ \rightarrow \text{infinitas soluções} \end{array}$$

$$\hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2 = 0 \rightarrow \text{restrição} \Rightarrow \hat{\tau}_1 = -\hat{\tau}_2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3\hat{\mu} + 3\hat{\tau}_1 = \gamma_{1.} \\ 3\hat{\mu} - 3\hat{\tau}_1 = \gamma_{2.} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} 6\hat{\mu} = \gamma_{..} \quad \hat{\mu} = \bar{y} \\ \hat{\tau}_1 = \frac{\gamma_{1.} - 3\bar{y}}{3} \quad \hat{\tau}_2 = \frac{3\bar{y} - \gamma_{1.}}{3} \end{array}$$

$\rightarrow$ Solução única devido à restrição.

$$E(\gamma_{1j}) = \hat{\mu} + \hat{\tau}_1 = \bar{y} + \frac{\gamma_{1.} - 3\bar{y}}{3} = \frac{\gamma_{1.}}{3} = \bar{y}_1$$

$$E(\gamma_{2j}) = \hat{\mu} + \hat{\tau}_2 = \bar{y} + \frac{3\bar{y} - \gamma_{1.}}{3} = \frac{\gamma_{2.}}{3} = \bar{y}_2$$

4.3 - Testes de Hipóteses e Intervalos de Confiança

$$\underline{Y} = X \underline{\beta} + \underline{\varepsilon} \quad \underline{\varepsilon} \sim N(\underline{0}, \sigma^2 I)$$

X - matriz $n \times p$ $r(X) = k < p < n$

Definição

Uma hipótese é dita "testável" se puder ser escrita em termos de funções estimáveis.

Seja C - matriz $s \times p$ de constantes, $s \leq k$.

Uma hipótese linear $C \underline{\beta} = \underline{m}$ será testável se cada linha de $C \underline{\beta}$ for uma função estimável:

$$C \underline{\beta} = \begin{bmatrix} \underline{c}_1' \\ \underline{c}_2' \\ \vdots \\ \underline{c}_s' \end{bmatrix} \underline{\beta} = \begin{bmatrix} \underline{c}_1' \underline{\beta} \\ \underline{c}_2' \underline{\beta} \\ \vdots \\ \underline{c}_s' \underline{\beta} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \underline{c}_i' \underline{\beta} \text{ é estimável} \\ i = 1, 2, \dots, s \end{array}$$

Além disso, $\underline{c}_i' \underline{\beta}$ estimável $\Rightarrow \underline{c}_i' = \underline{t}_i' X \Rightarrow$

$$C = \begin{bmatrix} \underline{t}_1' X \\ \underline{t}_2' X \\ \vdots \\ \underline{t}_s' X \end{bmatrix} = T X \quad \text{para } T = \begin{bmatrix} \underline{t}_1' \\ \underline{t}_2' \\ \vdots \\ \underline{t}_s' \end{bmatrix}.$$

Serão consideradas apenas hipóteses $C\beta$, onde as componentes de $C\beta$ são um conjunto de funções estimáveis linearmente independentes. Desta forma, C será de posto completo, $r(C) = A \leq K$.

$$H_0: C\beta = m$$

$$C \text{ matriz } A \times p, \quad r(C) = A \leq K$$

$$H_a: C\beta \neq m$$

$$C\beta \text{ estimável} \Rightarrow C = T' X$$

$A \times n \quad n \times p$

Estatística de Teste (da razão de verossimilhança generalizada).

$$W = \frac{(C\hat{\beta}^* - m)' [C(X'X)^- C']^{-1} (C\hat{\beta}^* - m)}{A \hat{\sigma}^2}$$

onde

$\hat{\beta}^*$ - qualquer solução do sistema de equações normais

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(Y'Y - \hat{\beta}^{*'} X' Y)}{n - K}$$

$(X'X)^-$ uma inversa generalizada de $X'X$.

Temos que

$$C\hat{\beta}^* \sim N_A(C\beta, \sigma^2 C(X'X)^- C') \quad [\text{pelo teorema 4, item a)},$$

$$L\hat{\beta}^* \sim N_A(L\beta, \sigma^2 LGL') \quad \text{para } L\beta \text{ estimável}]$$

$$\Rightarrow C\hat{\beta}^* - m \sim N_m(C\beta - m, \sigma^2 C(X'X)^- C')$$

Como $\frac{[C(X'X)^- C']^{-1}}{\sigma^2} C(X'X)^- C' \sigma^2 = I$ é idempotente,

$$Q = \frac{(C\hat{\beta}^* - m)' [C(X'X)^- C']^{-1} (C\hat{\beta}^* - m)}{\sigma^2} \chi_{A, \lambda}^2$$

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2} (C\beta - m)' [C(X'X)^- C']^{-1} (C\beta - m)$$

$$V = \frac{(n-k) \hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-k}^2 \quad (\text{teorema 4, item b})$$

Q e V são independentes (teorema 4, item c)

$$\therefore W = \frac{Q/A}{V/(n-k)} \sim F_{A, n-k, \lambda}$$

Sob $H_0: C\beta = m, \lambda = 0$ e $W \sim F_{A, n-k}$.

Rejeitamos H_0 se $W > a$, $F(F_{\lambda, n-k}, a) = \alpha$.

Observações:

1- W é invariante com $(X'X)^{-}$ pois $C\hat{\beta}^*$ e $\hat{\sigma}^2$ são invariantes e $C(X'X)^{-}C' = \underbrace{TX(X'X)^{-}X'T}_{\text{invariante}}$ é invariante.

2- Hipóteses do tipo $H_0: \beta = \beta_0$ não podem ser testadas pois β não é estimável

3- $C\beta$ estimável $\Rightarrow C(X'X)^{-}C'$ é não singular
(Searle, pag 189)

4- Em alguns casos, o, o numerador de W , pode ser calculado mesmo que $C\beta$ não seja estimável, pois $[C(X'X)^{-}C']^{-1}$ pode existir.

(Estimabilidade $\Rightarrow [C(X'X)^{-}C']^{-1}$ existe,

$\exists [C(X'X)^{-}C']^{-1} \not\Rightarrow C\beta$ é estimável)

Desta forma, a verificação de que $C\beta$ é estimável é essencial.

Exemplo (continuações)

Peso de 6 plantas de três tipos

Normal				atípica		alevante
101	105	94		84	88	32

y_{ij} - peso da j -ésima planta do i -ésimo tipo

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ y_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} + \underline{\epsilon}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (X'X)^{-}$$

$$\hat{\beta}^* = [0 \quad 100 \quad 86 \quad 32]' \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{70}{3} \quad \left. \vphantom{\hat{\beta}^*} \right\} \begin{array}{l} \text{calculados} \\ \text{anteriormente} \end{array}$$

$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 + 10$ $\alpha_1 - \alpha_2$ é estimável, H_0 é testável

$H_0: C\beta = m$ para $C = [0 \quad +1 \quad -1 \quad 0]$ $m = 10$

$$C\hat{\beta}^* = 14 \quad C(X'X)^{-1}C' = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{5}{6}$$

$$W = \frac{4 \cdot \frac{6}{5} \cdot 4}{1 \cdot \frac{70}{3}} = \frac{144}{175} \quad \text{Não rejeitamos } H_0 \text{ aos níveis usuais.}$$

$$H_0: \mu + \alpha_1 = \mu + \alpha_2 = 90 \\ (E(Y_{1j}) = E(Y_{2j}) = 90)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu + \alpha_1 = 90 \\ \mu + \alpha_2 = 90 \end{cases}$$

$\mu + \alpha_1$ e $\mu + \alpha_2$ são estimáveis

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C\hat{\beta}^* = \begin{bmatrix} 100 \\ 86 \end{bmatrix} \quad C\hat{\beta}^* - \tilde{m} = \begin{bmatrix} 10 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$C(X'X)^{-1}C' = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad [C(X'X)^{-1}C']^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$W = \frac{\begin{bmatrix} 10 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ -4 \end{bmatrix}}{2 \cdot \frac{70}{3}} = \frac{249}{35}$$

$H_0: \alpha_1 + \alpha_2 = 220$ não é testável

Basta provar que $\alpha_1 + \alpha_2$ não é estimável.