

## Variáveis Aleatórias Contínuas

### 7.1 Introdução

Neste capítulo iremos estudar modelos probabilísticos para variáveis aleatórias contínuas, ou seja, variáveis para as quais os possíveis valores pertencem a um intervalo de números reais. A definição dada no capítulo anterior, para v.a. discreta, deve ser modificada como segue.

**Definição.** Uma função  $X$ , definida sobre o espaço amostral  $\Omega$  e assumindo valores num intervalo de números reais, é dita uma *variável aleatória contínua*.

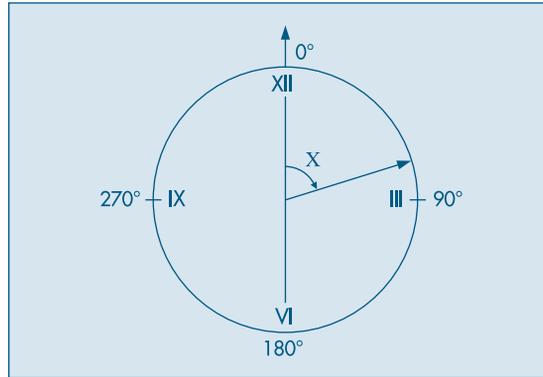
No Capítulo 2 vimos alguns exemplos de variáveis contínuas, como o salário de indivíduos, alturas etc. A característica principal de uma v.a. contínua é que, sendo resultado de uma mensuração, o seu valor pode ser pensado como pertencendo a um intervalo ao redor do valor efetivamente observado. Por exemplo, quando dizemos que a altura de uma pessoa é 175 cm, estamos medindo sua altura usando cm como unidade de medida e portanto o valor observado é, na realidade, um valor entre 174,5 cm e 175,5 cm.

Vejamos um exemplo para motivar a discussão que se segue.

**Exemplo 7.1.** O ponteiro dos segundos de um relógio mecânico pode parar a qualquer instante, devido a algum defeito técnico, ou término da bateria, e vamos indicar por  $X$  o ângulo que esse ponteiro forma com o eixo imaginário passando pelo centro do mostrador e pelo número XII, conforme mostra a Figura 7.1.

**Tabela 7.1:** Distribuição uniforme discreta.

$x$	0°	6°	12°	18°	...	348°	354°
$p(x)$	1/60	1/60	1/60	1/60	...	1/60	1/60

**Figura 7.1:** Ilustração de uma v.a.  $X$  discreta.

Medindo esse ângulo  $X$  em graus e lembrando que:

- (i) o ponteiro deve dar 60 “saltos” (ele dá um salto em cada segundo) para completar uma volta;
- (ii) acreditamos que o ponteiro tenha probabilidade igual de parar em qualquer ponto, então, a v.a.  $X$  tem distribuição uniforme discreta, com função de probabilidade dada pela Tabela 7.1 e representada graficamente na Figura 7.2.

**Figura 7.2:** Distribuição uniforme discreta.

Considerando esse mesmo problema com um relógio elétrico, para o qual o ponteiro dos segundos move-se *continuamente*, necessitamos de um outro modelo para representar a v.a.  $X$ . Primeiro, observamos que o conjunto dos possíveis valores de  $X$  não é mais um conjunto discreto de valores, pois  $X$  pode assumir qualquer valor do intervalo  $[0,360) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 360\}$ . Em segundo lugar, como no caso do relógio mecânico, continuamos a acreditar que não exista uma região de preferência para o ponteiro parar. Como existem infinitos pontos nos quais o ponteiro pode parar, cada um com igual probabilidade, se fôssemos usar o mesmo método usado para a v.a. discreta uniforme, cada ponto teria probabilidade de ocorrer igual a zero. Assim não tem muito sentido falar na probabilidade de que o ângulo  $X$  seja igual a certo valor,

pois essa probabilidade sempre será igual a zero. Entretanto, podemos determinar a probabilidade de que  $X$  esteja compreendido entre dois valores quaisquer. Por exemplo, usando a Figura 7.1 como referência, a probabilidade de o ponteiro parar no intervalo compreendido entre os números XII e III é  $1/4$ , pois esse intervalo corresponde a  $1/4$  do intervalo total.

Podemos, pois, escrever

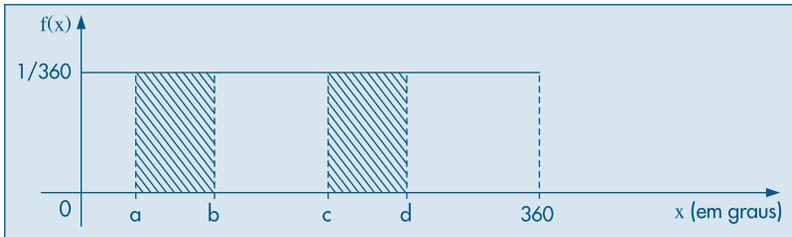
$$P(0^\circ \leq X \leq 90^\circ) = \frac{1}{4}.$$

Do mesmo modo, a probabilidade  $P(120^\circ \leq X \leq 150^\circ) = 1/12$ . Por menor que seja o intervalo, sempre poderemos calcular a probabilidade de o ponteiro parar num ponto qualquer desse intervalo. E é fácil verificar que, nesse caso, dados dois números  $a$  e  $b$ , tais que  $0^\circ \leq a < b < 360^\circ$ , a probabilidade de  $X \in [a, b)$  é

$$P(a \leq X < b) = \frac{b - a}{360^\circ}$$

Através da divisão do intervalo  $[0^\circ, 360^\circ)$  em pequenos subintervalos, podemos construir um histograma para as probabilidades da v.a.  $X$  (como fizemos para v.a. contínuas no Capítulo 2). Ou ainda, como naquele capítulo, fazendo esses intervalos tenderem a zero, podemos construir o histograma alisado da v.a.  $X$ , apresentado na Figura 7.3.

**Figura 7.3:** Histograma alisado: distribuição uniforme contínua.



O histograma alisado da Figura 7.3 corresponde à seguinte função:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0^\circ \\ 1/360, & \text{se } 0^\circ \leq x < 360^\circ \\ 0, & \text{se } x \geq 360^\circ. \end{cases}$$

Como vimos na construção de histogramas, a área correspondente ao intervalo  $[a, b)$  (hachurada na Figura 7.3) deve indicar a probabilidade de a variável estar entre  $a$  e  $b$ . Matematicamente, isso é expresso por meio da integral da função entre  $a$  e  $b$ ; então,

$$P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{1}{360} dx = \frac{b - a}{360},$$

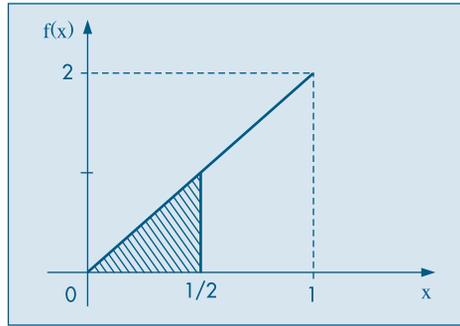
pois a integral definida de uma função entre dois pontos determina a área sob a curva representativa da função, compreendida entre esses dois pontos.

A função  $f(x)$  é chamada *função densidade de probabilidade* (f.d.p.) da v.a.  $X$ .

Podemos construir modelos teóricos para variáveis aleatórias contínuas, escolhendo adequadamente as funções densidade de probabilidade. Teoricamente, qualquer função  $f$ , que seja não negativa e cuja área total sob a curva seja igual à unidade, caracterizará uma v.a. contínua.

**Exemplo 7.2.** Se  $f(x) = 2x$ , para  $0 \leq x \leq 1$ , e zero fora desse intervalo, vemos que  $f(x) \geq 0$ , para qualquer  $x$ , e a área sob o gráfico de  $f(x)$  é unitária (verifique na Figura 7.4). Logo, a função  $f$  pode representar a função densidade de uma v.a. contínua  $X$ .

**Figura 7.4:** f.d.p. da v.a.  $X$  do Exemplo 7.2.



Para esse caso,  $P(0 \leq X \leq 1/2)$  é igual à área do triângulo de base  $1/2$  e altura  $1$ , hachurado na Figura 7.4; logo, a probabilidade em questão é

$$P(0 \leq X \leq 1/2) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \times 1 \right) = \frac{1}{4}.$$

Observamos, então, que a probabilidade de essa v.a. assumir um valor pertencente ao intervalo  $[0, 1/2)$  é menor que a probabilidade de a variável assumir um valor pertencente ao intervalo  $[1/2, 1)$ .

A comparação das funções densidade dos dois últimos exemplos ajuda a entender seu significado. No primeiro exemplo, consideremos dois intervalos,  $I_1 = [a, b)$  e  $I_2 = [c, d)$ , contidos no intervalo  $[0,360)$ , com a mesma amplitude ( $b - a = d - c$ ); então,

$$P(X \in I_1) = P(X \in I_2).$$

O mesmo não acontece no segundo exemplo: dados dois intervalos de mesma amplitude, aquele mais próximo de  $1$  irá apresentar maior probabilidade. Ou seja, a probabilidade de que a v.a.  $X$  assuma um valor num intervalo de amplitude fixa depende da posição do intervalo; existem regiões com maior *chance* de ocorrer, e o que determina esse fato é a função densidade de probabilidade. Portanto, a f.d.p. é um indicador da concentração de “massa” (probabilidade) nos possíveis valores de  $X$ . Convém ressaltar ainda que  $f(x)$  não representa a probabilidade de ocorrência de algum evento. A área sob a curva entre dois pontos é que irá fornecer a probabilidade.

## Problemas

1. Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

- (a) Mostre que esta é uma f.d.p.  
 (b) Calcule a probabilidade de  $X > 10$ .

2. Uma v.a.  $X$  tem distribuição triangular no intervalo  $[0, 1]$  se sua f.d.p. for dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ Cx, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ C(1-x), & 1/2 \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

- (a) Qual valor deve ter a constante  $C$ ?  
 (b) Faça o gráfico de  $f(x)$ .  
 (c) Determine  $P(X \leq 1/2)$ ,  $P(X > 1/2)$  e  $P(1/4 \leq X \leq 3/4)$ .
3. Suponha que estamos atirando dardos num alvo circular de raio 10 cm, e seja  $X$  a distância do ponto atingido pelo dardo ao centro do alvo. A f.d.p. de  $X$  é

$$f(x) = \begin{cases} kx, & \text{se } 0 \leq x \leq 10 \\ 0, & \text{para os demais valores.} \end{cases}$$

- (a) Qual a probabilidade de acertar o centro do alvo, se esse for um círculo de 1 cm de raio?  
 (b) Mostre que a probabilidade de acertar qualquer círculo concêntrico é proporcional à sua área.
4. Encontre o valor da constante  $c$  se

$$f(x) = \begin{cases} c/x^2, & x \geq 10 \\ 0, & x < 10 \end{cases}$$

for uma densidade. Encontre  $P(X > 15)$ .

## 7.2 Valor Médio de uma Variável Aleatória Contínua

Do que foi visto até aqui, deduz-se que qualquer função  $f(\cdot)$ , não-negativa, tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1,$$

define uma v.a. contínua  $X$ , ou seja, cria um modelo teórico para as frequências relativas de uma v.a. contínua. A área compreendida entre dois valores,  $a$  e  $b$ , da abscissa  $x$ , sob a curva representativa de  $f(x)$ , dá a probabilidade (proporção teórica)

da variável pertencer ao intervalo limitado pelos dois valores. Usando o conceito de integral, podemos escrever

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx. \quad (7.1)$$

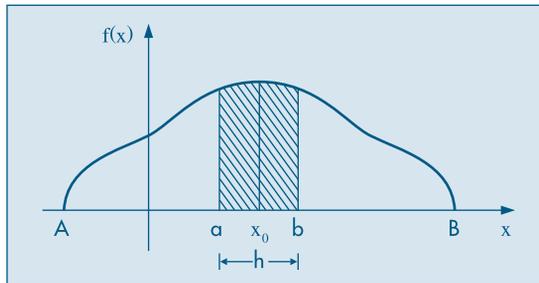
Vejamos agora como podemos definir a esperança (valor médio ou média) de uma v.a. contínua. Para isso, usaremos um artifício semelhante àquele usado na seção 3.1 para calcular a média das variáveis quantitativas, com os dados agrupados em classes. Lá substituímos todos os valores de um intervalo (classe) por um único valor aproximado (o ponto médio do intervalo), e agimos como se a variável fosse do tipo discreto. Aqui iremos repetir esse artifício.

Consideremos a v.a.  $X$  com função densidade  $f(x)$  e dois pontos  $a$  e  $b$ , bem próximos, isto é,  $h = b - a$  é pequeno, e consideremos  $x_0$  o ponto médio do intervalo  $[a, b]$ . Observando a Figura 7.5 é fácil verificar que

$$P(a \leq X \leq b) \approx h f(x_0), \quad (7.2)$$

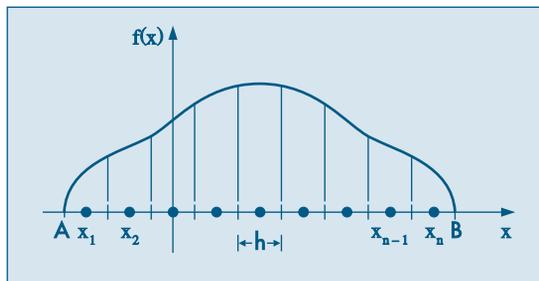
o que significa aproximar a área da parte hachurada pelo retângulo de base  $h$  e altura  $f(x_0)$ . É fácil ver que a aproximação melhora com  $h$  tendendo a zero.

**Figura 7.5:** Área hachurada representa  $P(a \leq X \leq b)$ .



Dividamos agora o intervalo  $[A, B]$ , onde  $f(x) > 0$ , em  $n$  partes de amplitudes iguais a  $h = (B - A)/n$  (Figura 7.6) e consideremos os pontos médios desses intervalos,  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

**Figura 7.6:** Partição do intervalo  $[A, B]$ .



Consideremos a v.a.  $Y_n$ , assumindo os valores  $x_1, \dots, x_n$  com as probabilidades

$$p_i = P(Y_n = x_i) \approx f(x_i)h.$$

Dessa maneira, e de acordo com a definição de esperança, temos

$$E(Y_n) = \sum_{i=1}^n x_i p_i \approx \sum_{i=1}^n x_i f(x_i)h,$$

que será uma aproximação da esperança  $E(X)$ . Para determinar  $E(X)$  com maior precisão, podemos aumentar o número de intervalos, diminuindo sua amplitude  $h$ . No limite, quando  $h \rightarrow 0$ , teremos o valor de  $E(X)$ . Definamos, pois,

$$E(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(Y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i f(x_i)h. \quad (7.3)$$

Mas da definição de integral (veja Morettin *et al.*, 2005), temos que, se o limite (7.3) existe, ele define a integral de  $x f(x)$  entre  $A$  e  $B$ , isto é,

$$E(X) = \int_A^B x f(x) dx. \quad (7.4)$$

**Exemplo 7.3.** Continuando com o Exemplo 7.2, observamos que, dividindo o intervalo  $[0, 1]$  em  $n$  subintervalos, teremos  $h = 1/n$ ,  $x_i = (2i - 1)/2n$  e  $f(x_i) = (2i - 1)/n$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Portanto,

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{2i-1}{2n} \right) \left( \frac{2i-1}{n} \right) \left( \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2n^3} \sum_{i=1}^n (2i-1)^2 \\ &= \frac{1}{2n^3} \left\{ \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3} \right\} = \frac{1}{6} \left( 2 + \frac{1}{n} \right) \left( 2 - \frac{1}{n} \right), \end{aligned}$$

na qual usamos o conhecido resultado que dá a soma dos quadrados dos primeiros  $n$  números ímpares. Logo,

$$E(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left( 2 + \frac{1}{n} \right) \left( 2 - \frac{1}{n} \right) = \frac{2}{3}.$$

O mesmo resultado é obtido diretamente da relação (7.4):

$$E(X) = \int_0^1 (x)(2x) dx = \left[ \frac{2x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

**Exemplo 7.4.** No caso do relógio elétrico do Exemplo 7.1, obtemos

$$E(X) = \int_0^{360} x \frac{1}{360} dx = \left[ \frac{1}{360} \frac{x^2}{2} \right]_0^{360} = 180,$$

que é o valor esperado devido à distribuição uniforme das frequências teóricas.

Como a função  $f(x)$  é sempre não-negativa, podemos escrever a esperança como

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx. \quad (7.5)$$

A extensão do conceito de variância para v.a. contínuas é feita de maneira semelhante e o equivalente à expressão (6.2) é

$$\text{Var}(X) = E[(X - E(X))^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x)dx. \quad (7.6)$$

**Exemplo 7.5.** Para os dois exemplos vistos anteriormente, teremos:

(i) Para o caso do relógio,

$$\text{Var}(X) = \int_0^{360} (x - 180)^2 \frac{1}{360} dx = \frac{1}{360} \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{360x^2}{2} + 180^2x \right]_0^{360} = 10.800;$$

(ii) Para o Exemplo 7.2,

$$\text{Var}(X) = \int_0^1 \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 2xdx = 2 \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{9} + \frac{2x^2}{9} \right]_0^1 = \frac{1}{18}.$$

Como no caso de v.a. discretas, o desvio padrão de uma v.a. contínua  $X$  é definido como

$$DP(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}, \quad (7.7)$$

que é dado na mesma unidade de medida do que  $X$ . Deixamos a cargo do leitor a verificação de que o seguinte resultado vale, como consequência de (7.6):

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2. \quad (7.8)$$

Como frisamos no Capítulo 6, frequentemente usaremos outros símbolos para indicar os parâmetros discutidos, a saber:

$$\begin{aligned} E(X) &= \mu(X), \\ \text{Var}(X) &= \sigma^2(X), \\ DP(X) &= \sigma(X), \end{aligned}$$

ou simplesmente  $\mu$ ,  $\sigma^2$  e  $\sigma$ , respectivamente, se não houver possibilidade de confusão.

### 7.3 Função de Distribuição Acumulada

Dada uma v.a.  $X$  com função densidade de probabilidade  $f(x)$ , podemos definir a sua função de distribuição acumulada,  $F(x)$ , do mesmo modo como foi definida no Capítulo 6:

$$F(x) = P(X \leq x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (7.9)$$

De (7.1) segue-se que

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt, \quad (7.10)$$

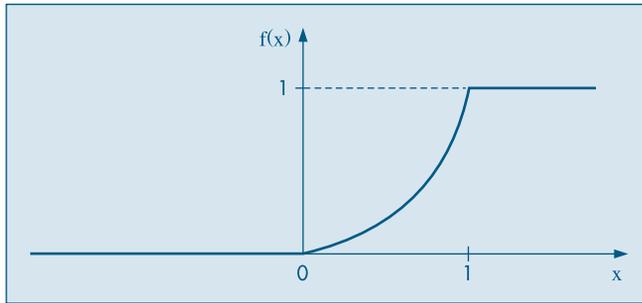
para todo real  $x$ .

**Exemplo 7.6.** Retomemos o Exemplo 7.2. Temos

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ \int_0^x 2t dt = x^2, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \int_0^1 2t dt + \int_1^x 0 dt = 1, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

O gráfico de  $F(x)$  está na Figura 7.7.

**Figura 7.7:** f.d.a. da v.a.  $X$  do Exemplo 7.6.



De (7.9), vemos que  $0 \leq F(x) \leq 1$ , para todo  $x$  real; além disso,  $F(x)$  é não-decrescente e possui as duas seguintes propriedades:

- (i)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ ,
- (ii)  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ .

No Exemplo 7.6 temos, efetivamente,  $F(x) = 0$ , para  $x < 0$  e  $F(x) = 1$ , para  $x \geq 1$ . Para v.a. contínuas, o seguinte resultado é importante.

**Proposição 7.1.** Para todos os valores de  $x$  para os quais  $F(x)$  é derivável temos

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Vamos usar esse resultado no exemplo a seguir.

**Exemplo 7.7.** Suponha que

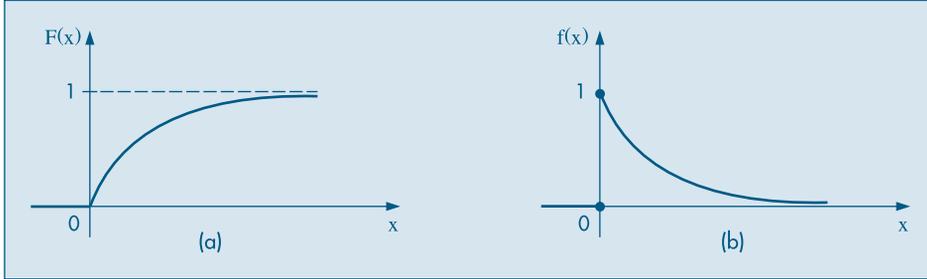
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1 - e^{-x}, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

seja a f.d.a. de uma v.a.  $X$ . Então,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ e^{-x}, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Na Figura 7.8 temos os gráficos dessas duas funções. Veremos que  $f(x)$  é um caso especial da densidade exponencial, a ser estudada na seção 7.4.3.

**Figura 7.8:** Distribuição exponencial ( $\beta = 1$ ) (a) f.d.a. (b) f.d.p.



Se  $a$  e  $b$  forem dois números reais quaisquer,

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a). \quad (7.11)$$

Esse resultado não será afetado se incluirmos ou não os extremos  $a$  e  $b$  na desigualdade entre parênteses.

## Problemas

5. Calcule a esperança, a variância e a f.d.a. da v.a.  $X$  do Problema 2.
6. Determine a esperança e a variância da v.a. cuja f.d.p. é

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen } x, & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

7. Calcule a média da v.a.  $X$  do Problema 4.
8. A v.a. contínua  $X$  tem f.d.p.

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & -1 \leq x \leq 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- (a) Se  $b$  for um número que satisfaz  $-1 < b < 0$ , calcule  $P(X > b | X < b/2)$ .
  - (b) Calcule  $E(X)$  e  $\text{Var}(X)$ .
9. Certa liga é formada pela mistura fundida de dois metais. A liga resultante contém certa porcentagem de chumbo,  $X$ , que pode ser considerada uma v.a. com f.d.p.

$$f(x) = \frac{3}{5} 10^{-5} x(100 - x), \quad 0 \leq x \leq 100.$$

Suponha que  $L$ , o lucro líquido obtido na venda dessa liga (por unidade de peso), seja dado por  $L = C_1 + C_2X$ . Calcule  $E(L)$ , o lucro esperado por unidade.

10. A demanda diária de arroz num supermercado, em centenas de quilos, é uma v.a. com f.d.p.

$$f(x) = \begin{cases} 2x/3, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ -x/3 + 1, & \text{se } 1 \leq x < 3 \\ 0, & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 3. \end{cases}$$

- (a) Qual a probabilidade de se vender mais do que 150 kg, num dia escolhido ao acaso?  
 (b) Em 30 dias, quanto o gerente do supermercado espera vender?  
 (c) Qual a quantidade de arroz que deve ser deixada à disposição dos clientes diariamente para que não falte arroz em 95% dos dias?
11. Suponha que  $X$  tenha f.d.p.  $f(x)$  do Problema 1. Calcule  $E(X)$  e  $\text{Var}(X)$ .
12. Seja  $X$  com densidade

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x^2), & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule a média e a variância de  $X$ .

## 7.4 Alguns Modelos Probabilísticos para Variáveis Aleatórias Contínuas

De modo geral, podemos dizer que as v.a. cujos valores resultam de algum processo de mensuração são v.a. contínuas. Alguns exemplos são:

- (a) o peso ou a altura das pessoas de uma cidade;  
 (b) a demanda diária de arroz num supermercado;  
 (c) o tempo de vida de uma lâmpada;  
 (d) o diâmetro de rolamentos de esferas; e  
 (e) erros de medidas em geral, resultantes de experimentos em laboratórios.

Dada uma v.a. contínua  $X$ , interessa saber qual a f.d.p. de  $X$ . Alguns modelos são freqüentemente usados para representar a f.d.p. de v.a. contínuas. Alguns dos mais utilizados serão descritos a seguir e, para uniformizar o estudo desses modelos, iremos em cada caso analisar:

- (a) definição;  
 (b) gráfico da f.d.p.;  
 (c) momentos:  $E(X), \text{Var}(X)$ ;  
 (d) função de distribuição acumulada (f.d.a.).

Outros modelos serão apresentados na seção 7.7.

### 7.4.1 O Modelo Uniforme

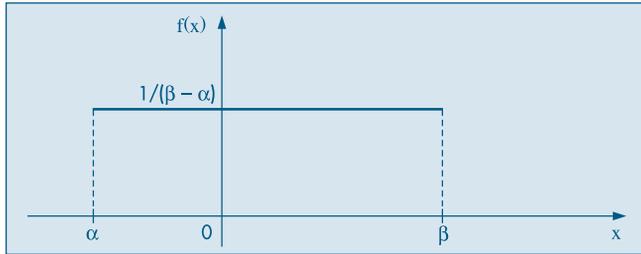
O modelo uniforme é uma generalização do modelo estudado no Exemplo 7.1 e é o modelo mais simples para v.a. contínuas.

- (a) **Definição.** A v.a.  $X$  tem distribuição uniforme no intervalo  $[\alpha, \beta]$  se sua f.d.p. é dada por

$$f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha}, & \text{se } \alpha \leq x \leq \beta, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (7.12)$$

- (b) **Gráfico.** A Figura 7.9 representa a função dada por (7.12).

**Figura 7.9:** Distribuição uniforme no intervalo  $[\alpha, \beta]$ .



- (c) **Momentos.** Pode-se mostrar (veja o Problema 29) que

$$E(X) = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad (7.13)$$

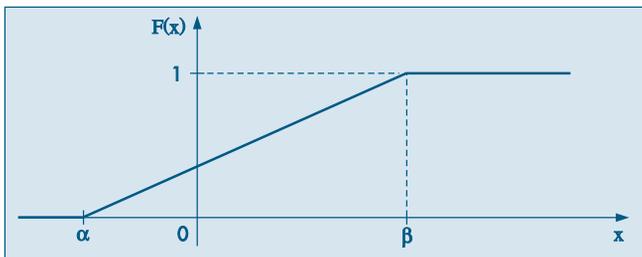
$$\text{Var}(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}. \quad (7.14)$$

- (d) **F.d.a.** A função de distribuição acumulada da uniforme é fácil de ser encontrada (veja o Problema 29):

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{se } x < \alpha \\ \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}, & \text{se } \alpha \leq x < \beta \\ 1, & \text{se } x \geq \beta, \end{cases} \quad (7.15)$$

cujo gráfico está na Figura 7.10.

**Figura 7.10:** f.d.a. de uma v.a. uniforme no intervalo  $[\alpha, \beta]$ .



Assim, para dois valores quaisquer  $c$  e  $d$ ,  $c < d$ , teremos

$$P(c < X \leq d) = F(d) - F(c),$$

que é obtida facilmente de (7.15).

Usaremos a notação

$$X \sim \mathcal{U}(\alpha, \beta)$$

para indicar que a v.a.  $X$  tem distribuição uniforme no intervalo  $[\alpha, \beta]$ .

**Exemplo 7.8.** Um caso particular bastante interessante é aquele em que  $\alpha = -1/2$  e  $\beta = 1/2$ . Indicando essa v.a. por  $U$ , teremos

$$f(u) = \begin{cases} 1, & \text{se } -1/2 \leq u \leq 1/2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Nessa situação temos que

$$E(U) = 0, \text{Var}(U) = 1/12$$

e a f.d.a. é dada por

$$F_U(u) = \begin{cases} 0, & \text{se } u < -1/2 \\ u + 1/2, & \text{se } -1/2 \leq u < 1/2 \\ 1, & \text{se } u > 1/2. \end{cases}$$

Por exemplo,

$$P(-1/4 \leq U \leq 1/4) = F_U(1/4) - F_U(-1/4) = 1/2.$$

Se quiséssemos facilitar o nosso trabalho, poderíamos tabelar os valores da f.d.a para essa variável  $U$ . Devido à simetria da área em relação a  $x = 0$ , poderíamos construir uma tabela indicando a função  $G(u)$ , tal que

$$G(u) = P(0 \leq U \leq u)$$

para alguns valores de  $u$  (veja o Problema 30).

Dada uma v.a. uniforme  $X$  qualquer, com parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , podemos definir a v.a.  $U$  como

$$U = \frac{X - \frac{\beta + \alpha}{2}}{\beta - \alpha}. \quad (7.16)$$

Segue-se que a transformação (7.16) leva uma uniforme no intervalo  $[\alpha, \beta]$  numa uniforme no intervalo  $[-1/2, 1/2]$  e para dois números quaisquer  $c$  e  $d$ , com  $c < d$ ,

$$P(c < X \leq d) = F(d) - F(c) = P\left(\frac{c - \frac{\beta + \alpha}{2}}{\beta - \alpha} < U \leq \frac{d - \frac{\beta + \alpha}{2}}{\beta - \alpha}\right) = F_U\left(\frac{d - \frac{\beta + \alpha}{2}}{\beta - \alpha}\right) - F_U\left(\frac{c - \frac{\beta + \alpha}{2}}{\beta - \alpha}\right).$$

Artifícios semelhantes a esse são muito úteis na construção de tabelas e programas para cálculos de probabilidades referentes a famílias de modelos.

Um outro caso importante é para  $\alpha = 0$  e  $\beta = 1$ . Um número aleatório é um valor gerado de uma v.a. com distribuição uniforme no intervalo  $[0, 1]$ . Veja Capítulo 9.

## 7.4.2 O Modelo Normal

Vamos introduzir, agora, um modelo fundamental em probabilidades e inferência estatística. Suas origens remontam a Gauss em seus trabalhos sobre erros de observações astronômicas, por volta de 1810, donde o nome de distribuição *gaussiana* para tal modelo.

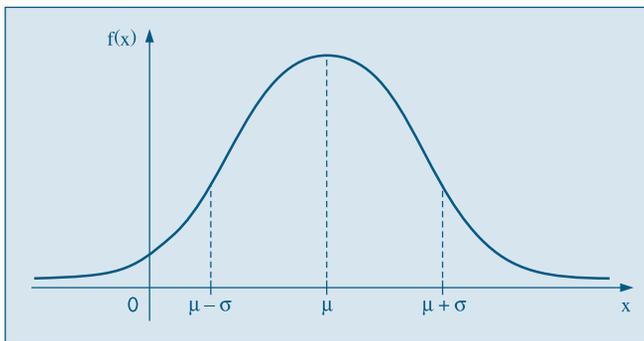
(a) **Definição.** Dizemos que a v.a.  $X$  tem *distribuição normal* com parâmetros  $\mu$  e  $\sigma^2$ ,  $-\infty < \mu < +\infty$  e  $0 < \sigma^2 < \infty$ , se sua densidade é dada por

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad -\infty < x < \infty. \quad (7.17)$$

Claramente,  $f(x; \mu, \sigma^2) \geq 0$ , para todo  $x$  e pode-se provar que  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x; \mu, \sigma^2) dx = 1$ . Veja o Problema 60.

(b) **Gráfico.** A Figura 7.11 ilustra uma particular *curva normal*, determinada por valores particulares de  $\mu$  e  $\sigma^2$ .

**Figura 7.11:** f.d.p. de uma v.a. normal com média  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma$ .



(c) **Momentos.** Pode-se demonstrar que (veja o Problema 32):

$$E(X) = \mu, \quad (7.18)$$

$$\text{Var}(X) = \sigma^2. \quad (7.19)$$

Além disso,  $f(x; \mu, \sigma^2) \rightarrow 0$ , quando  $x \rightarrow \pm\infty$ ,  $\mu - \sigma$  e  $\mu + \sigma$  são pontos de inflexão de  $f(x; \mu, \sigma^2)$ ,  $x = \mu$  é ponto de máximo de  $f(x; \mu, \sigma^2)$ , e o valor máximo é  $1/\sigma\sqrt{2\pi}$ . A densidade  $f(x; \mu, \sigma^2)$  é simétrica em relação à reta  $x = \mu$ , isto é,

$$f(\mu + x; \mu, \sigma^2) = f(\mu - x; \mu, \sigma^2), \quad (7.20)$$

para todo  $x$  real.

Para simplificar a notação, denotaremos a densidade da normal simplesmente por  $f(x)$  e escreveremos, simbolicamente,

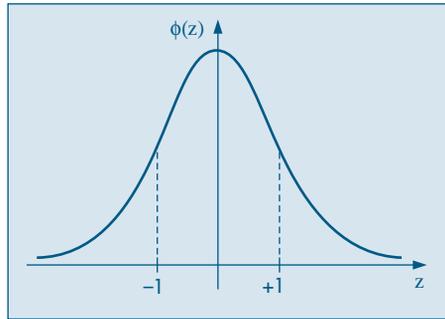
$$X \sim N(\mu, \sigma^2).$$

Quando  $\mu = 0$  e  $\sigma^2 = 1$ , temos uma distribuição *padrão* ou *reduzida*, ou brevemente  $N(0,1)$ . Para essa a função densidade reduz-se a

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \quad -\infty < z < \infty. \quad (7.21)$$

O gráfico da normal padrão está na Figura 7.12.

**Figura 7.12:** f.d.p. de uma v.a. normal padrão:  $Z \sim N(0, 1)$ .



Se  $X \sim N(\mu; \sigma^2)$ , então a v.a. definida por

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}, \quad (7.22)$$

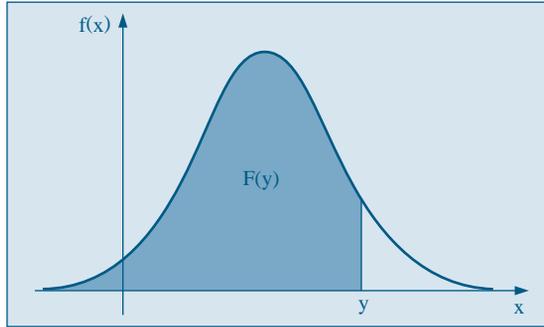
terá média zero e variância 1 (prove esses fatos). O que não é tão fácil mostrar é que  $Z$  também tem distribuição normal. Isso não será feito aqui.

A transformação (7.22) é fundamental para calcularmos probabilidades relativas a uma distribuição normal qualquer.

(d) **F.d.a.** A f.d.a.  $F(y)$  de uma v.a. normal  $X$ , com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$  é obtida integrando-se (7.17) de  $-\infty$  até  $y$ , ou seja,

$$F(y) = \int_{-\infty}^y f(x; \mu, \sigma^2) dx, \quad y \in \mathbb{R}. \quad (7.23)$$

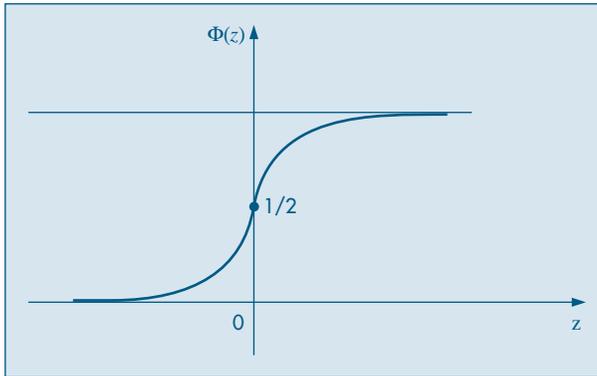
A integral (7.23) corresponde à área, sob  $f(x)$ , desde  $-\infty$  até  $y$ , como ilustra a Figura 7.13.

**Figura 7.13:** Representação gráfica de  $F(y)$  como área.

No caso específico da normal padrão, utilizamos a seguinte notação, que é universal:

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^y \phi(z) dz = 1/\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^y e^{-z^2/2} dz. \quad (7.24)$$

O gráfico de  $\Phi(z)$  é ilustrado na Figura 7.14.

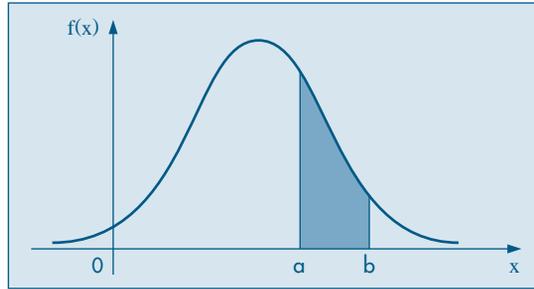
**Figura 7.14:** f.d.a. da normal padrão.

Suponha, então, que  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  e que queiramos calcular

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx, \quad (7.25)$$

onde  $f(x)$  é dada por (7.17). Ver Figura 7.15.

**Figura 7.15:** Ilustração gráfica da  $P(a \leq X \leq b)$  para uma v.a. normal.



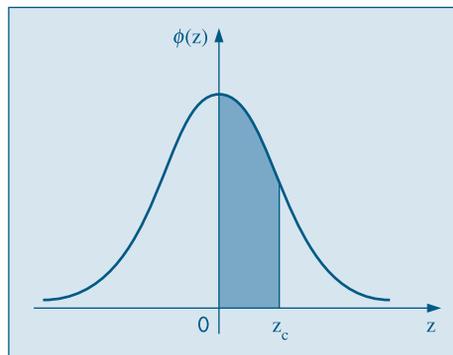
A integral (7.25) não pode ser calculada analiticamente, e portanto a probabilidade indicada só poderá ser obtida, aproximadamente, por meio de integração numérica. No entanto, para *cada* valor de  $\mu$  e *cada* valor de  $\sigma$ , teríamos de obter  $P(a < X < b)$  para diversos valores de  $a$  e  $b$ . Essa tarefa é facilitada através do uso de (7.22), de sorte que somente é necessário construir uma tabela para a distribuição normal padrão.

Vejamos, então, como obter probabilidades a partir da Tabela III. Essa tabela dá as probabilidades sob uma curva normal padrão, que nada mais são do que as correspondentes áreas sob a curva. A Figura 7.16 ilustra a probabilidade fornecida pela tabela, a saber,

$$P(0 \leq Z \leq z_c),$$

onde  $Z \sim N(0,1)$ .

**Figura 7.16:**  $P(0 \leq Z \leq z_c)$  fornecido pela Tabela III.



Se tomarmos, por exemplo,  $z_c = 1,73$ , segue-se que

$$P(0 \leq Z \leq 1,73) = 0,4582.$$

Calculemos mais algumas probabilidades (Figura 7.17):

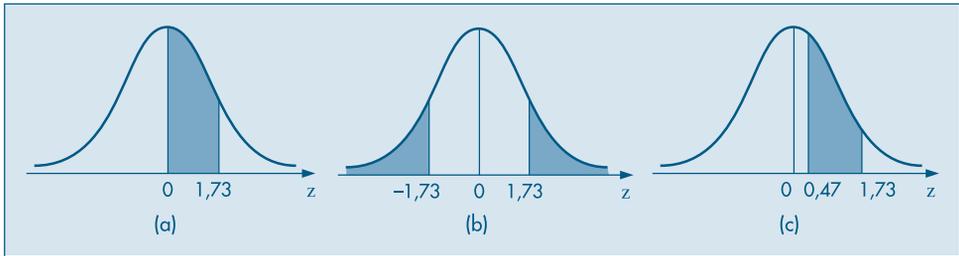
(a)  $P(-1,73 \leq Z \leq 0) = P(0 \leq Z \leq 1,73) = 0,4582$ , devido à simetria da curva.

(b)  $P(Z \geq 1,73) = 0,5 - P(0 \leq Z \leq 1,73) = 0,5 - 0,4582 = 0,0418$ , pois  $P(Z \geq 0) = 0,5 = P(Z \leq 0)$ .

(c)  $P(Z < -1,73) = P(Z > 1,73) = 0,0418$ .

(d)  $P(0,47 \leq Z \leq 1,73) = P(0 \leq Z \leq 1,73) - P(0 \leq Z \leq 0,47) = 0,4582 - 0,1808 = 0,2774$ .

**Figura 7.17:** Ilustração do cálculo de probabilidades para a  $N(0,1)$ .



Suponha, agora, que  $X$  seja uma v.a.  $N(\mu, \sigma^2)$ , com  $\mu = 3$  e  $\sigma^2 = 16$ , e queiramos calcular  $P(2 \leq X \leq 5)$ . Utilizando (7.22), temos

$$\begin{aligned} P(2 \leq X \leq 5) &= P\left(\frac{2 - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{5 - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{2 - 3}{4} \leq Z \leq \frac{5 - 3}{4}\right) = P\left(-\frac{1}{4} \leq Z \leq \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

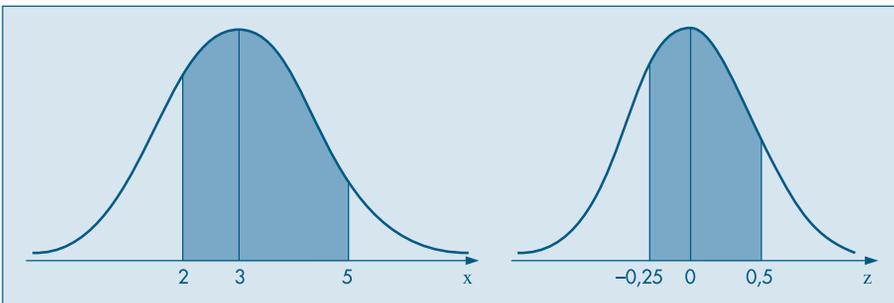
Portanto, a probabilidade de que  $X$  esteja entre 2 e 5 é igual à probabilidade de que  $Z$  esteja entre  $-0,25$  e  $0,5$  (Figura 7.18). Utilizando a Tabela III, vemos que

$$P(-0,25 \leq Z \leq 0,5) = 0,0987 + 0,1915 = 0,2902,$$

ou seja,

$$P(2 \leq X \leq 5) = 0,2902.$$

**Figura 7.18:** Ilustração do cálculo de  $P(2 \leq X \leq 5)$  para a v.a.  $N(3, 16)$ .



**Exemplo 7.9.** Os depósitos efetuados no Banco da Ribeira durante o mês de janeiro são distribuídos normalmente, com média de \$10.000,00 e desvio padrão de \$1.500,00. Um depósito é selecionado ao acaso dentre todos os referentes ao mês em questão. Encontrar a probabilidade de que o depósito seja:

- (a) \$10.000,00 ou menos;
- (b) pelo menos \$10.000,00;
- (c) um valor entre \$12.000,00 e \$15.000,00;
- (d) maior do que \$20.000,00.

Temos que  $\mu = 10.000$  e  $\sigma = 1.500$ . Seja a v.a.  $X =$  depósito.

$$(a) P(X \leq 10.000) = P\left(Z \leq \frac{10.000 - 10.000}{1.500}\right) = P(Z \leq 0) = 0,5.$$

$$(b) P(X \geq 10.000) = P(Z \geq 0) = 0,5.$$

$$(c) P(12.000 < X < 15.000) = P\left(\frac{12.000 - 10.000}{1.500} < Z < \frac{15.000 - 10.000}{1.500}\right) \\ = P(4/3 < Z < 10/3) = P(1,33 < Z < 3,33) = 0,09133.$$

$$(d) P(X > 20.000) = P\left(Z > \frac{20.000 - 10.000}{1.500}\right) = P(Z > 6,67) \approx 0.$$

### 7.4.3 O Modelo Exponencial

Outra distribuição importante e que tem aplicações em confiabilidade de sistemas, assunto de que já tratamos brevemente no Capítulo 5, é a exponencial.

(a) **Definição.** A v.a.  $T$  tem *distribuição exponencial* com parâmetro  $\beta > 0$  se sua f.d.p. tem a forma

$$f(t; \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-t/\beta}, & \text{se } t \geq 0 \\ 0, & \text{se } t < 0. \end{cases} \quad (7.26)$$

Escreveremos, brevemente,

$$T \sim \text{Exp}(\beta).$$

(b) **Gráfico.** O gráfico de  $f(t; \beta) = f(t)$  está ilustrado na Figura 7.8 (b), com  $\beta = 1$ .

(c) **Momentos.** Usando integração por partes, pode-se demonstrar que (veja o Problema 41):

$$E(T) = \beta, \quad (7.27)$$

$$\text{Var}(T) = \beta^2. \quad (7.28)$$

**Exemplo 7.10.** O tempo de vida (em horas) de um transistor pode ser considerado uma v.a com distribuição exponencial com  $\beta = 500$ . Segue-se que a vida média do transistor é  $E(T) = 500$  horas e a probabilidade de que ele dure mais do que a média é

$$\begin{aligned} P(T > 500) &= \int_{500}^{\infty} f(t) dt = 1/500 \int_{500}^{\infty} e^{-t/500} dt \\ &= 1/500 [-500e^{-t/500}]_{500}^{\infty} = e^{-1} = 0,3678. \end{aligned}$$

(d) **F.d.a.** Usando a definição (7.10), obtemos

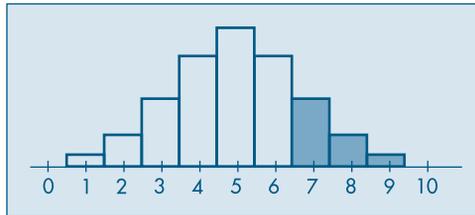
$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 0 \\ 1 - e^{-t/\beta}, & \text{se } t \geq 0. \end{cases} \quad (7.29)$$

O gráfico de  $F(t)$  está na Figura 7.8 (a), com  $\beta = 1$ .

## 7.5 Aproximação Normal à Binomial

Suponha que a v.a.  $Y$  tenha uma distribuição binomial com parâmetros  $n = 10$  e  $p = 1/2$  e queiramos calcular  $P(Y \geq 7)$ . Embora seja uma v.a. discreta, vimos no Capítulo 2 que é possível representá-la por meio de um histograma, como na Figura 7.19. Vemos que  $P(Y = 7)$  é igual à área do retângulo de base unitária e altura igual a  $P(Y = 7)$ , similarmente para  $P(Y = 8)$  etc. Logo,  $P(Y \geq 7)$  é igual à soma das áreas dos retângulos hachurados na Figura 7.19.

**Figura 7.19:** ( $P(Y \geq 7)$ ) para  $Y \sim b(10, 1/2)$ .



A idéia é aproximar tal área pela área sob uma curva normal, à direita de 6,5. Qual curva normal? Parece razoável considerar aquela normal de média

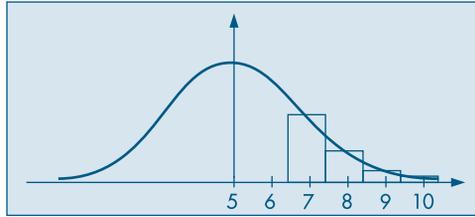
$$\mu = np = 10 \times \frac{1}{2} = 5$$

e variância

$$\sigma^2 = np(1 - p) = 10 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 2,5.$$

Veja a Figura 7.20.

**Figura 7.20:** Aproximação de  $P(Y \geq 7)$  pela área sob a  $N(5; 2,5)$ .



Chamando  $X$  tal variável, com distribuição normal,

$$P(Y \geq 7) \approx P(X \geq 6,5) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \geq \frac{6,5 - \mu}{\sigma}\right)$$

$$P\left(Z \geq \frac{6,5 - 5}{\sqrt{2,5}}\right) = P(Z \geq 0,94) = 0,174,$$

onde  $Z$  é, como sempre,  $N(0, 1)$ . Utilizando a Tabela I, vemos que a probabilidade verdadeira é 0,172.

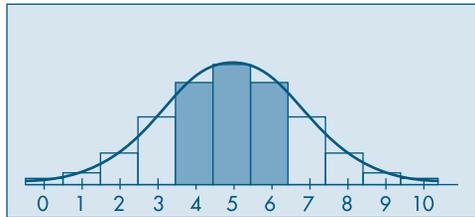
Vamos calcular agora  $P(3 < Y \leq 6) = P(Y = 4) + P(Y = 5) + P(Y = 6)$ . Vemos, através da Figura 7.21, que a aproximação a ser feita deve ser

$$P(3 < Y \leq 6) \approx P(3,5 \leq X \leq 6,5) = P\left(\frac{3,5 - 5}{1,58} \leq Z \leq \frac{6,5 - 5}{1,58}\right)$$

$$= P(-0,94 \leq Z \leq 0,94) = 0,653,$$

ao passo que a probabilidade verdadeira é 0,656.

**Figura 7.21:** Aproximação de  $P(3 < Y \leq 6)$ .



A justificativa formal de tal aproximação é dada pelo chamado Teorema Limite Central, que será visto no Capítulo 10. A aproximação é boa quando  $np > 5$  e  $n(1 - p) > 5$ .

## Problemas

13. A temperatura  $T$  de destilação do petróleo é crucial na determinação da qualidade final do produto. Suponha que  $T$  seja considerada uma v.a. com distribuição uniforme no intervalo  $(150, 300)$ . Suponha que o custo para produzir um galão de petróleo

seja  $C_1$  reais. Se o óleo for destilado a uma temperatura inferior a  $200^\circ$ , o produto obtido é vendido a  $C_2$  reais; se a temperatura for superior a  $200^\circ$ , o produto é vendido a  $C_3$  reais.

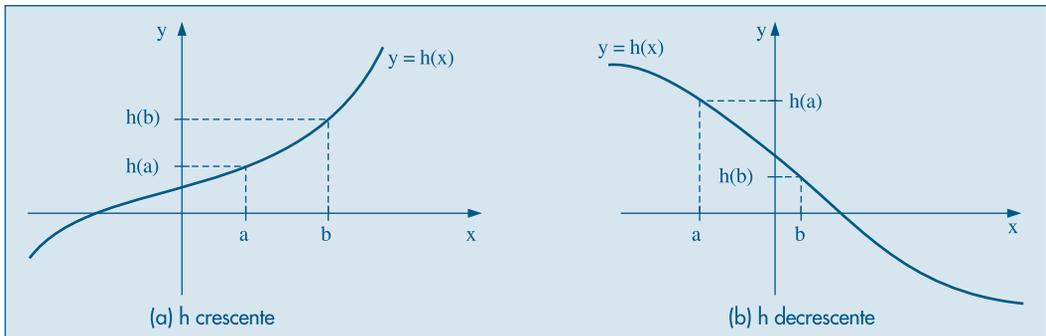
- (a) Fazer o gráfico da f.d.p. de  $T$ .  
 (b) Qual o lucro médio por galão?
14. Se  $X \sim N(10, 4)$ , calcular:
- (a)  $P(8 < X < 10)$ , (c)  $P(X > 10)$ ,  
 (b)  $P(9 \leq X \leq 12)$ , (d)  $P(X < 8 \text{ ou } X > 11)$ .
15. Para  $X \sim N(100, 100)$ , calcule:
- (a)  $P(X < 115)$ ,  
 (b)  $P(X \geq 80)$ ,  
 (c)  $P(|X - 100| \leq 10)$ ,  
 (d) o valor  $a$ , tal que  $P(100 - a \leq X \leq 100 + a) = 0,95$ .
16. Para a v.a.  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , encontre:
- (a)  $P(X \leq \mu + 2\sigma)$ ,  
 (b)  $P(|X - \mu| \leq \sigma)$ ,  
 (c) o número  $a$  tal que  $P(\mu - a\sigma \leq X \leq \mu + a\sigma) = 0,99$ ,  
 (d) o número  $b$  tal que  $P(X > b) = 0,90$ .
17. As alturas de 10.000 alunos de um colégio têm distribuição aproximadamente normal, com média 170 cm e desvio padrão 5 cm.
- (a) Qual o número esperado de alunos com altura superior a 165 cm?  
 (b) Qual o intervalo simétrico em torno da média que conterá 75% das alturas dos alunos?
18. As vendas de determinado produto têm distribuição aproximadamente normal, com média 500 unidades e desvio padrão 50 unidades. Se a empresa decide fabricar 600 unidades no mês em estudo, qual é a probabilidade de que não possa atender a todos os pedidos desse mês, por estar com a produção esgotada?
19. Suponha que as amplitudes de vida de dois aparelhos elétricos,  $D_1$  e  $D_2$ , tenham distribuições  $N(42, 36)$  e  $N(45, 9)$ , respectivamente. Se os aparelhos são feitos para ser usados por um período de 45 horas, qual aparelho deve ser preferido? E se for por um período de 49 horas?
20. O diâmetro  $X$  de rolamentos esféricos produzidos por uma fábrica tem distribuição  $N(0,6140; (0,0025)^2)$ . O lucro  $T$  de cada rolamento depende de seu diâmetro. Assim,  
 $T = 0,10$ , se o rolamento for bom ( $0,610 < X < 0,618$ );  
 $T = 0,05$ , se o rolamento for recuperável ( $0,608 < X < 0,610$ ) ou ( $0,618 < X < 0,620$ );  
 $T = -0,10$ , se o rolamento for defeituoso ( $X < 0,608$  ou  $X > 0,620$ ).  
 Calcule:  
 (a) as probabilidades de que os rolamentos sejam bons, recuperáveis e defeituosos.  
 (b)  $E(T)$ .

21. Suponha que um mecanismo eletrônico tenha um tempo de vida  $X$  (em 1.000 horas) que possa ser considerado uma v.a. contínua com f.d.p.  $f(x) = e^{-x}$ ,  $x > 0$ . Suponha que o custo de fabricação de um item seja 2,00 reais e o preço de venda seja 5,00 reais. O fabricante garante total devolução se  $X \leq 0,9$ . Qual o lucro esperado por item?
22. Seja  $Y$  com distribuição binomial de parâmetros  $n = 10$  e  $p = 0,4$ . Determine a aproximação normal para:  
 (a)  $P(3 < Y < 8)$ , (b)  $P(Y \geq 7)$ , (c)  $P(Y < 5)$ .
23. De um lote de produtos manufaturados, extraímos 100 itens ao acaso; se 10% dos itens do lote são defeituosos, calcule a probabilidade de 12 itens serem defeituosos. Use também a aproximação normal.
24. A confiabilidade de um mecanismo eletrônico é a probabilidade de que ele funcione sob as condições para as quais foi planejado. Uma amostra de 1.000 desses itens é escolhida ao acaso e os itens são testados, obtendo-se 30 defeituosos. Calcule a probabilidade de se obter pelo menos 30 itens defeituosos, supondo que a confiabilidade de cada item é 0,95.

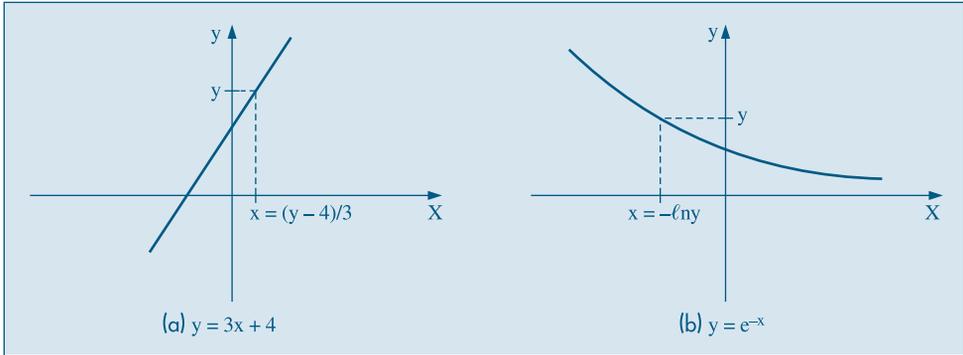
## 7.6 Funções de Variáveis Contínuas

Vimos, no Capítulo 6, como obter a distribuição de uma v.a.  $Y = h(X)$ , se conhecermos a distribuição da v.a. discreta  $X$ . Vejamos, agora, o caso em que  $X$  é contínua. Suponhamos, primeiramente, que a função  $h$  seja estritamente monotônica, crescente ou decrescente. Neste caso, a inversa  $h^{-1}$  estará univocamente determinada e podemos obter  $x = h^{-1}(y)$ , para valores  $x$  e  $y$  das v.a.  $X$  e  $Y$ , respectivamente. Observando a Figura 7.22, vemos que, se a densidade de  $X$ ,  $f(x)$ , digamos, for positiva no intervalo  $a < x < b$ , então a densidade de  $Y$  será positiva para  $h(a) < y < h(b)$ , se  $h$  for crescente, e para  $h(b) < y < h(a)$ , se  $h$  for decrescente.

**Figura 7.22:** Função de uma v.a.



**Exemplo 7.11.** Suponha  $X$  com a densidade do Exemplo 7.2 e considere  $Y = 3X + 4$ . Aqui,  $y = h(x) = 3x + 4$ , que é crescente (Figura 7.23 (a)).

**Figura 7.23:** Exemplos de funções de v.a. (a) Exemplo 7.11 (b) Exemplo 7.12.

Denotando a densidade de  $Y$  por  $g(y)$ , e como  $f(x) > 0$  para  $0 < x < 1$ ,  $g(y) > 0$  para  $4 < y < 7$ .

Notemos que se podem obter probabilidades relativas a  $Y$  a partir da densidade de  $X$ . Por exemplo,

$$P(Y > 1) = P(3X + 4 > 1) = P(X > -1) = 1.$$

Vejamos como se pode obter  $g(y)$ . Denotemos por  $G(y)$  a função de distribuição acumulada de  $Y$ . Da seção 7.3, sabemos que  $G'(y) = g(y)$ , para todo valor de  $y$  para o qual  $G$  for derivável. Então, temos

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(3X + 4 \leq y) = P\left(X \leq \frac{y-4}{3}\right) = F\left(\frac{y-4}{3}\right),$$

onde estamos denotando por  $F(\cdot)$  a função de distribuição acumulada de  $X$ . Usando a regra da cadeia para derivadas, temos

$$G'(y) = F'\left(\frac{y-4}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} f\left(\frac{y-4}{3}\right),$$

do que decorre

$$g(y) = \begin{cases} \frac{2}{9} (y-4), & \text{se } 4 < y < 7 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

**Exemplo 7.12.** Suponha, agora, que  $X$  tenha densidade  $f(x) = 3x^2/2$ ,  $-1 < x < 1$  e que  $Y = e^{-X}$ . Segue-se que  $h(x) = e^{-x}$  é uma função decrescente e  $x = -\ln(y)$  (Figura 7.23 (b)). Então,

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y \leq y) = P(e^{-X} \leq y) = P(X \geq -\ln(y)) \\ &= 1 - P(X \leq -\ln(y)) = 1 - F(-\ln(y)), \end{aligned}$$

onde novamente  $F$  denota a f.d.a. de  $X$ . Derivando, obtemos a f.d.p. de  $Y$ ,

$$g(y) = \frac{3}{2y} (\ln(y))^2, \quad e^{-1} < y < e.$$

O seguinte resultado generaliza esses dois exemplos.

**Teorema 7.1.** Se  $X$  for uma v.a. contínua, com densidade  $f(x) > 0$ ,  $a < x < b$ , então  $Y = h(X)$  tem densidade

$$g(y) = f(h^{-1}(y)) \left| \frac{dx}{dy} \right|, \quad (7.30)$$

supondo que  $h$  seja monotônica, derivável para todo  $x$ . Se  $h$  for crescente,  $g(y) > 0$ ,  $h(a) < y < h(b)$  e, se  $h$  for decrescente,  $g(y) > 0$ ,  $h(b) < y < h(a)$ .

**Prova.** Basta notar que  $G(y) = P(Y \leq y) = P(h(X) \leq y)$  e que essa probabilidade é igual a  $P(X \leq h^{-1}(y)) = F(h^{-1}(y))$ , se  $h$  for crescente, e igual a  $1 - F(h^{-1}(y))$ , se  $h$  for decrescente. Derivando  $G(y)$  obtemos o resultado, notando que a derivada  $(h^{-1}(y))' = dx/dy > 0$  se  $h$  for crescente, e negativa se  $h$  for decrescente.

Suponha, agora, que  $h$  não seja monotônica. Um caso de interesse que será usado mais tarde é  $Y = h(X) = X^2$  (Figura 7.24). Temos

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\ &= F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}), \end{aligned}$$

e derivando obtemos a densidade de  $Y$ ,

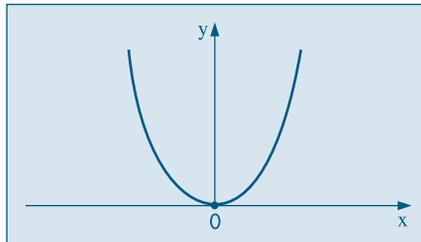
$$g(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} [f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})], \quad (7.31)$$

onde  $f$  é a densidade de  $X$ .

Se  $f(x) = 1$ ,  $0 < x < 1$  ( $X$  é uniforme no intervalo  $[0, 1]$ ), então

$$g(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad 0 < y < 1.$$

**Figura 7.24:** Ilustração de  $Y = h(X) = X^2$ .



## Problemas

25. Considere a v.a.  $X$  do Problema 2 e  $Y = X + 5$ .
- Calcule  $P(Y \leq 5,5)$ .
  - Obtenha a densidade de  $Y$ .
  - Obtenha a densidade de  $Z = 2X$ .
26. Suponha que a v.a.  $X$  tenha a densidade do Problema 8. Se  $Y = 2X - 3/5$ , obter a densidade de  $Y$ . Calcule  $E(Y)$  e  $\text{Var}(Y)$ .
27. Suponha  $X \sim \mathcal{U}[-1, 1]$ . Calcule a densidade de  $Y = X^2$  e de  $W = |X|$ .

## 7.7 Outros Modelos Importantes

Nesta seção vamos introduzir alguns modelos para v.a. contínuas que serão bastante utilizados na terceira parte deste livro. Juntamente com o modelo normal, esses modelos são úteis para as v.a. de interesse prático, que na maioria dos casos assumem valores positivos e tendem a ter distribuições assimétricas à direita.

### 7.7.1 A Distribuição Gama

Uma extensão do modelo exponencial é estudado a seguir.

**Definição.** A v.a. contínua  $X$ , assumindo valores positivos, tem uma distribuição gama com parâmetros  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$ , se sua f.d.p. for dada por

$$f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (7.32)$$

Em (7.32),  $\Gamma(\alpha)$  é a *função gama*, importante em muitas áreas da Matemática, dada por

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx, \quad \alpha > 0. \quad (7.33)$$

Não é difícil ver que  $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1) \Gamma(\alpha - 1)$ , se  $\alpha = n$  for um inteiro positivo,  $\Gamma(n) = (n - 1)!$  e que  $\Gamma(1) = 1$ ,  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ . Veja o Problema 45.

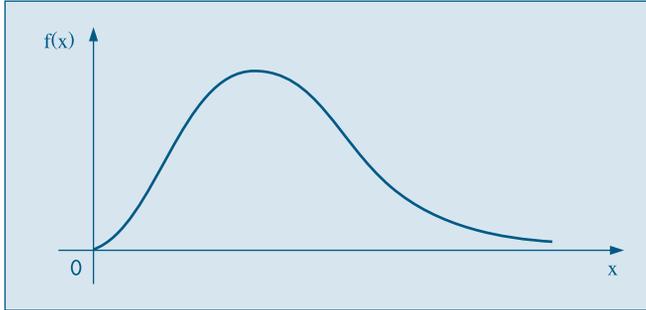
A Figura 7.25 ilustra a densidade (7.32) para  $\alpha = 3$  e  $\beta = 1$ . Se  $\alpha = 1$  obtemos a distribuição exponencial (7.26). Muitos casos de interesse têm  $\alpha$  inteiro positivo.

Usaremos a notação

$$X \sim \text{Gama}(\alpha, \beta)$$

para designar uma v.a. com a distribuição dada por (7.32).

**Figura 7.25:** Gráfico da f.d.p. de uma distribuição gama,  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 1$ .



Pode-se demonstrar que:

$$E(X) = \alpha\beta, \text{Var}(X) = \alpha\beta^2. \quad (7.34)$$

### 7.7.2 A Distribuição Qui-Quadrado

Um caso especial importante do modelo gama é obtido fazendo-se  $\alpha = v/2$  e  $\beta = 2$ , com  $v > 0$  inteiro.

**Definição.** Uma v.a. contínua  $Y$ , com valores positivos, tem uma distribuição qui-quadrado com  $v$  graus de liberdade (denotada  $\chi^2(v)$ ), se sua densidade for dada por

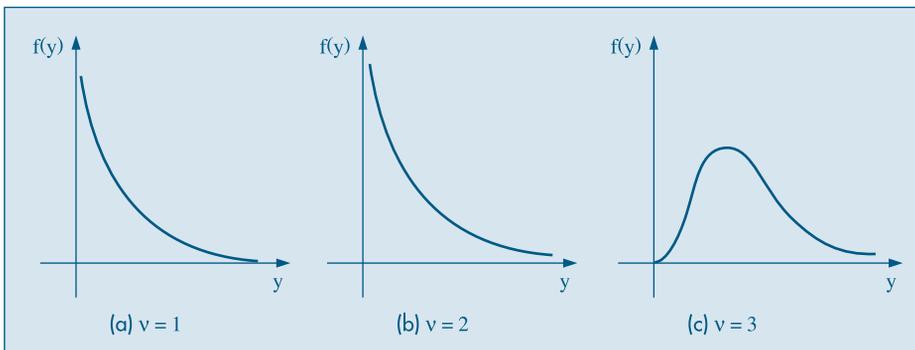
$$f(y; v) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(v/2)2^{v/2}} y^{v/2-1} e^{-y/2}, & y > 0 \\ 0, & y < 0. \end{cases} \quad (7.35)$$

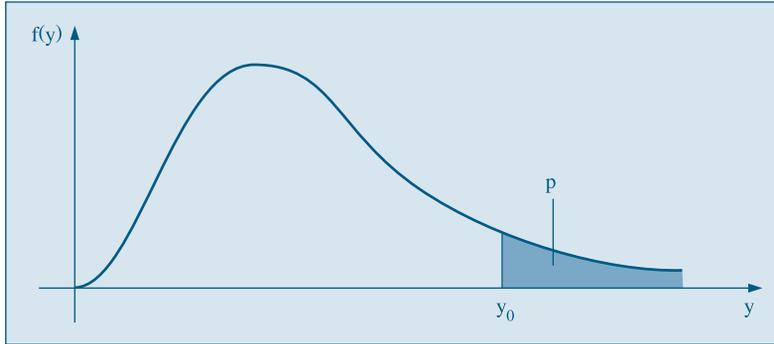
A Figura 7.26 ilustra os gráficos de (7.35) para  $v = 1, 2, 3$ . Segue-se de (7.34) que

$$E(Y) = v, \quad \text{Var}(Y) = 2v. \quad (7.36)$$

A distribuição qui-quadrado tem muitas aplicações em Estatística e, como no caso da normal, existem tabelas para obter probabilidades. A Tabela IV, fornece os valores de  $y_0$  tais que  $P(Y > y_0) = p$ , para alguns valores de  $p$  e de  $v$ . Ver Figura 7.27.

**Figura 7.26:** Gráficos da distribuição qui-quadrado  $\chi^2(n)$ .



**Figura 7.27:** Valores tabelados da distribuição  $\chi^2(\nu)$ .

**Exemplo 7.13.** Usando a Tabela IV, para  $\nu = 10$ , observe que  $P(Y > 2,558) = 0,99$ , ao passo que  $P(Y > 18,307) = 0,05$ .

Para  $\nu > 30$  podemos usar uma aproximação normal à distribuição qui-quadrado. Especificamente, temos o seguinte resultado: se  $Y$  tiver distribuição qui-quadrado com  $\nu$  graus de liberdade, então a v.a.

$$Z = \sqrt{2Y} - \sqrt{2\nu - 1} \sim N(0,1).$$

Por exemplo, consultando a Tabela IV, temos que, se  $\nu = 30$ ,

$$P(Y > 40,256) = 0,10,$$

enquanto que, usando a fórmula acima, temos que

$$z = \sqrt{2 \times 40,256} - \sqrt{59} = 1,292$$

e  $P(Z > 1,292) = 0,099$ , que resulta ser uma boa aproximação.

**Exemplo 7.14.** Considere  $Z \sim N(0,1)$  e considere a v.a.  $Y = Z^2$ . De (7.31) temos que a densidade de  $Y$  é dada por

$$g(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} [\phi(\sqrt{y}) + \phi(-\sqrt{y})], \quad y > 0,$$

onde por  $\phi(z)$  indicamos a densidade da  $N(0,1)$ . Resulta

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-1/2} e^{-y/2},$$

e comparando com (7.35) vemos que  $Y \sim \chi^2(1)$ . Temos, aqui, um resultado importante:

**O quadrado de uma v.a. com distribuição normal padrão é uma v.a. com distribuição  $\chi^2(1)$ .**

De um modo mais geral, uma v.a.  $x^2(\nu)$  pode ser vista como a soma de  $\nu$  normais padrões ao quadrado, independentes.

### 7.7.3 A Distribuição $t$ de Student

A distribuição  $t$  de Student é importante no que se refere a inferências sobre médias populacionais, tópico a ser tratado nos Capítulos 12 e 13. A obtenção da densidade está contida no teorema abaixo.

**Teorema 7.1.** Seja  $Z$  uma v.a.  $N(0,1)$  e  $Y$  uma v.a.  $\chi^2(\nu)$ , com  $Z$  e  $Y$  independentes. Então, a v.a.

$$t = \frac{Z}{\sqrt{Y/\nu}}, \quad (7.37)$$

tem densidade dada por

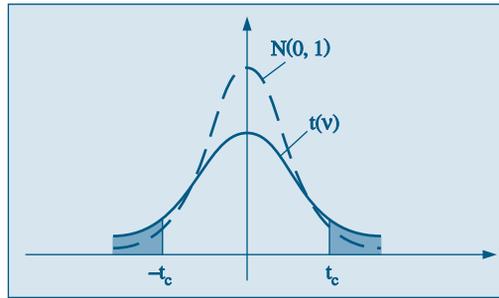
$$f(t; \nu) = \frac{\Gamma((\nu + 1)/2)}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{\pi\nu}} (1 + t^2/\nu)^{-(\nu+1)/2}, \quad -\infty < t < \infty. \quad (7.38)$$

Diremos que tal variável tem uma *distribuição  $t$  de Student com  $\nu$  graus de liberdade* e a indicaremos por  $t(\nu)$ . Pode-se provar que

$$E(t) = 0, \quad \text{Var}(t) = \frac{\nu}{\nu - 2}, \quad \nu > 2, \quad (7.39)$$

e verificar que o gráfico da densidade de  $t$  aproxima-se bastante de uma  $N(0,1)$  quando  $\nu$  é grande. Veja a Figura 7.28.

**Figura 7.28:** A distribuição  $t$  de Student e a distribuição normal padrão.



Como essa distribuição é bastante utilizada na prática, existem tabelas fornecendo probabilidades relativas a ela. A Tabela V fornece os valores de  $t_c$  tais que

$$P(-t_c < t(\nu) < t_c) = 1 - p, \quad (7.40)$$

para alguns valores de  $p$  e de  $\nu$ .

O nome *Student* vem do pseudônimo usado pelo estatístico inglês W. S. Gosset, que introduziu essa distribuição no início do século passado.

**Exemplo 7.15.** Se  $\nu = 6$ , então, usando a Tabela V,  $P(-1,943 < t(6) < 1,943) = 0,90$ , ao passo que  $P(t(6) > 2,447) = 0,025$ . Observe que, nessa tabela, há uma linha com  $\nu = \infty$ , que corresponde a usar os valores da  $N(0,1)$ . Para  $n > 120$  essa aproximação é muito boa.

### 7.7.4 A Distribuição $F$ de Snedecor

Vamos considerar agora uma v.a. definida como o quociente de duas variáveis com distribuição qui-quadrado.

O seguinte teorema, que não será demonstrado, resume o que nos vai ser útil.

**Teorema 7.2.** Sejam  $U$  e  $V$  duas v.a. independentes, cada uma com distribuição qui-quadrado, com  $\nu_1$  e  $\nu_2$  graus de liberdade, respectivamente. Então, a v.a.

$$W = \frac{U/\nu_1}{V/\nu_2} \quad (7.41)$$

tem densidade dada por

$$g(w; \nu_1, \nu_2) = \frac{\Gamma((\nu_1 + \nu_2)/2)}{\Gamma(\nu_1/2)\Gamma(\nu_2/2)} \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\nu_1/2} \frac{w^{\nu_1/2}}{(1 + \nu_1 w/\nu_2)^{(\nu_1 + \nu_2)/2}} w > 0. \quad (7.42)$$

Diremos que  $W$  tem *distribuição  $F$  de Snedecor*, com  $\nu_1$  e  $\nu_2$  graus de liberdade, e usaremos a notação  $W \sim F(\nu_1, \nu_2)$ . Pode-se mostrar que

$$E(W) = \frac{\nu_2}{\nu_2 - 2} \text{ e } \text{Var}(W) = \frac{2\nu_2^2(\nu_1 + \nu_2 - 2)}{\nu_1(\nu_2 - 2)^2(\nu_2 - 4)}. \quad (7.43)$$

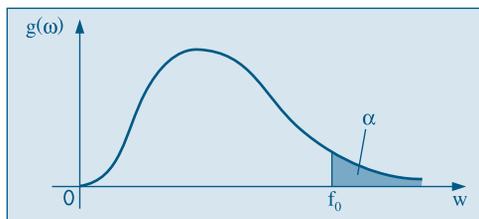
O gráfico típico de uma v.a. com distribuição  $F$  está na Figura 7.29. Na Tabela VI são dados os pontos  $f_0$  tais que

$$P\{F(\nu_1, \nu_2) > f_0\} = \alpha,$$

para  $\alpha = 0,05$ ,  $\alpha = 0,025$  e alguns valores de  $\nu_1$  e  $\nu_2$ . Para encontrar os valores inferiores, usa-se a identidade

$$F(\nu_1, \nu_2) = 1/F(\nu_2, \nu_1). \quad (7.44)$$

**Figura 7.29:** Gráfico de distribuição  $F$ .



**Exemplo 7.16.** Considere, por exemplo,  $W \sim F(5, 7)$ . Consultando a Tabela VI,  $P(F > 3,97) = 0,05$  ou, então,  $P(F \leq 3,97) = 0,95$ . Digamos, agora, que desejamos encontrar o valor  $f_0$  tal que  $P(F < f_0) = 0,05$ . Da igualdade (7.44) temos

$$0,05 = P\{F(5,7) < f_0\} = P\{1/F(7,5) < f_0\} = P\{F(7,5) > 1/f_0\},$$

e procurando na Tabela VI, para  $F(7,5)$ , obtemos  $1/f_0 = 4,88$  e, portanto,  $f_0 = 0,205$ .

Na seção de Problemas e Complementos apresentamos algumas outras distribuições de interesse, como a log-normal, Pareto, Weibull e beta.

Na Tabela 7.2 mostramos os principais modelos para v.a. contínuas, incluindo: a densidade, o domínio dos valores, os parâmetros, a média e a variância.

**Tabela 7.2:** Modelos para variáveis contínuas.

Modelo	$f(x)$	Parâmetros	$E(X)$ , $\text{Var}(X)$
Uniforme	$1/(\beta - \alpha)$ , $\alpha < x < \beta$	$\alpha, \beta$	$(\alpha + \beta)/2$ , $(\beta - \alpha)^2/12$
Exponencial	$1/\beta e^{-x/\beta}$ , $t > 0$	$\beta$	$\beta$ , $\beta^2$
Normal	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$ , $-\infty < x < \infty$	$\mu, \sigma$	$\mu$ , $\sigma^2$
Gama	$\beta^{-\alpha}/\Gamma(\alpha) x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}$ , $x > 0$	$\beta > 0, \alpha > 0$	$\alpha\beta$ , $\alpha\beta^2$
Qui-quadrado	$\frac{2^{-v/2}}{\Gamma(v/2)} y^{v/2-1} e^{-y/2}$ , $y > 0$	$v$	$v$ , $2v$
t-Student	$\frac{\Gamma((v+1)/2)}{\Gamma(v/2)\sqrt{\pi v}} \left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{-(v+1)/2}$ , $-\infty < t < \infty$	$v$	$0$ , $v/(v-2)$
F-Snedecor	$\frac{\Gamma\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v_2}{2}\right)} \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{v_1}{2}} \frac{w^{\frac{v_1-2}{2}}}{\left(1 + \frac{v_1 w}{v_2}\right)^{\frac{v_1+v_2}{2}}}$ , $w > 0$ .	$v_1, v_2$	$\frac{v_2}{v_2-2}$ , $\frac{2v_2^2(v_1 + v_2 - 2)}{v_1(v_2 - 2)^2(v_2 - 4)}$

## 7.8 Quantis

No Capítulo 6 definimos o  $p$ -quantil  $Q(p)$  como o valor da v.a. discreta  $X$  satisfazendo as duas desigualdades de (6.26).

No caso de uma v.a. contínua  $X$ , essa definição torna-se mais simples. Se  $F(x)$  designar a f.d.a. de  $X$ , temos que as desigualdades em (6.26) ficam:

$$P(X \leq Q(p)) = F(Q(p)) \geq p \quad (7.45)$$

e

$$P(X \geq Q(p)) = 1 - P(X < Q(p)) = 1 - P(X \leq Q(p)) = 1 - F(Q(p)) \geq 1 - p. \quad (7.46)$$

Mas (7.46) pode ser reescrita como

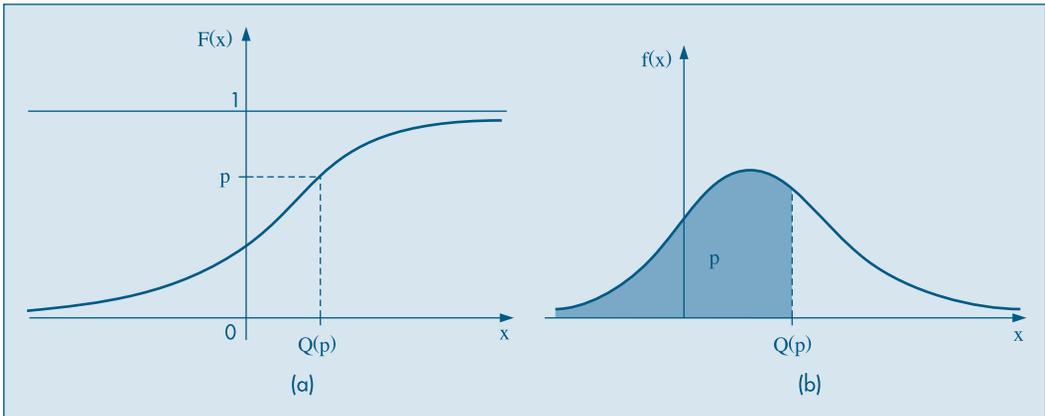
$$F(Q(p)) \leq p. \quad (7.47)$$

Portanto, de (7.45) e (7.47) chegamos à conclusão de que o  $p$ -quantil deve satisfazer

$$F(Q(p)) = p. \quad (7.48)$$

Graficamente, temos a situação ilustrada na Figura (7.30). Ou seja, para obter  $Q(p)$ , marcamos  $p$  no eixo das ordenadas, consideramos a reta horizontal pelo ponto  $(0, p)$  até encontrar a curva de  $F(x)$  e baixamos uma reta vertical até encontrar  $Q(p)$  no eixo das abscissas. Analiticamente, temos de resolver a equação (7.48). Vejamos alguns exemplos.

**Figura 7.30:** Definição de  $Q(p)$  (a) f.d.a. (b) f.d.p.



**Exemplo 7.17.** Se  $Z \sim N(0, 1)$ , utilizando a Tabela III encontramos facilmente que

$$Q(0, 5) = Q_2 = 0,$$

$$Q(0, 25) = Q_1 = -0,675,$$

$$Q(0, 30) = -0,52,$$

$$Q(0,75) = Q_3 = 0,675.$$

**Exemplo 7.18.** Suponha que  $Y \sim \text{Exp}(2)$ . Se quisermos calcular a mediana,  $Q_2$ , teremos de resolver

$$\int_0^{Q_2} f(y)dy = 0,5,$$

ou seja,

$$1/2 \int_0^{Q_2} e^{-y/2} dy = 0,5.$$

Obtemos

$$1 - e^{-Q_2/2} = 0,5,$$

do que temos, finalmente,  $Q_2 = -2 \ln(0,5) = 1,386$ .

## 7.9 Exemplos Computacionais

Nesta seção final, vamos dar alguns exemplos de como obter probabilidades acumuladas para a normal e exponencial, usando o pacote Minitab. Isso também pode ser feito com outros pacotes ou planilhas, bem como considerar outras distribuições contínuas.

Considere a v.a. contínua  $X$ , com f.d.a.  $F(x) = P(X \leq x)$ . O problema é, dado  $x$ , calcular  $F(x)$ , ou dado  $F(x)$ , calcular  $x$ .

**Exemplo 7.19.** Suponha  $X \sim N(10, 25)$ . Para obter  $F(x)$ , para  $x = 8,65$ , usamos os comandos CDF e NORMAL do Minitab. Por outro lado, se  $F(x) = 0,8269$ , então obteremos  $x$  usando os comandos INVCDF e NORMAL. Veja o Quadro 7.1.

**Quadro 7.1** Obtenção de  $x$  e  $F(x)$  para a Normal. Minitab.

MTB > CDF 8.65;	MTB > INVCDF 0.8269;
SUBC > NORMAL 10,25.	SUBC > NORMAL 10,25.
<b>Cumulative Distribution Function</b>	<b>Inverse Cumulative Distribution Function</b>
Normal with mean = 10.0000 and standard deviation = 25.0000	Normal with mean = 10.0000 and standard deviation = 25.0000
x P(X < = x)	P(X < = x) x
8.6500 0.4785	0.8269 33.5496

**Exemplo 7.20.** O Quadro 7.2 mostra cálculos similares para distribuição exponencial, com média 0,5, ou seja, parâmetro  $\beta = 2$ .

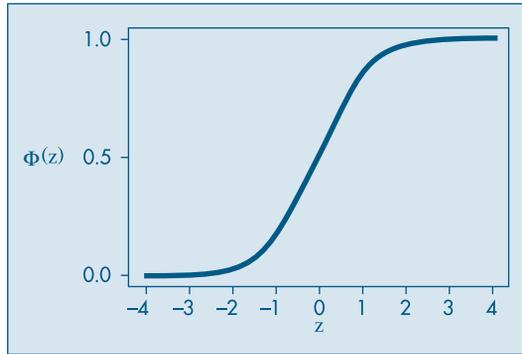
**Quadro 7.2** Obtenção de  $x$  e  $F(x)$  para a Exponencial. Minitab.

MTB > CDF 0.85;	MTB > INVCDF 0.345;
SUBC > EXPONENCIAL 0.5.	SUBC > EXPONENCIAL 0.5.
<b>Cumulative Distribution Function</b>	<b>Inverse Cumulative Distribution Function</b>
Exponential with mean = 0.500000	Exponential with mean = 0.500000
x P(X < = x)	P(X < = x) x
0.8500 0.8173	0.3450 0.2116

**Exemplo 7.21.** Podemos, também, construir o gráfico de uma f.d.a, por meio de comandos do Minitab. Suponha que  $Z \sim N(0,1)$ . Como os valores de  $Z$  estão concentra-

dos no intervalo  $[-4, 4]$ , podemos considerar um vetor de valores  $z = [-4,0; -3,9; -3,8; \dots; 3,8; 3,9; 4,0]$  e obter os valores da f.d.a. com o comando CDF. Depois, pedir para plotar os pares  $(z_i, F(z_i))$ . O gráfico está na Figura 7.31.

**Figura 7.31:** Gráfico da f.d.a. da  $N(0, 1)$ . Minitab.



## 7.10 Problemas e Complementos

28. Numa determinada localidade, a distribuição de renda (em reais) é uma v.a.  $X$  com f.d.p.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}x + \frac{1}{10}, & 0 \leq x \leq 2 \\ -\frac{3}{40}x + \frac{9}{20}, & 2 < x \leq 6 \\ 0, & x < 0 \text{ ou } x > 6. \end{cases}$$

- Qual a renda média nessa localidade?
- Escolhida uma pessoa ao acaso, qual a probabilidade de sua renda ser superior a \$3.000,00?
- Qual a mediana da variável?

29. Se  $X$  tiver distribuição uniforme com parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , mostre que:

$$(a) E(X) = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

$$(b) \text{Var}(X) = (\beta - \alpha)^2/12.$$

$$(c) F(x) = \begin{cases} 0, & x < \alpha \\ \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}, & \alpha \leq x \leq \beta \\ 1, & x > \beta. \end{cases}$$

30. Complete a tabela abaixo, que corresponde a alguns valores da função

$$G(u) = P(0 \leq U \leq u),$$

definida na seção 7.4.1, com  $U$  uma v.a. uniforme no intervalo  $(-1/2, 1/2)$ .

Probabilidades  $p$ , tais que  $p = P(0 \leq U \leq u)$

Primeira decimal de $u$	Segunda decimal de $u$				Primeira decimal de $u$
0,0	0	1	...	9	0,0
0,1					0,1
0,2					0,2
0,3					0,3
0,4					0,4
0,5					0,5

31. Dada a v.a.  $X$ , uniforme em  $(5, 10)$ , calcule as probabilidades abaixo, usando a tabela do problema anterior.

(a)  $P(X < 7)$

(c)  $P(X > 8,5)$

(b)  $P(8 < X < 9)$

(d)  $P(|X - 7,5| > 2)$

32. Se  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , calcular  $E(X)$  e  $\text{Var}(X)$ .

[Sugestão: Fazendo a transformação de variáveis  $x = \mu + \sigma t$ , obtemos que  $E(X) =$

$\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} te^{-t^2/2} dt$ . A primeira integral resulta  $\mu$  (por quê?) e a segunda anula-se, pois o integrando é uma função ímpar. Para obter a variância, obtenha  $E(X^2)$  por integração por partes.]

33. As notas de Estatística Econômica dos alunos de determinada universidade distribuem-se de acordo com uma distribuição normal, com média 6,4 e desvio padrão 0,8. O professor atribui graus A, B e C da seguinte forma:

Nota	Grau
$x < 5$	C
$5 \leq x < 7,5$	B
$7,5 \leq x \leq 10$	A

Numa classe de 80 alunos, qual o número esperado de alunos com grau A? E com grau B? E C?

34. O peso bruto de latas de conserva é uma v.a. normal, com média 1.000 g e desvio padrão 20 g.

(a) Qual a probabilidade de uma lata pesar menos de 980 g?

(b) Qual a probabilidade de uma lata pesar mais de 1.010 g?

35. A distribuição dos pesos de coelhos criados numa granja pode muito bem ser representada por uma distribuição normal, com média de 5 kg e desvio padrão de 0,8 kg. Um abatedouro comprará 5.000 coelhos e pretende classificá-los de acordo com o peso, do seguinte modo: 20% dos leves como pequenos, os 55% seguintes como médios, os 15% seguintes como grandes e os 10% mais pesados como extras. Quais os limites de peso para cada classe?

36. Uma enchedora automática de garrafas de refrigerantes está regulada para que o volume médio de líquido em cada garrafa seja de  $1.000 \text{ cm}^3$  e o desvio padrão de  $10 \text{ cm}^3$ . Pode-se admitir que a variável volume seja normal.
- Qual é a porcentagem de garrafas em que o volume de líquido é menor que  $990 \text{ cm}^3$ ?
  - Qual é a porcentagem das garrafas em que o volume líquido não se desvia da média em mais que dois desvios padrões?
  - O que acontecerá com a porcentagem do item (b) se a máquina for regulada de forma que a média seja  $1.200 \text{ cm}^3$  e o desvio padrão  $20 \text{ cm}^3$ ?
37. O diâmetro de certo tipo de anel industrial é uma v.a. com distribuição normal, de média  $0,10 \text{ cm}$  e desvio padrão  $0,02 \text{ cm}$ . Se o diâmetro de um anel diferir da média em mais que  $0,03 \text{ cm}$ , ele é vendido por  $\$5,00$ ; caso contrário, é vendido por  $\$10,00$ . Qual o preço médio de venda de cada anel?
38. Uma empresa produz televisores e garante a restituição da quantia paga se qualquer televisor apresentar algum defeito grave no prazo de seis meses. Ela produz televisores do tipo A (comum) e do tipo B (luxo), com lucros respectivos de  $\$1.000,00$  e  $\$2.000,00$ , caso não haja restituição, e com prejuízos de  $\$3.000,00$  e  $\$8.000,00$ , se houver restituição. Suponha que o tempo para a ocorrência de algum defeito grave seja, em ambos os casos, uma v.a. com distribuição normal, respectivamente, com médias 9 meses e 12 meses, e variâncias 4 meses<sup>2</sup> e 9 meses<sup>2</sup>. Se tivesse de planejar uma estratégia de *marketing* para a empresa, você incentivaria as vendas dos aparelhos do tipo A ou do tipo B?
39. Determine as médias das v.a.  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ :
- $X$  uniforme em  $(1, 3)$ ,  $Y = 3X + 4$ ,  $Z = e^X$ .
  - $X$  tem f.d.p.  $f(x) = e^{-x}$ ,  $x > 0$ ,  $Y = X^2$ ,  $Z = 3/(X + 1)^2$ .
40. Suponha que  $X$  tenha distribuição uniforme em  $[-a, 3a]$ . Determine a média e a variância de  $X$ .
41. Se  $T$  tiver distribuição exponencial com parâmetro  $\beta$ , mostre que:
- $E(T) = \beta$ .
  - $\text{Var}(T) = \beta^2$ .
42. Os dados a seguir representam uma amostra de firmas de determinado ramo de atividade de uma região. Foram observadas duas variáveis: faturamento e número de empregados.

Nº de empregados		Nº de empresas	
0 ─ 20	35	0 ─ 10	18
20 ─ 50	75	10 ─ 50	52
50 ─ 100	45	50 ─ 100	30
100 ─ 200	30	100 ─ 200	26
200 ─ 400	15	200 ─ 400	24
400 ─ 800	8	400 ─ 800	20
> 800	2	800 ─ 1600	16
		1600 ─ 3200	14
		3200 ─ 6400	6
		> 6400	4
Total	210	Total	210

- (a) Calcule a média e a variância para cada variável.  
 (b) Supondo normalidade para cada uma dessas variáveis, com parâmetros estimados pela amostra, calcule os valores esperados para cada intervalo de classe e compare com o observado.
43. Suponha que a v.a.  $X$  tenha densidade  $f(x) = 1$ , para  $0 < x < 1$  e igual a zero no complementar. Faça  $Y = X^2$ .
- (a) Determine  $F_Y(y) = P(Y \leq y)$ ,  $y$  real.  
 (b) Determine a f.d.p. de  $Y$ .  
 (c) Calcule  $E(X^2)$ , utilizando a f.d.p. de  $X$ .  
 (d) Calcule  $E(Y)$ , utilizando a f.d.p. de  $Y$ , e compare com (c).
44. Dada a v.a.

$$Z = \frac{X - \mu_x}{\sigma_x},$$

determine a média e a variância de  $Z$ , sabendo-se que a f.d.p. de  $X$  é

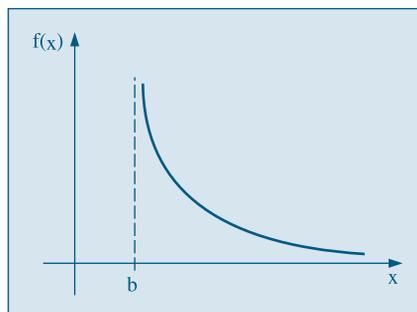
$$f(x) = e^{-x}, x > 0.$$

45. (a) Prove que, se  $\alpha$  for inteiro positivo,  $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$ .  
 (b) Prove que  $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ .  
 (c) Calcule  $\Gamma(1)$  e  $\Gamma(1/2)$ .  
 (d) Prove que a média e a variância de uma v.a.  $X$  com distribuição gama (densidade em (7.32)) são, respectivamente,  $\alpha\beta$  e  $\alpha\beta^2$ .
46. **Distribuição de Pareto.** Esta é uma distribuição frequentemente usada em Economia, em conexão com problemas de distribuição de renda.

Dizemos que a v.a.  $X$  tem *distribuição de Pareto* com parâmetros  $\alpha > 0$ ,  $b > 0$  se sua f.d.p. for dada por

$$f(x) = \begin{cases} \alpha/b (b/x)^{\alpha+1}, & x \geq b \\ 0, & x < b. \end{cases}$$

Aqui,  $b$  pode representar algum nível mínimo de renda,  $x$  é o nível de renda e  $f(x) \Delta x$  dá a proporção de indivíduos com renda entre  $x$  e  $x + \Delta x$ . O gráfico de  $f(x)$  está na figura abaixo.



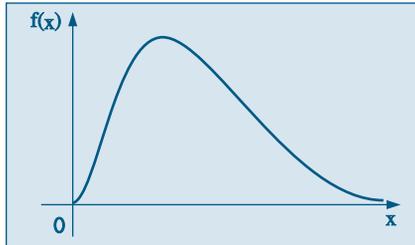
(a) Prove que  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ .

(b) Mostre que, para  $\alpha > 1$ ,  $E(X) = \frac{\alpha b}{\alpha - 1}$  e para  $\alpha > 2$ ,  $\text{Var}(X) = \frac{\alpha b^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}$ .

47. **Distribuição lognormal.** Outra distribuição usada quando se têm valores positivos é a distribuição lognormal. A v.a.  $X$  tem distribuição lognormal, com parâmetros  $\mu$  e  $\sigma^2$ ,  $-\infty < \mu < \infty$ ,  $\sigma^2 > 0$ , se  $Y = \ln X$  tiver distribuição normal com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ . A f.d.p. de  $X$  tem a forma

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-1/2\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2}, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

O gráfico de  $f(x)$  está na figura abaixo.



(a) Prove que  $E(X) = e^{\mu + \sigma^2/2}$ .

(b) Se  $E(X) = m$ , prove que  $\text{Var}(X) = m^2(e^{\sigma^2} - 1)$ .

48. Suponha que  $X$  tenha distribuição exponencial com parâmetro  $\beta$ . Prove que

$$\frac{P(X > t+x)}{P(X > x)} = P(X > t), \quad \forall t, x \geq 0.$$

Essa propriedade nos diz que a distribuição exponencial não tem memória. Por exemplo, se  $X$  for a vida de um componente eletrônico, a relação acima diz que, se o componente durou até o instante  $x$ , a probabilidade de ele não falhar após o intervalo  $t+x$  é a mesma de não falhar após o instante  $t$ . Nesse sentido,  $X$  “esquece” a sua idade, e a eventual falha do componente não resulta de uma deterioração gradual e sim de alguma falha repentina.

49. Se  $X$  for uma v.a. contínua, com f.d.p.  $f(x)$ , e se  $Y = g(X)$  for uma função de  $X$ , então  $Y$  será uma v.a. com

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx.$$

Suponha que  $X$  tenha densidade

$$f(x) = \begin{cases} (1/2)e^x, & x \leq 0 \\ (1/2)e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

Obtenha  $E(Y)$ , se  $Y = |X|$ .

50. Se  $X$  for uniforme no intervalo  $[0, 1]$ , obtenha a média da v.a.  $Y = (1/2)X^2$ .
51. **Distribuição de Weibull.** Um modelo que tem muitas aplicações na *teoria da confiabilidade* é o modelo de Weibull, cuja f.d.p. é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^\beta}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes positivas. A v.a.  $X$  pode representar, por exemplo, o tempo de vida de um componente de um sistema.

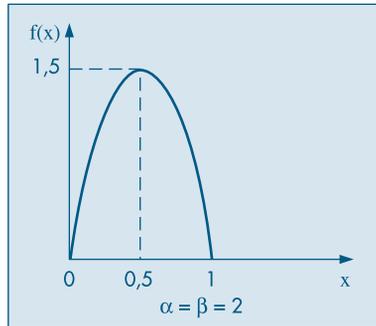
- (a) Se  $\beta = 1$ , qual a f.d.p. resultante? (b) Obtenha  $E(X)$  para  $\beta = 2$ .
52. **Distribuição Beta.** Uma v.a.  $X$  tem distribuição beta com parâmetros  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ , se sua f.d.p. for dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Aqui,  $B(\alpha, \beta)$  é a função beta, definida por

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx.$$

É possível provar que  $B(\alpha, \beta) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha + \beta)$ . A figura abaixo mostra a densidade da distribuição beta para  $\alpha = \beta = 2$ . Para esse caso, calcule  $P(X \leq 0,2)$ . Calcule a média e a variância de  $X$  para  $\alpha = \beta = 2$ .



53. Se na distribuição  $t$  de Student colocarmos  $\nu = 1$ , obteremos a *distribuição de Cauchy*,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}.$$

Mostre que  $E(X)$  não existe.

54. Obtenha o gráfico da f.d.a. de uma v.a.  $T \sim \text{Exp}(0, 5)$ , ou seja,  $E(T) = 2$ , considerando 20 valores de  $T$  e calculando os valores de  $F(t)$ , como na seção 7.9.
55. Idem, para 30 valores de uma uniforme no intervalo  $[-1, 1]$ .
56. Obtenha os quantis  $Q(0,1)$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$ ,  $Q(0,9)$  para uma v.a.  $X \sim N(10; 16)$ .
57. Resolva a mesma questão para uma v.a.  $Y \sim \chi^2(5)$ .

58. Para uma v.a. com distribuição qui-quadrado, com  $\nu$  graus de liberdade e  $\nu$  par, vale a seguinte fórmula:

$$P(\chi^2(\nu) > c) = e^{-c/2} \sum_{j=0}^{\nu/2-1} \frac{(c/2)^j}{j!}.$$

Calcule essa probabilidade para os seguintes casos e compare com os valores tabelados na Tabela IV:

(a)  $\nu = 4, c = 9,488$ ;                      (b)  $\nu = 10, c = 16$ .

59. Usando a aproximação normal a uma variável qui-quadrado, calcular:

(a)  $P(\chi^2(35) > 49,76)$ ;                      (b) o valor  $y$  tal que  $P(\chi^2(40) > y) = 0,05$ .

60. Se  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , com densidade  $f(x)$  dada por (7.17), provemos que a integral  $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ . Como esta integral é sempre positiva, mostremos que  $I^2 = 1$ . Novamente, como no Problema 32, fazemos a transformação  $x = \mu + \sigma t$  e obtemos  $I^2 = \frac{1}{2\pi} \iint e^{-(t^2+s^2)/2} ds dt$ , onde os limites de integração são  $-\infty$  e  $\infty$ . Agora fazemos outra transformação, passando de coordenadas cartesianas para polares:  $s = r \cos \theta, t = r \sin \theta$ , de modo que  $ds dt = r dr d\theta$ . Segue-se, integrando primeiro com relação a  $r$  e depois com relação a  $\theta$ , que

$$I^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2/2} r dr d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [-e^{-r^2/2}]_0^{\infty} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = 1.$$