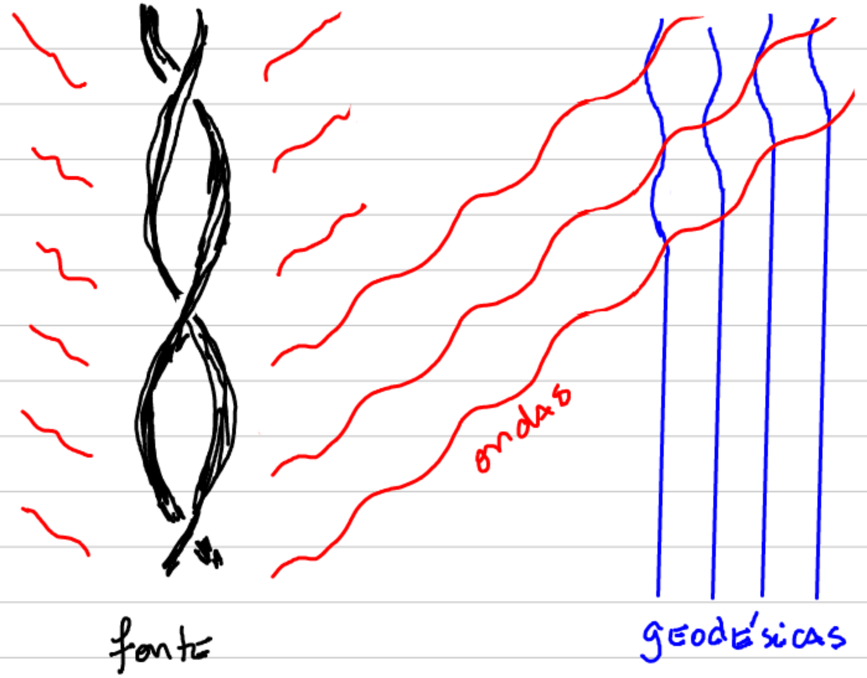
• Detecção:




$\Box\bar{h}_{\mu\nu} = 0$ (NA REGIÃO DE VÁCUO)

$\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0$

Fazendo uma mudança de coordenadas $x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$ satisfazendo $\Box\xi_\mu = 0$, a condição $\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu}$ é preservada. Ao mesmo tempo,

$$h_{\mu\nu} \mapsto h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu ,$$

$$h \mapsto h' = h - 2\partial_\mu \xi^\mu .$$

O exercício abaixo mostra que podemos fazer uso dessa liberdade de "gauge" residual p/ zerar $h_{0j}$ e $h$.

**Exercício:** Mostre que numa região de vácuo ($T_{\mu\nu} = 0$), podemos fazer uma mudança de coordenadas $x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu$ (infinitesimal), satisfazendo $\Box\xi_\mu = 0$ (para não estragar a condição $\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0$), de modo que $h'_{0j} = 0$ e $h' = 0$.

**Solução:** Lembrando que $h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu$, queremos que $\xi_\mu$ seja tal que

$$\begin{cases} \partial_0 \xi_j + \partial_j \xi_0 = h_{0j} & (\mathrm{I}) \\ \partial_\mu \xi^\mu = \frac{1}{2} h & (\mathrm{II}) \end{cases} ,$$

além de $\Box\xi^\mu = 0$ (III)

Manipulando as eqs. acima:

- $\partial^j(\mathrm{I})$: $\partial_0 \partial_j \xi^j + \nabla^2 \xi_0 = \partial_j h_0^{\ j} \overset{(\mathrm{III})}{\Leftrightarrow} \partial_0 \partial_j \xi^j + \partial_0^2 \xi_0 = \cancel{\partial_\mu \bar{h}^\mu{}_0}^{\,0} + \frac{1}{2}\partial_0 h - \partial_0 h_0^0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \partial_0\left[\partial_j \xi^j - \partial_0 \xi^0 - \frac{h}{2} + h_0^0\right] = 0 \Leftrightarrow \partial_j \xi^j - \partial_0 \xi^0 = \frac{h}{2} - h_0^0 + F(x) \quad (\mathrm{IV})$$

De (II) e (IV):
$$\partial_0 \xi^0 = \frac{h_0^0}{2} - \frac{F(x)}{2} \quad (\mathrm{V})$$
$$\partial_j \xi^j = \frac{h - h_0^0}{2} + \frac{F(x)}{2} = \frac{h^j_j}{2} + \frac{F(x)}{2} \quad (\mathrm{VI})$$

Integrando (V), $\xi^0(t,x) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} dt' h_0^0 - \frac{1}{2}F(x)(t-t_0) + \xi^0(t_0,x)$, substituindo em (I) e integrando:

$$\xi_j(t,x) = \xi_j(t_0,x) + \int_{t_0}^{t} dt' h_{0j}(t',x) - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \partial_j h_{00}(t'',x) - \frac{1}{4}\partial_j F(x)(t-t_0)^2 - \partial_j \xi_0(t_0,x)(t-t_0)$$

Substituindo esse resultado em (VI):

$$\frac{(\cancel{h} - h_0^0)}{2} - \frac{F(x)}{2} = \partial_j \xi^j(t_0,x) + \int_{t_0}^{t} dt' \partial_j h_0^{\ j}(t',x) - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \nabla^2 h_{00}(t'',x) - \frac{1}{4}\nabla^2 F(x)(t-t_0)^2 - \nabla^2 \xi_0(t_0,x)(t-t_0) =$$

$$= \partial_j \xi^j(t_0,x) + \frac{1}{2}\left[\cancel{h(t,x)} - h(t_0,x)\right] - \cancel{h_0^0(t,x)} + h_0^0(t_0,x) - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \Box h_{00}(t'',x) - \frac{1}{2}\left[\cancel{h_{00}(t,x)} - h_{00}(t_0,x)\right]$$

$$+\frac{1}{2}\partial_0 h_{00}(t_0,\mathbf{x})(t-t_0) - \frac{1}{4}\nabla^2 F(\mathbf{x})(t-t_0)^2 - \nabla^2\xi_0(t_0,\mathbf{x})(t-t_0)$$

Assim, vemos que numa região de vácuo (em que $\Box h_{00}=0$), a eq. acima é satisfeita impondo:

$$\nabla^2\xi_0(t_0,\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\partial_0 h_{00}(t_0,\mathbf{x}), \quad \text{(VII)}$$

$$\nabla^2 F(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{(VIII)}$$

onde lembremos, de (VI) calculada em $t=t_0$, que

$$F(\mathbf{x}) = 2\partial_j\xi^j(t_0,\mathbf{x}) - h^j_j(t_0,\mathbf{x})$$

A Eq. (VII) é um vínculo que a condição inicial p/ $\xi_0$ deve satisfazer. Por sua vez, a Eq. (VIII) impõe um vínculo semelhante na condição inicial p/ $\xi_j$:

$$0=\nabla^2 F(\mathbf{x}) = 2\partial_j\nabla^2\xi^j(t_0,\mathbf{x}) - \nabla^2 h^j_j(t_0,\mathbf{x}) = \partial_j\left[2\nabla^2\xi^j(t_0,\mathbf{x}) - \partial^j h^k_k(t_0,\mathbf{x})\right].$$

Assim, podemos impor $\nabla^2\xi_j(t_0,\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\partial_j h^k_k(t_0,\mathbf{x})$ para garantir que $\nabla^2 F(\mathbf{x})=0$.

Resumindo, a partir de um "gauge" no qual $\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu}=0$, podemos, numa região de vácuo ($\Box h_{\mu\nu}=0$) fazer uma nova escolha "residual" de "gauge" (que preserva $\partial_\mu\bar{h}^{\mu\nu}=0$), de modo que, <u>no novo</u> "gauge", $h_{0j}=0$ e $h=0$. Essa mudança é dada por:

$$\xi^0 = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} dt'\, h_0^{\,0}(t',\mathbf{x}) - (t-t_0)\left[\partial_j\xi^j(t_0,\mathbf{x}) - h^j_j(t_0,\mathbf{x})/2\right] + \xi^0(t_0,\mathbf{x})$$

$$\xi^j = \int_{t_0}^{t} dt'\, h_0{}^j(t',x) - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t'} dt''\, \partial^j h_{00}(t'',x) - \frac{1}{2}(t-t_0)^2\left[\partial^j \partial_k \xi^k(t_0,x) - \nabla^2 \xi^j(t_0,x)\right] - \partial^j \xi_0(t_0,x)(t-t_0) + \xi^j(t_0,x),$$

onde $\xi^0(t_0,x)$ e $\xi^j(t_0,x)$ devem satisfazer

$$\nabla^2 \xi^0(t_0,x) = \frac{1}{2}\partial_0 h^0_0(t_0,x)$$

$$\nabla^2 \xi^j(t_0,x) = \frac{1}{2}\partial^j h^k_k(t_0,x)$$

Note que $\xi^\mu$ dado acima pode ser considerada como a solução do problema de Cauchy $\Box \xi^\mu = 0$ sujeito às condições iniciais acima e

$$\partial_0 \xi^0(t_0,x) = \frac{h(t_0,x)}{2} - \partial_j \xi^j(t_0,x)$$

$$\partial_0 \xi^j(t_0,x) = h_0^j(t_0,x) - \partial^j \xi_0(t_0,x)$$

A partir de agora suporemos que já fizemos a escolha desse "gauge" em que $h_{0j} = 0$ e $h = 0$ ($\Rightarrow \bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$). Além disso note o resultado do seguinte exercício:

Exercício: Mostre que nesse mesmo "gauge" escolhido acima, $h_{00}$ não depende do tempo: $h_{00}(t,x) = h_{00}(x)$.

Uma vez fixado este "gauge", vamos calcular a aceleração relativa entre as geodésicas ilustradas na figura anterior:

$$\ddot{\delta s}^a = -R_{bcd}{}^a u^b \delta x^c u^d \Rightarrow \delta\ddot{x}^\mu = -\underset{\sim\mathcal{O}(\partial^2 h)}{R_{\alpha\beta\gamma}{}^\mu} u^\alpha \delta x^\beta u^\gamma \simeq -R_{0\beta 0}{}^\mu \delta x^\beta \simeq -(\partial_\beta \Gamma^\mu_{00} - \partial_0 \Gamma^\mu_{\beta 0})\delta x^\beta = -(\partial_j \Gamma^\mu_{00} - \partial_0 \Gamma^\mu_{j0})\delta x^j$$

$$= \frac{\eta^{\mu\alpha}}{2}\Big(\overbrace{-\partial_j \partial_0 h_{0\alpha}}^{\simeq 0} \overbrace{-\partial_j \partial_0 h_{0\alpha}}^{\simeq 0} + \underset{\propto GM/r^3}{\partial_j \partial_\alpha h_{00}} + \overbrace{\partial_0 \partial_j h_{0\alpha}}^{\simeq 0} + \underset{\propto G\dddot{Q}^j_k/r}{\partial_0 \partial_0 h_{j\alpha}} - \partial_0 \partial_\alpha \overset{\simeq 0}{h_{0j}}\Big)\delta x^j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta\ddot{x}^\mu = (0, \delta x^k \partial_k \partial^j h_{00} + \delta x^k \partial_0^2 h_k{}^j) \simeq (0, \underline{\underline{\delta x^k \partial_0^2 h_k{}^j}}) \;\|$$

Logo, vemos que muito afastado da fonte, o efeito dos termos da métrica que não dependem do tempo sobre a aceleração relativa das geodésicas é desprezável. Vamos nos centrar, portanto, na parte da métrica que possui dependência temporal.

É fácil verificar que as chamadas "ondas planas", $h_{jk}(t,x) = H_{jk}\, e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{x}}$, com $H_{jk} = H_{kj}$ constante, satisfazem a eq. de Einstein linearizadas no vácuo:

$$0 = \Box h_{jk} = H_{jk}(\omega^2 - \vec{k}^2) \Rightarrow \boxed{\omega = \|\vec{k}\|}$$ Ou seja, $k^\mu = (\omega, \vec{k})$, que é o 4-vetor de onda da onda plana (com $\omega$ sua freq. angular e $\vec{k}$ seu vetor de onda), é tipo-luz; as perturbações da métrica, como já vimos, se propagam à velocidade da luz. Além disso, pela condição de "gauge" fixada:

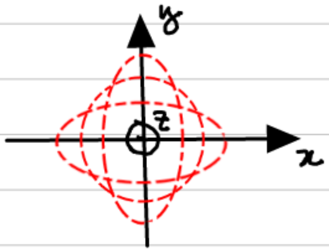
$$h = 0 \Rightarrow H^j{}_j = 0 \qquad (1 \text{ eq.})$$

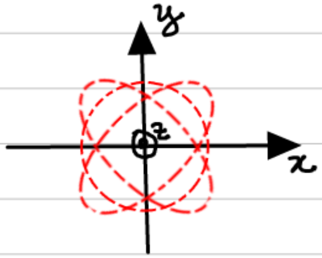
$$\partial_\mu h^\mu{}_\nu = 0 \Rightarrow k^j H_{jk} = 0 \qquad (3 \text{ eqs.})$$ (ondas transversais)

Assim, para cada escolha de $\vec{k}$, existe 2 $(= 6-1-3)$ soluções independentes p/ as condições acima.

Por exemplo, escolhendo $\vec{k} = (0,0,k)$, 2 soluções independentes são:

$$H^{(+)}_{jk} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & -\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H^{(\times)}_{jk} = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon & 0 \\ \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$




$$\underbrace{H^{(+)}_{jk} = \epsilon\left(\delta^1_j \delta^1_k - \delta^2_j \delta^2_k\right) \qquad H^{(\times)}_{jk} = \epsilon\left(\delta^1_j \delta^2_k + \delta^2_j \delta^1_k\right)}_{\text{2 estados de polarização p/ cada vetor de onda } \vec{k}}$$

**Exercício:** Mostre que linhas-de-mundo paradas nas coordenadas $(x,y,z)$, nas quais as componentes da métrica assumem a forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + H_{\mu\nu} \cos(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t),$$

com $H_{00} = H_{0j} = 0$, $k^j H_{jk} = 0$, $H_{jk} = H_{kj}$, são geodésicas.

**Exercício:** Mostre que podemos escrever estados de polarização circulares, nas quais a amplitude da onda é representada por uma elipse girante (no sentido horário e anti-horário)

**Exercício:** Considere uma onda gravitacional descrita pela perturbação

$$h_{\mu\nu}(t,x,y,z) = \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix} \cos(4x + 3z - \omega t) \qquad \text{(unidades arbitrárias)}$$

Determine os valores de $a, b, c, d, \omega$.