

AULA 21

MECÂNICA QUÂNTICA II

V - Quantização do Campo Eletromagnético

1.0) Quantização do Campo Livre

Nosso caminho para a quantização começará pelo campo eletromagnético livre, veremos como a teoria quântica trata o fóton com dois estados de polarização.

1.1) Teoria Clássica

As equações de Maxwell no vácuo (na ausência de fontes) são simplesmente

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (1a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1b)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1c)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1d)$$

Para satisfazer (1b) e (1c) podemos usar os potenciais vetor e escalar

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (2a)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (2b)$$

todavia $(\phi, \vec{A})$ não é uma escolha única pois

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad (3)$$

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda \quad (4)$$

deixe $\vec{B}$ e $\vec{E}$ inalterados (invariância de gauge)

De fato as equações (1a) e (1d) escritas em termos de ϕ e $\vec{A}$ são:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\nabla^2 \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (5)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = 0 \quad (6)$$

Se tivermos A_i e $\dot{A}_i$ em t_0 , podemos obter ϕ resolvendo (5)

$$\phi(\vec{x}) = \int d^3x' \frac{\left(\vec{\nabla} \cdot \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)(\vec{x}')}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (7)$$

mas é independente, não podemos especificar ϕ em t_0 .

Nesse ponto é conveniente escolher um gauge

(a) gauge de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (8)$

$$A^\mu = (\phi, \vec{A}) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

gauge invariante de Lorentz

(b) gauge de Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (9)$

Suponha que partamos de A_μ' , tal que $\partial_\mu (A')^\mu = f(x)$

podemos escolher $A_\mu = A_\mu' + \partial_\mu \Lambda$ onde

$$\partial_\mu \partial^\mu \Lambda = -f(x) \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu A^\mu = 0$$

note que sempre podemos fazer

$$A^\mu \rightarrow \tilde{A}^\mu + \partial^\mu \lambda$$

$$\partial_\mu A^\mu = \partial_\mu \tilde{A}^\mu + \partial_\mu \partial^\mu \lambda = 0 \quad \text{com} \quad \partial_\mu \partial^\mu \lambda = 0$$

podemos usar uma transf. de gauge residual para ter $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ e como $A_0 = \phi$ está fixo por (7) $\Rightarrow A_0 = 0$

O gauge de Coulomb quebra a invariância de Lorentz, no entanto ele é muito útil para mostrar os graus de liberdade físicos: os 3 componentes de $\vec{A}$ satisfazem a condição $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ $\Rightarrow$ há apenas 2 graus de liberdade que serão identificados às duas polarizações do fóton.

Nesse gauge

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (10)$$

Utilizaremos (10) para obter um conjunto completo de modos normais. Para simplificar, colocaremos o sistema em uma caixa e utilizaremos condições de contorno periódicas. Os modos normais de (10) são

$$e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} = e^{-ikx} \quad ; \quad \omega_k = ck$$

$$\vec{k} = (n_x, n_y, n_z) \frac{2\pi}{L^3}$$

$$n_{x,y,z} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$= (n_x, n_y, n_z) \frac{2\pi}{V^{1/3}}$$

Sistema de partículas livres em uma caixa com condições de contorno periódicas que ondas planas formam um conjunto completo. Lembrando que

$$\int_V d\vec{r} \left(\frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{\sqrt{V}} \right)^* \frac{e^{i\vec{k}' \cdot \vec{r}}}{\sqrt{V}} = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \quad (11)$$

e que

$$\sum_{\vec{k}} |\vec{k}\rangle \langle \vec{k}| = 1 \Rightarrow \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (12)$$

Agora expandindo o potencial vetor $\vec{A}$ em ondas planas

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \left(\vec{\tilde{A}}_{\vec{k}}(t) \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{\sqrt{V}} + \vec{\tilde{A}}_{\vec{k}}^*(t) \frac{e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{\sqrt{V}} \right) \quad (13)$$

meusando do 2^{do} termo (c.c) pois $\vec{A}$ é real!

Trocando a segunda soma por $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{\sqrt{V}} \left[\vec{\tilde{A}}_{\vec{k}}(t) + \vec{\tilde{A}}_{-\vec{k}}^*(t) \right] \quad (14)$$

A escolha de gauge, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, implica

$$\vec{k} \cdot \vec{\tilde{A}}_{\vec{k}}(t) = 0 \quad (15)$$

os vetores $\vec{\tilde{A}}_{\vec{k}}$ são $\perp$ à direção de propagação. Substituindo

(15) em (10) obtemos

$$\sum_{\vec{k}} \left\{ \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{\sqrt{V}} \left(-k^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \tilde{\vec{A}}_{\vec{k}}(t) + \frac{e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{\sqrt{V}} \left(-k^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \tilde{\vec{A}}_{\vec{k}}^*(t) \right\}_{z=0}$$

$$\tilde{\vec{A}}_{\vec{k}} = \vec{A}_{\vec{k}} e^{-i\omega_k t} \quad (16a)$$

$$\omega_k = kc \quad ; \quad k = |\vec{k}|$$

$$\tilde{\vec{A}}_{-\vec{k}}^* = \vec{A}_{-\vec{k}}^* e^{i\omega_k t} \quad (16b)$$

Expressando a energia do campo e.m. em termos dos modos normais

$$H_{\gamma} = \frac{1}{2} \int d^3r \left[\vec{E}^2 + \vec{B}^2 \right] \quad (17)$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \stackrel{(14) \text{ e } (16)}{=} \sum_{\vec{k}} i \frac{\omega_k}{c} \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{\sqrt{V}} \left[\tilde{\vec{A}}_{\vec{k}}(t) - \tilde{\vec{A}}_{-\vec{k}}^*(t) \right] \quad (17')$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \sum_{\vec{k}} i \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{\sqrt{V}} \vec{k} \times \left[\tilde{\vec{A}}_{\vec{k}}(t) + \tilde{\vec{A}}_{-\vec{k}}^*(t) \right] \quad (17'')$$

Assim

$$\begin{aligned} \int d^3r \vec{E}^2 &= \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} -kk' \int d^3r \frac{e^{i(\vec{k}+\vec{k}') \cdot \vec{r}}}{V} \overbrace{\delta_{\vec{k}, -\vec{k}'}} \left[\tilde{\vec{A}}_{\vec{k}}(t) - \tilde{\vec{A}}_{-\vec{k}}^*(t) \right] \cdot \left[\tilde{\vec{A}}_{\vec{k}'} - \tilde{\vec{A}}_{-\vec{k}'}^* \right] \\ &= \sum_{\vec{k}} k^2 \left(\tilde{\vec{A}}_{\vec{k}} - \tilde{\vec{A}}_{-\vec{k}}^* \right) \cdot \left(\tilde{\vec{A}}_{\vec{k}}^* - \tilde{\vec{A}}_{-\vec{k}} \right) = \sum_{\vec{k}} k^2 \left| \tilde{\vec{A}}_{\vec{k}} - \tilde{\vec{A}}_{-\vec{k}}^* \right|^2 \end{aligned}$$

de forma análoga

$$\int d^3r \vec{B}^2 = \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \int d^3r \frac{e^{i(\vec{k}+\vec{k}') \cdot \vec{r}}}{V} \overbrace{\delta_{\vec{k}, -\vec{k}'}} \vec{k} \times \left[\tilde{\vec{A}}_{\vec{k}} + \tilde{\vec{A}}_{-\vec{k}}^* \right] \cdot \vec{k}' \times \left[\tilde{\vec{A}}_{\vec{k}'} + \tilde{\vec{A}}_{-\vec{k}'}^* \right]$$

$$= \sum_{\vec{k}} \vec{k} \times (\vec{\tilde{A}}_{\vec{k}} + \vec{\tilde{A}}_{-\vec{k}}^*) \cdot \vec{k} \times (\vec{\tilde{A}}_{\vec{k}}^* + \vec{\tilde{A}}_{-\vec{k}})$$

$$= \sum_{\vec{k}} |\vec{k} \times (\vec{\tilde{A}}_{\vec{k}} + \vec{\tilde{A}}_{-\vec{k}}^*)|^2 = \sum_{\vec{k}} k^2 |\vec{\tilde{A}}_{\vec{k}} + \vec{\tilde{A}}_{-\vec{k}}^*|^2$$

logo

$$H_r = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} k^2 \left\{ |\vec{\tilde{A}}_{\vec{k}} + \vec{\tilde{A}}_{-\vec{k}}^*|^2 + |\vec{\tilde{A}}_{\vec{k}} - \vec{\tilde{A}}_{-\vec{k}}^*|^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} k^2 \left\{ |\vec{\tilde{A}}_{\vec{k}}|^2 + |\vec{\tilde{A}}_{-\vec{k}}^*|^2 + \cancel{\vec{\tilde{A}}_{\vec{k}} \cdot \vec{\tilde{A}}_{-\vec{k}}} + \cancel{\vec{\tilde{A}}_{-\vec{k}}^* \cdot \vec{\tilde{A}}_{\vec{k}}} \right.$$

$$\left. + |\vec{\tilde{A}}_{\vec{k}}|^2 + |\vec{\tilde{A}}_{-\vec{k}}^*|^2 - \cancel{\vec{\tilde{A}}_{\vec{k}} \cdot \vec{\tilde{A}}_{-\vec{k}}} - \cancel{\vec{\tilde{A}}_{-\vec{k}}^* \cdot \vec{\tilde{A}}_{\vec{k}}} \right\}$$

$$= \sum_{\vec{k}} k^2 \left\{ |\vec{\tilde{A}}_{\vec{k}}|^2 + |\vec{\tilde{A}}_{-\vec{k}}^*|^2 \right\} = 2 \sum_{\vec{k}} k^2 |\vec{\tilde{A}}_{\vec{k}}|^2$$

$$\therefore H_r = 2 \sum_{\vec{k}} k^2 |\vec{\tilde{A}}_{\vec{k}}|^2 \quad (18)$$

Nesse ponto é conveniente introduzir os vetores de polarização

$$\vec{\tilde{A}}_{\vec{k}} \cdot \vec{k} = \vec{A}_{\vec{k}} \cdot \vec{k} e^{-i\omega_{\vec{k}} t} = 0 \quad \vec{A}_{\vec{k}} \cdot \vec{k} = 0$$

Definimos agora uma base (para cada $\vec{k}$) de vetores

$\vec{E}_{\vec{k}_\alpha}$ tais que

$$\vec{E}_{\vec{k}_1} \times \vec{E}_{\vec{k}_2} = \hat{k} \quad (19a)$$

$$\hat{k} \cdot \vec{E}_{\vec{k}_\alpha} = 0 \quad (19b)$$

($\perp$ direção de propagação)

$$\vec{E}_{\vec{k}_\alpha} \cdot \vec{E}_{\vec{k}_\beta} = \delta_{\alpha\beta} \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (19c)$$

Esta é a base de polarização linear. Nessa base

$$\vec{A}_{\vec{k}} = \sum_{\alpha=1}^2 \vec{E}_{\vec{k}_\alpha} A_\alpha(\vec{k}) \quad (20)$$

o que nos permite re-escrever (18) como

$$H_g = 2 \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\vec{k}} k^2 |A_\alpha(\vec{k})|^2 \quad (21)$$

outra base conveniente é a base de polarizações circulares. Nesse caso

$$\vec{E}_{\vec{k}, \pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{E}_{\vec{k}_1} \pm i \vec{E}_{\vec{k}_2}) \quad (22a)$$

que satisfazem

$$\vec{E}_{\vec{k}\lambda}^* \cdot \vec{E}_{\vec{k}\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'} \quad (22b)$$

$$\vec{E}_{\vec{k}\lambda}^* \times \vec{E}_{\vec{k}\lambda'} = i\lambda \hat{k} \delta_{\lambda\lambda'} \quad \lambda, \lambda' = \pm 1 \quad (22c)$$

$$i\hat{k} \times \vec{E}_{\vec{k}\lambda} = \lambda \vec{E}_{\vec{k}\lambda} \quad (22d)$$

nessa base escrevemos

$$\vec{A}_{\vec{k}} = \sum_{\lambda=\pm 1} A_\lambda(\vec{k}) \vec{E}_{\vec{k}\lambda} \quad (23)$$

o que leva a

$$H_g = 2 \sum_{\lambda=\pm 1} \sum_{\vec{k}} k^2 |A_\lambda(\vec{k})|^2 \quad (24)$$

Podemos deixar H_T na forma de um oscilador harmônico definido

$$\vec{\Phi}_{\vec{k}}(t) = \frac{1}{c} \left[\vec{\tilde{A}}_{\vec{k}}(t) + \vec{\tilde{A}}_{\vec{k}}^*(t) \right] \quad (25a)$$

$$\vec{P}_{\vec{k}}(t) = -ik \left[\vec{\tilde{A}}_{\vec{k}}(t) - \vec{\tilde{A}}_{\vec{k}}^*(t) \right] \quad (25b)$$

que satisfaz para $m=1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\vec{P}_{\vec{k}}^2 + \omega_k^2 \vec{\Phi}_{\vec{k}}^2) &= \frac{1}{2} \left[-k^2 (\vec{\tilde{A}}_{\vec{k}} - \vec{\tilde{A}}_{\vec{k}}^*)^2 + \frac{\omega_k^2}{c^2} (\vec{\tilde{A}}_{\vec{k}} + \vec{\tilde{A}}_{\vec{k}}^*)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} k^2 \left[-(\vec{\tilde{A}}_{\vec{k}})^2 - (\vec{\tilde{A}}_{\vec{k}}^*)^2 + 2 \vec{\tilde{A}}_{\vec{k}} \vec{\tilde{A}}_{\vec{k}}^* + (\vec{\tilde{A}}_{\vec{k}})^2 + (\vec{\tilde{A}}_{\vec{k}}^*)^2 + 2 (\vec{\tilde{A}}_{\vec{k}} \vec{\tilde{A}}_{\vec{k}}^*) \right] \\ &= 2 k^2 |\vec{\tilde{A}}_{\vec{k}}|^2 \end{aligned}$$

podemos escrever assim

$$H_T = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} (\vec{P}_{\vec{k}}^2(t) + \omega_k^2 \vec{\Phi}_{\vec{k}}^2(t)) \quad (25c)$$

2.0) Quantização

Utilizando a polarização linear

$$\vec{P}_{\vec{k}} = \sum_{\alpha=1}^2 \vec{e}_{\vec{k}\alpha} P_{\alpha}(\vec{k})$$

$$\vec{\Phi}_{\vec{k}} = \sum_{\alpha=1}^2 \vec{e}_{\vec{k}\alpha} Q_{\alpha}(\vec{k})$$

$$H_T = \frac{1}{2} \sum_k \sum_{\alpha=1,2} \left(P_{\alpha}^2(k) + \omega_k^2 Q_{\alpha}^2(k) \right)$$

em analogia ao oscilador harmônico podemos promover $P_{\alpha}(k)$ e $Q_{\alpha}(k)$ a operadores satisfazendo as relações de comutação canônicas

$$[Q_{\alpha}(k), P_{\beta}(k')] = i\hbar \delta_{k,k'} \delta_{\alpha\beta} \quad (26a)$$

$$[Q_{\alpha}(k), Q_{\beta}(k')] = [P_{\alpha}(k), P_{\beta}(k')] = 0 \quad (26b)$$

as equações de movimento quânticas para $Q_{\alpha}(k)$ e $P_{\beta}(k)$ são (na descrição de Heisenberg)

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = [\Psi, H]$$

$$i\hbar \frac{\partial Q_{\alpha}(k)}{\partial t} = [Q_{\alpha}(k), \frac{1}{2} \sum_{k'} \sum_{\beta} (P_{\beta}^2(k') + \omega_{k'}^2 Q_{\beta}^2(k'))]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k'} \sum_{\beta} \underbrace{[Q_{\alpha}(k), P_{\beta}^2(k')]}_{2i\hbar \delta_{\alpha\beta} \delta_{k,k'} P_{\beta}(k')} = i\hbar P_{\alpha}(k)$$

$$\Rightarrow \dot{Q}_{\alpha}(k) = P_{\alpha}(k) \quad (27a)$$

$$i\hbar \frac{\partial P_{\alpha}(k)}{\partial t} = [P_{\alpha}(k), \frac{1}{2} \sum_{k'} \sum_{\beta} (P_{\beta}^2(k') + \omega_{k'}^2 Q_{\beta}^2(k'))]$$

$$= \frac{1}{2} \omega_k^2 (-2i\hbar Q_{\alpha}(k)) \Rightarrow \dot{P}_{\alpha}(k) = -\omega_k^2 Q_{\alpha}(k) \quad (27b)$$

agora podemos definir os operadores de criação e aniquilação:

$$a_{\vec{k}\alpha}^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\vec{k}}}} \left(\omega_{\vec{k}} Q_{\alpha}(\vec{k}) - i P_{\alpha}(\vec{k}) \right) \quad (28a)$$

$$a_{\vec{k}\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\vec{k}}}} \left(\omega_{\vec{k}} Q_{\alpha}(\vec{k}) + i P_{\alpha}(\vec{k}) \right) \quad (28b)$$

de forma que

$$\begin{aligned} [a_{\vec{k}\alpha}, a_{\vec{k}'\beta}^+] &= \frac{1}{2\hbar\omega_{\vec{k}}} \left[\omega_{\vec{k}} Q_{\alpha}(\vec{k}) + i P_{\alpha}(\vec{k}), \omega_{\vec{k}'} Q_{\beta}(\vec{k}') - i P_{\beta}(\vec{k}') \right] \\ &= \frac{1}{2\hbar\omega_{\vec{k}}} \left[\omega_{\vec{k}} i\hbar \delta_{\alpha\beta} \delta_{\vec{k}\vec{k}'} (-i) + i\hbar\omega_{\vec{k}} (-i \delta_{\alpha\beta} \delta_{\vec{k}\vec{k}'}) \right] \\ &= \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{\alpha\beta} \quad (28c) \end{aligned}$$

É imediato obter que

$$\begin{aligned} H_T &= \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha} \hbar \omega_{\vec{k}} \left[a_{\vec{k}\alpha}^+ a_{\vec{k}\alpha} + \frac{1}{2} \right] \\ &= \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha} \hbar \omega_{\vec{k}} \left[N_{\vec{k}\alpha} + \frac{1}{2} \right] \quad (29) \end{aligned}$$

$N_{\vec{k}\alpha} \equiv a_{\vec{k}\alpha}^+ a_{\vec{k}\alpha}$ que possui autovalores $0, 1, 2, \dots$

Note que (29) é divergente!

A equação de Heisenberg para $a_{\vec{k}\alpha}$ é

$$i\hbar \dot{a}_{\vec{k}\alpha} = [a_{\vec{k}\alpha}, H_T] = \hbar \omega_{\vec{k}} a_{\vec{k}\alpha} \quad (30)$$

$$a_{\vec{k}\alpha}(t) = a_{\vec{k}\alpha}(0) e^{-i\omega_{\vec{k}} t} \quad (31)$$

re-escrevemos os campos $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{E}$ em termos de $a_{\vec{k}\alpha}$

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha}(\vec{k}) &= \frac{1}{c} \left[\tilde{A}_{\alpha}(\vec{k}) + \tilde{A}_{\alpha}^*(\vec{k}) \right] \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\vec{k}}}} \left[a_{\vec{k}\alpha} + a_{\vec{k}\alpha}^{\dagger} \right] \end{aligned}$$

$$\tilde{A}_{\alpha}(\vec{k}) = \sqrt{\frac{\hbar c}{2k}} a_{\vec{k}\alpha}$$

(14)

O que nos permite escrever:

$$\vec{A}(x) = \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha} \sqrt{\frac{\hbar c}{2kV}} \left[e^{-ikx} a_{\vec{k}\alpha}(0) \vec{e}_{\vec{k}\alpha} + e^{+ikx} a_{\vec{k}\alpha}^{\dagger}(0) \vec{e}_{\vec{k}\alpha}^* \right] \quad (32)$$

Onde $kx = -\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega_{\vec{k}} t$

(17') e (17'')

$$\vec{E}(x) = i \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha} \sqrt{\frac{\hbar ck}{2V}} \left[e^{-ikx} a_{\vec{k}\alpha}(0) \vec{e}_{\vec{k}\alpha} - h.c. \right] \quad (33)$$

$$\vec{B}(x) = i \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha} \sqrt{\frac{\hbar c}{2kV}} \left[e^{-ikx} \vec{k} \times \vec{e}_{\vec{k}\alpha} a_{\vec{k}\alpha}(0) - h.c. \right] \quad (34)$$

(11)

antes de interpretar os resultados calcularemos o momento linear do campo eletromagnético

$$\vec{P} = \frac{1}{2c} \int d^3r [\vec{E} \times \vec{B} - \vec{B} \times \vec{E}] \quad (35)$$

já escrito de forma que seja hermitiano.

$$\begin{aligned} \int d^3r (\vec{E} \times \vec{B}) &= - \int d^3r \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} \sum_{\alpha, \beta} \sqrt{\frac{\hbar c k}{2V}} \sqrt{\frac{\hbar c}{2V k'}} \left(e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} a_{\vec{k}\alpha} \vec{E}_{\vec{k}\alpha} \right. \\ &\quad \left. - e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} a_{\vec{k}\alpha}^+ \vec{E}_{\vec{k}\alpha}^* \right) \times \left(e^{i\vec{k}' \cdot \vec{r}} a_{\vec{k}'\beta} \vec{k}' \times \vec{E}_{\vec{k}'\beta} - e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{r}} a_{\vec{k}'\beta}^+ \vec{k}' \times \vec{E}_{\vec{k}'\beta}^* \right) \\ &= \underbrace{\left(\int d^3r e^{i(\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{r}} \right)}_{V \delta_{\vec{k}, -\vec{k}'}} \left(- \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha, \beta} \frac{\hbar c}{2} \left\{ a_{\vec{k}\alpha} a_{-\vec{k}\beta} \vec{E}_{\vec{k}\alpha} \times (-\vec{k} \times \vec{E}_{-\vec{k}\beta}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - a_{\vec{k}\alpha}^+ a_{-\vec{k}\beta} \vec{E}_{\vec{k}\alpha} \times (\vec{k} \times \vec{E}_{-\vec{k}\beta}^*) - a_{\vec{k}\alpha} a_{\vec{k}\beta}^+ \vec{E}_{\vec{k}\alpha}^* \times (\vec{k} \times \vec{E}_{\vec{k}\beta}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + a_{\vec{k}\alpha}^+ a_{-\vec{k}\beta}^+ \vec{E}_{\vec{k}\alpha}^* \times (-\vec{k} \times \vec{E}_{-\vec{k}\beta}^*) \right\} \right) \end{aligned}$$

Usando:

$$\vec{E}_{\vec{k}\alpha} \times (\vec{k} \times \vec{E}_{\vec{k}\beta}) = \vec{k} \cdot \underbrace{(\vec{E}_{\vec{k}\alpha} \cdot \vec{E}_{\vec{k}\beta})}_{\delta_{\alpha\beta}} - \vec{E}_{\vec{k}\beta} (\vec{E}_{\vec{k}\alpha} \cdot \vec{k})$$

$$\int d^3r (\vec{E} \times \vec{B}) = \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha} \frac{\hbar c}{2} \vec{k} \left\{ a_{\vec{k}\alpha} a_{-\vec{k}\alpha} + a_{\vec{k}\alpha}^{\dagger} a_{-\vec{k}\alpha}^{\dagger} + a_{\vec{k}\alpha} a_{\vec{k}\alpha}^{\dagger} + a_{-\vec{k}\alpha}^{\dagger} a_{-\vec{k}\alpha} \right\}$$

logo

$$\vec{P} = \frac{1}{2c} \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha} \frac{\hbar c}{2} \vec{k} \left\{ \underline{a_{\vec{k}\alpha} a_{-\vec{k}\alpha}} + \underline{a_{\vec{k}\alpha}^{\dagger} a_{-\vec{k}\alpha}^{\dagger}} + a_{\vec{k}\alpha} a_{\vec{k}\alpha}^{\dagger} + a_{-\vec{k}\alpha}^{\dagger} a_{-\vec{k}\alpha} + \underline{a_{-\vec{k}\alpha} a_{\vec{k}\alpha}} + \underline{a_{-\vec{k}\alpha}^{\dagger} a_{\vec{k}\alpha}^{\dagger}} + a_{\vec{k}\alpha} a_{-\vec{k}\alpha}^{\dagger} + a_{-\vec{k}\alpha}^{\dagger} a_{\vec{k}\alpha} \right\}$$

Agora

$$\sum_{\vec{k}} \vec{k} [a_{\vec{k}\alpha} a_{-\vec{k}\alpha} + a_{\vec{k}\alpha}^{\dagger} a_{-\vec{k}\alpha}^{\dagger}] + \sum_{\vec{k}} \vec{k} [a_{-\vec{k}\alpha} a_{\vec{k}\alpha} + a_{-\vec{k}\alpha}^{\dagger} a_{\vec{k}\alpha}^{\dagger}]$$

$$= \sum_{\vec{k}} \vec{k} [a_{\vec{k}\alpha} a_{-\vec{k}\alpha} + a_{\vec{k}\alpha}^{\dagger} a_{-\vec{k}\alpha}^{\dagger}] - \sum_{\vec{k}} \vec{k} [a_{\vec{k}\alpha} a_{\vec{k}\alpha} + a_{\vec{k}\alpha}^{\dagger} a_{-\vec{k}\alpha}^{\dagger}] = 0$$

logo

$$\vec{P} = \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha} \frac{\hbar \vec{k}}{2} \left\{ \overbrace{a_{\vec{k}\alpha} a_{\vec{k}\alpha}^{\dagger} + a_{\vec{k}\alpha}^{\dagger} a_{\vec{k}\alpha}}^{2 a_{\vec{k}\alpha}^{\dagger} a_{\vec{k}\alpha} + 1} \right\}$$

$$\therefore \vec{P} = \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha} \hbar \vec{k} \left(N_{\vec{k}\alpha} + \underbrace{\frac{1}{2}}_0 \right) \quad (36)$$

(por simetria!)