

AULA 18

MECÂNICA QUÂNTICA II

AULA 18

Operador de Número

Definimos o chamado operador de número

$$N_m = \int d^3x \psi_m^\dagger(\vec{x}) \psi_m(\vec{x}) \quad (29a) \quad \text{e} \quad N = \sum_m N_m \quad (29b)$$

De fato

$$N_m = \int d^3x \sum_{\vec{p}} \frac{e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}/\hbar}}{\sqrt{V}} a_{\vec{p}m}^\dagger \sum_{\vec{p}'} \frac{e^{i\vec{p}' \cdot \vec{x}/\hbar}}{\sqrt{V}} a_{\vec{p}'m} = \sum_{\vec{p}} a_{\vec{p}m}^\dagger a_{\vec{p}m} \quad (29c)$$

$\equiv \delta_{\vec{p}, \vec{p}'}$

O que é de fato o operador de número!

O operador $\psi_m^\dagger(\vec{x}) \psi_m(\vec{x})$ pode ser interpretado como o operador relacionado à densidade de número de partículas.

Para ver isso definimos

$$N_{\Delta V}^m = \int_{\Delta V} d^3x \psi_m^\dagger(\vec{x}) \psi_m(\vec{x}) \quad (30)$$

onde ΔV é uma região arbitrária. Seja o estado $\psi_m^\dagger(\vec{y})|0\rangle$ com $\vec{y} \notin \Delta V$

$$N_{\Delta V}^m \psi_m^\dagger(\vec{y})|0\rangle = \int_{\Delta V} d^3x \underbrace{\psi_m^\dagger(\vec{x}) \psi_m(\vec{x})}_{\pm \psi_m^\dagger(\vec{y}) \psi_m(\vec{x})} \psi_m^\dagger(\vec{y})|0\rangle \equiv 0$$

como esperado pois a partícula está fora do volume ΔV

Agora para $\vec{y} \in \Delta V$

$$N_{\Delta V}^m \psi_{m'}^+(\vec{y}) |0\rangle = \int_{\Delta V} d^3x \underbrace{\psi_m^+(\vec{x}) \psi_m(\vec{x})}_{\delta_{mm'} \delta(\vec{x}-\vec{y}) \pm \psi_{m'}^+(\vec{y}) \psi_m(\vec{x})} \psi_{m'}^+(\vec{y}) |0\rangle$$

$$= \int_{\Delta V} d^3x \delta_{mm'} \delta(\vec{x}-\vec{y}) \psi_m^+(\vec{x}) |0\rangle = \psi_{m'}^+(\vec{y}) |0\rangle$$

$\therefore \psi_{m'}^+(\vec{y}) |0\rangle$ é auto-vetor de $N_{\Delta V}^m$ com auto-valor 0 se $\vec{y} \notin \Delta V$ ou $m \neq m'$. Se $m=m'$ e $\vec{y} \in \Delta V$ o auto-valor é 1.

Agora repetindo o cálculo acima para o estado

$$\psi_{m'}^+(\vec{y}) \psi_{m'}^+(\vec{z}) |0\rangle$$

Vemos que este estado é auto-vetor de $N_{\Delta V}^m$ com auto-valor

0 se $m \neq m'$ e $\vec{y} \notin \Delta V$ e $\vec{z} \notin \Delta V$

1 se $\vec{y} \in \Delta V$ e $\vec{z} \notin \Delta V$ ou vice-versa

2 se $\vec{y} \text{ e } \vec{z} \in \Delta V$

(Mostre!). Esse é o resultado esperado!

Propriedade Importante:

Definimos $\psi_m(\vec{x})$ e $\psi_m^+(\vec{x})$ usando a base de auto-vetores do momento e obtivemos as relações (28). De fato estas relações independem da base usada para definir $\psi_m(\vec{x})$! Isto pode ser visto fazendo o caminho inverso do que adotamos. Dadas as relações (28), escolhemos a base ortogonal $\psi_k(\vec{x})$ tal que

$$\int d^3x \varphi_{\vec{k}}^*(\vec{x}) \varphi_{\vec{k}'}(\vec{x}) = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \quad (31a)$$

$$\sum_{\vec{k}} \varphi_{\vec{k}}^*(\vec{x}) \varphi_{\vec{k}}(\vec{x}') = \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (31b)$$

e escrevemos

$$\psi_m(\vec{x}) = \sum_{\vec{k}} \varphi_{\vec{k}}(\vec{x}) a_{\vec{k}m} \quad (32a)$$

$$\text{com } a_{\vec{k}m} = \int d^3x \varphi_{\vec{k}}^*(\vec{x}) \psi_m(\vec{x}) \quad (32b)$$

Segue de (28), (31) e (32) que para bósons

$$[a_{\vec{k}m}, a_{\vec{k}'m'}^\dagger] = \delta_{m,m'} \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \text{ e } [a_{\vec{k}m}^{(+)}, a_{\vec{k}'m'}^{(+)}] = 0 \quad (33a)$$

enquanto que para férmions

$$\{a_{\vec{k}m}, a_{\vec{k}'m'}^\dagger\} = \delta_{m,m'} \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \text{ e } \{a_{\vec{k}m}^{(+)}, a_{\vec{k}'m'}^{(+)}\} = 0 \quad (33b)$$

Funções de Onda de Muitas Partículas

Por simplicidade vamos suprimir os índices de spin, convencionando que no que segue $\vec{x}$ significa $\vec{x}_m$! O estado de N partículas nas posições $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N$ é dado por

$$|\vec{x}_1 \vec{x}_2 \dots \vec{x}_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \psi^\dagger(\vec{x}_N) \psi^\dagger(\vec{x}_{N-1}) \dots \psi^\dagger(\vec{x}_1) |0\rangle \quad (34)$$

Esta é uma base conveniente para sistemas de muitas partículas idênticas pois a simetria de função de onda está automaticamente imposta. Por exemplo:

$$|\vec{x}_1, \vec{x}_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi^+(\vec{x}_2) \psi^+(\vec{x}_1) |0\rangle = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \psi^+(\vec{x}_1) \psi^+(\vec{x}_2) |0\rangle$$

↑ *fermions*

$$= \pm |\vec{x}_2, \vec{x}_1\rangle$$

Além disso

$$\psi^+(\vec{x}) |\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N\rangle = \sqrt{N+1} |\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, \vec{x}\rangle \quad (35)$$

*adicionar uma partícula usando um operador de criação
produz estado automaticamente simétrico!*

onde o fator $\sqrt{N+1}$ é devido à definição (34)

Por outro lado

$$\psi(\vec{x}) |\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \psi(\vec{x}) \psi^+(\vec{x}_N) \dots \psi^+(\vec{x}_1) |0\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}} \left[\delta(\vec{x} - \vec{x}_N) \pm \psi^+(\vec{x}_N) \psi(\vec{x}) \right] \psi^+(\vec{x}_{N-1}) \dots \psi^+(\vec{x}_1) |0\rangle$$

↑ *fermion*

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}} \left[\delta(\vec{x} - \vec{x}_N) \psi^+(\vec{x}_{N-1}) \dots \psi^+(\vec{x}_1) \pm \psi^+(\vec{x}_N) \left[\delta(\vec{x} - \vec{x}_{N-1}) \pm \right. \right.$$

$$\left. \psi^+(\vec{x}_{N-2}) \dots \psi^+(\vec{x}_1) \right] |0\rangle$$

⋮

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}} \left[\delta(\vec{x} - \vec{x}_N) |\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{N-1}\rangle \pm \delta(\vec{x} - \vec{x}_{N-1}) |\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{N-2}, \vec{x}_N\rangle \right.$$

$$\left. + \dots, (\pm)^{N-1} \delta(\vec{x} - \vec{x}_1) |\vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N\rangle \right]$$

(16)

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N (\pm 1)^{N-j} \delta(\vec{x} - \vec{x}_j) \underbrace{|\vec{x}_1 \dots \vec{x}_{j-1} \vec{x}_{j+1} \dots\rangle}_{\text{sem } \vec{x}_j!} \quad (36)$$

remover uma partícula em $\vec{x}$ só funciona se $\vec{x} = \vec{x}_1, \vec{x} = \vec{x}_2, \dots$ ou $\vec{x} = \vec{x}_N$

EXEMPLO:

$$\psi(x) |\vec{x}_1 \vec{x}_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi(\vec{x}) \psi^+(\vec{x}_2) \psi^+(\vec{x}_1) |0\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\delta(\vec{x} - \vec{x}_2) \pm \psi^+(\vec{x}_2) \psi(\vec{x}) \right] \psi^+(\vec{x}_1) |0\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\delta(\vec{x} - \vec{x}_2) \psi^+(\vec{x}_1) |0\rangle \pm \delta(\vec{x} - \vec{x}_1) \psi^+(\vec{x}_2) |0\rangle \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\delta(\vec{x} - \vec{x}_2) |\vec{x}_1\rangle \pm \delta(\vec{x} - \vec{x}_1) |\vec{x}_2\rangle \right]$$

Dado um estado de N partículas $|\Phi\rangle$ podemos escrever

$$|\Phi\rangle = \int d^3x_1 \dots d^3x_N \bar{\varphi}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) |\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N\rangle \quad (37)$$

onde $\bar{\varphi}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$ é a função de onda usual. Note que

a simetria de ~~$|\Phi\rangle$~~ $|\Phi\rangle$ é garantida mesmo que $\bar{\varphi}$ não esteja simetrizada!

De fato

$$\langle \vec{x}'_1 \dots \vec{x}'_N | \Phi \rangle = \int d^3x_1 \dots d^3x_N \bar{\varphi}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) \langle \vec{x}'_1 \dots \vec{x}'_N | \vec{x}_1 \dots \vec{x}_N \rangle$$

No caso $N=2$

$$2! \langle \vec{x}'_1 \vec{x}'_2 | \vec{x}_1 \vec{x}_2 \rangle = \langle 0 | \psi(\vec{x}'_1) \psi(\vec{x}'_2) \underbrace{\psi^\dagger(\vec{x}_2) \psi^\dagger(\vec{x}_1)}_{\delta(\vec{x}_2 - \vec{x}'_2) \pm \psi^\dagger(\vec{x}_2) \psi(\vec{x}'_2)} | 0 \rangle$$

$$= \delta(\vec{x}_2 - \vec{x}'_2) \langle 0 | \underbrace{\psi(\vec{x}'_1) \psi^\dagger(\vec{x}_1)}_{\delta(\vec{x}_1 - \vec{x}'_1) \pm \psi^\dagger(\vec{x}_1) \psi(\vec{x}'_1)} | 0 \rangle \pm \langle 0 | \psi(\vec{x}'_1) \psi^\dagger(\vec{x}_2) \underbrace{\psi(\vec{x}'_2) \psi^\dagger(\vec{x}_1)}_{\delta(\vec{x}'_2 - \vec{x}_1) \pm \psi^\dagger(\vec{x}_1) \psi(\vec{x}'_2)} | 0 \rangle$$

$$= \delta(\vec{x}_2 - \vec{x}'_2) \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}'_1) \pm \delta(\vec{x}_2 - \vec{x}'_1) \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$$

$$\langle \vec{x}'_1 \vec{x}'_2 | \phi \rangle = \int d^3x_1 d^3x_2 \bar{\varphi}(\vec{x}'_1, \vec{x}'_2) \frac{1}{2!} [\delta(\vec{x}_2 - \vec{x}'_2) \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}'_1) \pm \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}'_2) \delta(\vec{x}_2 - \vec{x}'_1)] = \frac{1}{2!} [\bar{\varphi}(\vec{x}'_1, \vec{x}'_2) \pm \bar{\varphi}(\vec{x}'_2, \vec{x}'_1)]$$

Em geral:

$$\langle \vec{x}'_1 \dots \vec{x}'_{N'} | \vec{x}_1 \dots \vec{x}_N \rangle = \frac{\delta_{NN'}}{N!} \sum_{P_N} (\pm 1)^{P_N} P_N [\delta(\vec{x}_1 - \vec{x}'_1) \dots \delta(\vec{x}_N - \vec{x}'_{N'})] \quad (38a)$$

$\rightarrow$ permutação sobre $\vec{x}'$

$(\pm 1)^{P_N} = 1$ (bósons) e $= \text{sign}(P_N)$ p/ férmions

Com isso

$$\langle \vec{x}'_1 \dots \vec{x}'_{N'} | \Phi \rangle = \frac{1}{N!} \sum_{P_N} (\pm 1)^{P_N} P_N \bar{\varphi}(\vec{x}'_1, \dots, \vec{x}'_{N'}) \quad (38b)$$

Como deveria ser!

Se $\bar{\varphi}$ for normalizada e simetrizada $\langle \Phi | \Phi \rangle = 1$

Exercício: Mostre esse fato!

Operadores de Segunda Quantização

Anteriormente escrevemos que a energia cinética de um sistema é, na base do momento linear,

$$E_c = \sum_{\vec{p}, m} \frac{\vec{p}^2}{2m_p} \vec{a}_{\vec{p}, m}^{\dagger} a_{\vec{p}, m} \quad (39)$$

usando $a_{\vec{p}, m} = \int d^3x \frac{e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}/\hbar}}{\sqrt{V}} \psi_m(\vec{x})$ temos que

$$E_c = \sum_{\vec{p}, m} \frac{\vec{p}^2}{2m_p} \int d^3x' \frac{e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}'/\hbar}}{\sqrt{V}} \psi_m^{\dagger}(\vec{x}') \int d^3x \frac{e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}/\hbar}}{\sqrt{V}} \psi_m(\vec{x})$$

$$= \frac{1}{2m_p} \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}, m} \int d^3x \int d^3x' \hbar \vec{\nabla}_{x'} \left(e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}'/\hbar} \right) \hbar \vec{\nabla}_x \left(e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}/\hbar} \right)$$

$$\psi_m^{\dagger}(\vec{x}') \psi_m(\vec{x}) \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{integrando por} \\ \text{partes} \end{array}$$

$$= \frac{1}{2m_p} \sum_m \int d^3x d^3x' \underbrace{\sum_{\vec{p}} \frac{e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')/\hbar}}{V}}_{\delta(\vec{x} - \vec{x}')} \hbar \vec{\nabla}_{x'} \psi_m^{\dagger}(\vec{x}') \cdot \hbar \vec{\nabla}_x \psi_m(\vec{x})$$

$$\therefore E_c = \frac{1}{2m_p} \sum_m \int d^3x \hbar^2 \vec{\nabla} \psi_m^{\dagger} \vec{\nabla} \psi_m = \frac{1}{2m_p} \sum_m \int d^3x \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \psi_m \right)^{\dagger} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \psi_m \right) \quad (40)$$

Note que as expressões de densidade de energia parecem com as expressões para uma partícula tratando fêmiões de onde vêm operadores de campo!

Consideremos agora observáveis que são a soma simétrica de observáveis de 1 partícula, por exemplo, o momento angular orbital ou spin

$$F = \sum_{j=1}^N f_j \quad (41)$$

Para obter a forma de F usando o formalismo de 2ª quantização vamos obter sua expressão usando o formalismo usual e ver a que corresponde na linguagem da 2ª quantização.

Sabemos que

$$|\vec{x}_1 m_1 \dots \vec{x}_N m_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{P_N} (\pm 1)^{P_N} P_N [|\vec{x}_1 m_1\rangle_1 \dots |\vec{x}_N m_N\rangle_N] \quad (42)$$

(voltamos p/a notação com m!)

Annotations:
 P_N : permutação das partículas
 $(\pm 1)^{P_N}$: *bons* ordem de permutação
 P_N : *funções*

garante o estado corretamente simetrizado

$$F|\vec{x}_1 m_1 \dots \vec{x}_N m_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{P_N} (\pm 1)^{P_N} P_N [(f_1 |\vec{x}_1 m_1\rangle_1) \dots |\vec{x}_N m_N\rangle_N]$$

+ ...

$$+ \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{P_N} (\pm 1)^{P_N} P_N [|\vec{x}_1 m_1\rangle_1 \dots (f_N |\vec{x}_N m_N\rangle_N)]$$

Agora escrevendo

$$f_j |\vec{x} m\rangle_j = \int d^3y \sum_{m_y} |\vec{y} m_y\rangle_j \langle \vec{y} m_y | f_j | \vec{x} m \rangle_j$$

aplicando a

$$F |\vec{x}_1 m_1, \dots, \vec{x}_N m_N\rangle = \int d^3y \sum_{m_y} \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{P_v} (\pm 1)^{P_v} P_v [|\vec{y} m_y\rangle_1 \dots |\vec{x}_N m_N\rangle_N] \langle \vec{y} m_y | f_1 |\vec{x}_1 m_1\rangle_1 + \dots + \int d^3y \sum_{m_y} \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{P_v} (\pm 1)^{P_v} P_v [|\vec{x}_1 m_1\rangle_1 \dots |\vec{y} m_y\rangle_N] \langle \vec{y} m_y | f_N |\vec{x}_N m_N\rangle_N$$

↖ igual

$$\stackrel{(42)}{=} \sum_{j=1}^N \int d^3y \sum_{m_y} |\vec{x}_1 m_1, \dots, \vec{x}_{j-1} m_{j-1} \vec{y} m_y \vec{x}_{j+1} m_{j+1} \dots \vec{x}_N m_N\rangle$$

$$\langle \vec{y} m_y | f | \vec{x}_j m_j \rangle \quad (43)$$

Qual operador no espaço de Fock conduz a (43)?

$$F_{2\phi} = \sum_{m m'} \int d^3x d^3x' \psi_m^\dagger(\vec{x}) \langle \vec{x} m | f | \vec{x}' m' \rangle \psi_m(\vec{x}') \quad (44)$$

Lembrando que (adaptando p/ a nova notação)

$$\psi(\vec{x}) |\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N (\pm 1)^{N-j} \delta(\vec{x} - \vec{x}_j) |\vec{x}_1 \dots \vec{x}_{j-1} \vec{x}_{j+1} \dots\rangle \quad (36)$$

↓

$$\psi_m(\vec{x}) |\vec{x}_1 m_1 \dots \vec{x}_N m_N\rangle$$

(21)

$$\begin{aligned} & \psi_m^+(\vec{x}) \psi_{m'}(\vec{x}') |\vec{x}_1 m_1 \dots \vec{x}_N m_N\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N (\pm 1)^{N-j} \delta_{m_j m'} \delta(\vec{x}' - \vec{x}_j) \overset{\psi_m^+(\vec{x})}{|\vec{x}_1 m_1 \dots \vec{x}_{j-1} m_{j-1} \overset{\text{sem } \vec{x}_j m_j}{\vec{x}_{j+1} m_{j+1}} \dots \vec{x}_N m_N\rangle} \end{aligned}$$

Agora levando $\psi_m^+(\vec{x})$ para a posição j aparece um fator $(\pm 1)^{N-j}$ e usando

$$\psi^+(\vec{x}) |\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N\rangle = \sqrt{N+1} |\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N \vec{x}\rangle \quad (35)$$

segue que

$$\begin{aligned} \psi_m^+(\vec{x}) \psi_{m'}(\vec{x}') |\vec{x}_1 m_1 \dots \vec{x}_N m_N\rangle &= \frac{\sqrt{(N-1)+1}}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \left((\pm 1)^{N-j} \right)^2 \\ &\delta(\vec{x}' - \vec{x}_j) \delta_{m' m_j} |\vec{x}_1 m_1 \dots \vec{x}_{j-1} m_{j-1} \overset{\vec{x} m}{\vec{x}_j m_j} \vec{x}_{j+1} m_{j+1} \dots \vec{x}_N m_N\rangle \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} F_{2Q} |\vec{x}_1 m_1 \dots \vec{x}_N m_N\rangle &= \sum_m \int d^3x \sum_{j=1}^N \langle \vec{x} m | f | \vec{x}_j m_j \rangle |\vec{x}_1 m_1 \dots \\ &\vec{x}_{j-1} m_{j-1} \vec{x} m \dots \vec{x}_j m_{j+1} \dots \vec{x}_N m_N\rangle \quad \checkmark \quad \text{OK cf. (43)} \end{aligned}$$

EXEMPLOS:

(1) Momento Linear

$$\langle \vec{x} m | \vec{P} | \vec{x}' m' \rangle = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}_x \langle \vec{x} m | \vec{x}' m' \rangle = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}_x \delta(\vec{x} - \vec{x}') \delta_{mm'} \quad (22)$$

$$\vec{P}_{2q} = \sum_m \int d^3x \psi_m^\dagger(\vec{x}) \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}_x \psi_m(\vec{x}) \quad (45)$$

(2) (Densidade de) spin $1/2$:

$$\langle \vec{x} m | \vec{S} | \vec{x}' m' \rangle = \langle \vec{x} | \vec{x}' \rangle \langle m | \vec{S} | m' \rangle = \delta(\vec{x} - \vec{x}') \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}_{mm'}$$

$$\vec{S}_{2q} = \frac{\hbar}{2} \sum_{m, m'} \int d^3x \psi_m^\dagger(\vec{x}) \vec{\sigma}_{mm'} \psi_{m'}(\vec{x}) \quad (46)$$

Generalização para Observáveis de 2 partículas

$$G = \sum_{i < j} Q_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i, j \\ i \neq j}} Q_{ij} \quad (47)$$

O elemento de matriz de Q_{12} no estado não simetrizado $|\vec{x}_1, \vec{x}_2\rangle^e$ denotado por

$$\langle \vec{x}_1 m_1, \vec{x}_2 m_2 | Q_{12} | \vec{x}_1' m_1', \vec{x}_2' m_2' \rangle$$

Nesse caso o operador associado no espaço de Fock é

$$G_{2q} = \frac{1}{2} \int d^3x_1 \sum_{m_1, m_1'} \int d^3x_2 \sum_{m_2, m_2'} \psi_{m_1}^\dagger(\vec{x}_1) \psi_{m_2}^\dagger(\vec{x}_2) \langle \vec{x}_1 m_1, \vec{x}_2 m_2 |$$

$$Q_{21} | \vec{x}_1' m_1', \vec{x}_2' m_2' \rangle \psi_{m_2'}(\vec{x}_2') \psi_{m_1'}(\vec{x}_1') \quad (48)$$

No caso de interação Coulombiana.

$$\langle \vec{x}_1 m_1, \vec{x}_2 m_2 | \varphi_{12} | \vec{x}'_1 m'_1, \vec{x}'_2 m'_2 \rangle = \frac{e^2}{4\pi |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}'_1) \delta(\vec{x}_2 - \vec{x}'_2)$$

$$\delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2}$$

Logo

$$V_c = \frac{e^2}{2} \int d^3x_1 d^3x_2 \sum_{m_1, m_2} \frac{\psi_{m_1}^+(\vec{x}_1) \psi_{m_2}^+(\vec{x}_2) \psi_{m_2}(\vec{x}_2) \psi_{m_1}(\vec{x}_1)}{4\pi |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}$$

interpretação: $\psi_{m_1}^+(\vec{x}_1) \psi_{m_1}(\vec{x}_1)$ cria e destrói 1 partícula em $\vec{x}_1$, o mesmo ocorre em $\vec{x}_2$.

