Lista VI: Equação de Dirac

① Uma representação para as soluções de partícula livre $u(\mathbf{p})$, que é independente da escolha das matrizes γ^μ é $(p^\mu\gamma_\mu + mc\,I)X_i$; onde X_i é um dos vetores colunas linearmente independentes

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$(p^\mu\gamma_\mu + mc\,I)X_i$ evidentemente é uma solução de $(p^\mu\gamma_\mu - mc\,I)u = 0$ se fizermos $p^2 = m^2c^2$ ou $E = \pm\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$. Parece então que existem oito soluções; quatro para $E > 0$ e quatro para $E < 0$. Usando uma representação específica para as matrizes γ^μ, mostre que existem de fato apenas quatro soluções independentes e relacione essas soluções com as discutidas em aula.

② Considere uma transformação unitária U, com $H' = UHU^\dagger$ e $\Psi' = U\Psi$ que muda a equação de Dira para

$$i\hbar\frac{\partial\Psi'}{\partial t} = H'\Psi'\,.$$

Seja U dada por

$$U = \sqrt{\frac{mc^2 + |E|}{2|E|}} + \frac{c\,\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}}{\sqrt{2|E|(mc^2 + |E|)}}\,,$$

mostre que U remove todos os acoplamentos entre as partes de energia positiva e negativa da equação de Dirac. Esse é um exemplo de transformação de Foldy-Wouthuysen.

③ A representação de Majorana é a representação em que todas as matrizes γ^μ são imaginárias e as matrizes $\boldsymbol{\alpha}$ são simétricas. Encontre a forma explícita das matrizes de Dirac nessa representação. Mostre que nessa representação a equação de Dirac é real. Encontre, nesse caso, soluções para a equação de Dirac que satisfazem a condição de Majorana $\Psi = \Psi^*$.

④ Considere o espinor de Dirac $\Psi(x)$.

a) Mostre que a corrente vetor axial $j_5^\mu(x) = \overline{\Psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\Psi(x)$ é conservada para uma partícula de massa nula. No caso de uma partícula de massa não nula quanto vale $\partial_\mu j_5^\mu$?

b) Mostramos que podemos escrever uma equação relativística para uma partícula de massa nula em termos de um espinor de duas componente $\chi(x)$, tal que

$$i\hbar(\partial_0 - \boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla)\chi(x) = 0\,.$$

Chamemos de $\chi_a(x), a = 1, 2$ cada componente de $\chi(x)$.

Mostre que é possível escrever uma equação para uma partícula massiva como

$$i\hbar\overline{\sigma}\cdot\partial\chi(x) - imc\,\sigma^2\chi^*(x) = 0\,,$$

onde $\overline{\sigma}^\mu \equiv (1, -\boldsymbol{\sigma})$. Mostre primeiro como essa equação se transforma por transformações de Lorentz e que ela implica na equação de Klein-Gordon, isto é, $(\partial^2 + m^2c^2/\hbar^2)\chi(x) = 0$.

c) Escrevendo o espinor de Dirac de 4-componentes como

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \Psi_L \\ \Psi_R \end{pmatrix}\,,$$

mostre como Ψ_L e Ψ_R se relacionam com $\chi_{1,2}$.

⑤ Mostre como se transformam por boost e por paridade as seguintes quantidades: $\overline{\Psi}(x)\Psi(x)$, $\overline{\Psi}(x)\gamma^5\Psi(x)$, $\overline{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x)$, $\overline{\Psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\Psi(x)$ e $\overline{\Psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\Psi(x)$.

⑥ Considere a equação de Dirac na presença de um quadri-potencial A^μ. Mostre que uma transformação de gauge induz a uma mudança de fase na função de onda de Dirac.