AULA 13

MECÂNICA QUÂNTICA II

AULA 13

III - Equação de Onda Relativística

1.0) Generalidades

Uma forma de motivar a eq. de Schrödinger livre é requerer que a onda plana $\psi(\vec{x},t) = e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} - Et)/\hbar}$ (1) satisfaça a relação de dispersão não-relativística, i.e.

$$H = \frac{p^2}{2m} \Longrightarrow E = \frac{p^2}{2m}$$

Isso pode ser feito substituindo

$$\begin{cases} H \to i\hbar \dfrac{\partial}{\partial t} & (2.a) \\ \vec{p} \to \dfrac{\hbar}{i}\vec{\nabla} & (2.b) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\right)^2 \frac{1}{2m}\psi(x,t)$$

2.0) Equação de Klein-Gordon

Usando do mesmo raciocínio, usando que a onda plana (1) satisfaça a relação de dispersão relativística, i.e.

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

postulamos que

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \psi(x,t) = \left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\right)^2 c^2\psi(x,t) + m^2c^4\psi(x,t) \quad (3.0)$$

Definindo $x^0 = ct$ $\quad \mu^2 = \dfrac{m^2c^2}{\hbar^2}$

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^0}\right)^2 - \nabla^2\right]\psi(x,t) + \mu^2\psi(x,t) = 0 \quad (4)$$

(Equação de Klein-Gordon)

$$\Box^2 \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^0}\right)^2 - \nabla^2 = \partial_\mu \partial^\mu$$

$$(\Box^2 + \mu^2)\,\psi(x,t) = 0$$

<u>Observação</u>: a equação de Klein-Gordon é uma equação de 2ª ordem no tempo, logo para determinar a evolução temporal do estado precisamos de $\psi(\vec{x},0)$ e $\partial_t \psi(\vec{x},0)$, i.e. duas condições iniciais. Logo se $\psi(\vec{x},0)$ for o estado inicial ele <u>não</u> contém toda a informação sobre o sistema. Isso é incompatível com os postulados da M.Q. que formulamos...

Vejamos a lei de conservação associada à Eq. de Klein-Gordon

$\psi^*(x,t) \times (3.0) \Longrightarrow$

$$-\hbar^2\, \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2\, \psi^* \nabla^2 \psi + m^2 c^4\, \psi^* \psi \quad (5)$$

$$(5)^* \Longrightarrow -\hbar^2 \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \psi \nabla^2 \psi^* + m^2 c^4\, \psi \psi^* \quad (6)$$

subtraindo: $(5) - (6) \Longrightarrow$

$$-\hbar^2 \left[\psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2}\right] = -\hbar^2 c^2 \left[\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*\right]$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t}\right] = \vec{\nabla}\cdot\left[\psi^* \vec{\nabla}\psi - \psi \vec{\nabla}\psi^*\right]$$

Temos assim uma lei de conservação

$$\rho \equiv \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t}\right) \hbar i \quad (7a)$$

$$\vec{J} \equiv -c^2 \left(\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*\right) \hbar i \quad (7b)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (7c)$$

Note que aqui a quantidade conservada não é $\int d^3x |\psi|^2$

mas

$$Q = i\hbar \int d^3x \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t}\right)$$ (Problema #1)

Poderíamos tentar associar a esta quantidade a probabilidade,

mas para ondas planas

$$\psi(x,t) = N\, e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} - Et)/\hbar} \Rightarrow Q \equiv 2E|N|^2$$

$$\text{como } E^2 = \vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4 \Rightarrow E_{\pm} = \pm\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$ (Problema #2)

Para energias negativas (E_-), $Q < 0 \Rightarrow$ não pode ser interpretado como probabilidade. Além disso não podemos desprezar as soluções com energia negativa pois o conjunto das soluções de energia positiva não forma uma base!

Há ainda um terceiro problema para associar a Eq. de Klein-Gordon com elétrons. Quando introduzimos cargas e.m.

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

a substituição mínima requer que:

$$\vec{p} \to \vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A} \qquad \text{i.e. } \vec{p} \to \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}$$

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi$$

logo a eq (3) passa a ser

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi\right)^2\psi = \left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 c^2\psi + m^2c^4\psi \quad (8)$$

no limite de baixas energias $E \sim mc^2$. É conveniente definir

$$\psi(x,t) = e^{-\frac{imc^2t}{\hbar}}\psi'(x,t) \quad (9)$$

$$-\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - i\hbar q\frac{\partial}{\partial t}(\phi\psi) - i\hbar q\phi\frac{\partial\psi}{\partial t} + q^2\phi^2\psi$$

$$= -\hbar^2\left[-\frac{2imc^2}{\hbar}\frac{\partial\psi'}{\partial t} - \frac{m^2c^4}{\hbar^2}\psi' + \frac{\partial^2\psi'}{\partial t^2}\right]e^{-\frac{imc^2t}{\hbar}}$$

$$-i\hbar q\frac{\partial\phi}{\partial t}\psi' e^{-\frac{imc^2t}{\hbar}} - i\hbar q\phi\left[-\frac{imc^2}{\hbar}\psi' e^{-\frac{imc^2t}{\hbar}} + e^{-\frac{imc^2t}{\hbar}}\frac{\partial\psi'}{\partial t}\right]$$

$$-i\hbar q\phi\left[-\frac{imc^2}{\hbar}\psi' e^{-\frac{imc^2t}{\hbar}} + e^{-\frac{imc^2t}{\hbar}}\frac{\partial\psi'}{\partial t}\right] + q^2\phi^2 e^{-\frac{imc^2t}{\hbar}}\psi'$$

$$= -\hbar^2\left[\frac{-m^2c^4}{\hbar^2}\psi' - \frac{2imc^2}{\hbar}\frac{\partial\psi'}{\partial t} + \frac{\partial^2\psi'}{\partial t^2}\right]e^{-\frac{imc^2t}{\hbar}} - i\hbar q\frac{\partial\phi}{\partial t}\psi' e^{-\frac{imc^2t}{\hbar}}$$

$$-2qmc^2\phi\psi' e^{-\frac{imc^2t}{\hbar}} - 2q\phi i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t}e^{-\frac{imc^2t}{\hbar}} + q^2\phi^2\psi' e^{-\frac{imc^2t}{\hbar}}$$

como não há derivada temporal no lado direito de (8) podemos esquecer dessa fase pois aparecerá dos dois lados de (8)

$$-\hbar^2\left[-\cancel{\frac{m^2c^4}{\hbar^2}}\psi' - \frac{2imc^2}{\hbar}\frac{\partial\psi'}{\partial t} + \frac{\partial^2\psi'}{\partial t^2}\right] + q^2\phi^2\psi'$$

$$-2qmc^2\phi\psi' - i\hbar 2q\phi\frac{\partial\psi'}{\partial t} - i\hbar q\frac{\partial\phi}{\partial t}\psi'$$

$$= c^2\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2\psi' + \cancel{m^2c^4\psi'} \qquad (10)$$

no limite não relativístico $\left|\frac{\partial\psi'}{\partial t}\right| \ll \frac{mc^2}{\hbar}\psi'$ e

$|q\phi| \ll mc^2$, $\left|\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t}\right| \ll mc^2\phi$

assim nesse limite (10) fica simplesmente

$$i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2\psi' + q\phi\psi' \qquad (11)$$

logo não aparece o termo $\vec{\sigma}\cdot\vec{B}$ de Pauli $\Rightarrow$ não funciona para spin $1/2$! (Problema # 3)

3.0) Equação de Dirac

Para que $\psi(\vec{x},0)$ especifique a evolução temporal, precisamos de uma equação de 1ª ordem em $\frac{\partial}{\partial t}$. Como na relatividade t e $\vec{x}$ entram no mesmo pé de igualdade

$\Rightarrow$ apenas derivadas de 1ª ordem em $\vec{x}$ também!

Assim temos

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = \frac{\hbar c}{i}\sum_j \alpha_j \frac{\partial}{\partial x^j}\psi + \beta m c^2 \psi} \qquad (12)$$

adimensionais

todos os operadores devem ter dimensão de energia

α_j e β serão fixados supondo que a onda plana $e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x}-Et)/\hbar}$ seja solução se $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\ (12) \Longrightarrow -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = \left(\frac{\hbar c}{i}\sum_j \alpha_j \frac{\partial}{\partial x^j} + \beta mc^2\right) i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

$$= \left(\frac{\hbar c}{i}\sum_j \alpha_j \frac{\partial}{\partial x^j} + \beta m^2c^2\right)\left(\frac{\hbar c}{i}\sum_k \alpha_k \frac{\partial}{\partial x^k} + \beta mc^2\right)\psi$$

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = -\hbar^2c^2\sum_{j,k}\alpha_j\alpha_k\frac{\partial^2\psi}{\partial x^j\partial x^k} + \frac{\hbar c}{i}mc^2\sum_j(\alpha_j\beta+\beta\alpha_j)\frac{\partial\psi}{\partial x^j}$$

$$+\beta^2m^2c^4\psi$$

como

$$\sum_{j,k}\alpha_j\alpha_k\underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^j\partial x^k}}_{\text{simétrico}} = \frac{1}{2}\sum_{j,k}(\alpha_j\alpha_k+\alpha_k\alpha_j)\frac{\partial^2}{\partial x^j\partial x^k}$$

$$-\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\hbar^2c^2\sum_{j,k}\frac{1}{2}(\alpha_j\alpha_k+\alpha_k\alpha_j)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^j\partial x^k} + \frac{\hbar c}{i}mc^2\sum_j(\alpha_j\beta+\beta\alpha_j)\frac{\partial\psi}{\partial x^j}$$

$$+m^2c^4\beta^2\psi \quad (13)$$

Agora para que a onda plana satisfaça a relação de dispersão relativística (13) deve reduzir-se à

Equação de Klein-Gordon (3). Para isso precisamos que

$$\frac{\alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j}{2} = \delta_{jk} \quad (14a)$$

$$\alpha_j \beta + \beta \alpha_j = 0 \quad (14b)$$

$$\beta^2 = 1 \quad (14c)$$

Note que (14a) e (14b) implicam que α_j e β são matrizes.
Isso era de se esperar pois esse é o truque que permite
transformar uma equação diferencial de 2ª ordem no tempo
em uma de 1ª ordem no tempo.

3.1) Propriedades de α_j e β

(1) $\det \beta^2 = (\det \beta)^2 = \mathbb{1} \Rightarrow \det \beta = \pm 1$

$\det \alpha_j^2 = (\det \alpha_j)^2 = \mathbb{1} \Rightarrow \det \alpha_j = \pm 1$

$\Rightarrow$ α_j e β possuem inversas que são elas próprias

(2) a dimensão N das matrizes é par

$$\alpha_j \beta = -\beta \alpha_j$$

$$\det(\alpha_j \beta) = \det \alpha_j \det \beta = \det(-1) \det \beta \det \alpha_j$$

mas $\det \alpha_j \neq 0$, $\det \beta \neq 0 \Rightarrow (-1)^N = 1 \Rightarrow N$ é par

(3) α_j e β possuem traço nulo

$$\alpha_j \beta = -\beta \alpha_j \xrightarrow{\times \beta} \alpha_j \beta^2 = \alpha_j = -\beta \alpha_j \beta$$

$$\mathrm{Tr}\,[\alpha_j] = -\mathrm{Tr}\,[\beta\alpha_j\beta] = -\mathrm{Tr}\,[\alpha_j\beta^2] = -\mathrm{Tr}\,[\alpha_j] = 0$$

$$\alpha_j\alpha_j = 1 \implies \alpha_j(\alpha_j\beta) = \beta = -\alpha_j(\beta\alpha_j)$$

$$\mathrm{Tr}\,(\beta) = -\mathrm{Tr}\,[\alpha_j\beta\alpha_j] = -\mathrm{Tr}\,\beta = 0$$

Em 3 dimensões espaciais são necessárias 4 matrizes. Como existem apenas 3 matrizes 2X2 (as de Pauli) que satisfazem as propriedades (2) e (3) $\implies$ N é no mínimo quatro!

(4) Se as matrizes α_j e β satisfazem (14) então $\tilde{\alpha}_j = S\alpha_j S^{-1}$ e $\tilde{\beta} = S\beta S^{-1}$ também satisfazem, com

$SS^{-1} = \mathbb{1}$

De fato para (14a) temos:

$$S\alpha_j S^{-1}S\alpha_k S^{-1} + S\alpha_k S^{-1}S\alpha_j S^{-1} = 2\delta_{jk} SS^{-1}$$

$\tilde{\alpha}_j\tilde{\alpha}_k + \tilde{\alpha}_k\tilde{\alpha}_j = 2\delta_{jk}$ analogamente para (14b) e (14c) Mostre!

Uma escolha possível para as matrizes de Dirac é

$$\beta = \begin{pmatrix} I_{2\times2} & 0 \\ 0 & -I_{2\times2} \end{pmatrix} \qquad \alpha_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} \quad \text{com} \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Assim escrevemos a eq. de Dirac como

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi \quad (16)$$

com
$$H = \frac{\hbar c}{i} \sum_{\alpha} \alpha_j \frac{\partial}{\partial x^j} + \beta m c^2 \quad (17)$$

É natural definir o produto escalar
$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int d^3x \; \psi_1^+ \psi_2 = \int d^3x \sum_{k=1}^{4} \psi_{1,k}^* \psi_{2,k} \quad (18)$$

* Mostre que: com a definição (18) para que tenhamos
$H = H^+$ então $\alpha_j^+ = \alpha_j$ e $\beta^+ = \beta$ (19)

Carga Conservada:

$$\psi^+ \overset{(16)}{\underset{(17)}{\Longrightarrow}} i\hbar \psi^+ \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i} \sum_j \psi^+ \alpha^j \frac{\partial \psi}{\partial x^j} + mc^2 \psi^+ \beta \psi$$

$$(16)^+ \psi \Longrightarrow -i\hbar \frac{\partial \psi^+}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar c}{i} \sum_j \frac{\partial \psi^+}{\partial x^j} \alpha^j \psi + mc^2 \psi^+ \beta \psi$$

subtraindo essas equações temos

$$i\hbar \left(\psi^+ \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi^+}{\partial t} \psi \right) = \frac{\hbar c}{i} \sum_j \left(\psi^+ \alpha^j \frac{\partial \psi}{\partial x^j} + \frac{\partial \psi^+}{\partial x^j} \alpha^j \psi \right)$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\psi^+ \psi) = \frac{\hbar c}{i} \sum_j \frac{\partial}{\partial x^j} (\psi^+ \alpha_i^j \psi)$$

Definindo:
$$\rho = \psi^+ \psi \quad (20a)$$
$$j^k = c\, \psi^+ \alpha^k \psi \quad (20b)$$

escrevemos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0 \quad (20c)$$

Note que $\psi^{+}\psi \geq 0 \Rightarrow$ podemos interpretar ρ como densidade de probabilidade!

3.2) Forma Covariante da Equação de Dirac

Vamos escrever a eq. de Dirac de uma forma sugestiva que indica sua covariância (Provaremos isso depois!)

$$x^{\mu} = (ct, \vec{x}) \quad (21a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \equiv \partial_{\mu} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial(ct)}, \vec{\nabla}\right) \quad (21b)$$

com $\vec{\alpha} = (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ podemos escrever a eq de Dirac

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = \frac{\hbar c}{i}\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\psi + \beta mc^2\psi \qquad \xrightarrow{\beta/c\,\times}$$

$$i\hbar\,\beta\frac{\partial\psi}{\partial(ct)} = \frac{\hbar}{i}\beta\vec{\alpha}\,\vec{\nabla}\psi + mc\,\psi$$

Definimos:

$$\gamma^0 \equiv \beta \qquad e \quad \gamma^j = \beta\alpha^j \quad (22)$$

assim a equação de Dirac fica

$$i\hbar\left(\gamma^0\frac{\partial}{\partial x^0} + \gamma^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\psi - mc\,\psi = 0$$

ou seja

$$\left(i\hbar\,\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc\right)\psi = 0 \quad \text{ou} \quad \left(i\hbar\,\gamma^\mu \partial_\mu - mc\right)\psi = 0 \quad (23)$$

ou ainda $\left(i\hbar\,\not{\partial} - mc\right)\psi = 0$ c/ $\not{\partial} \equiv \gamma^\mu \partial_\mu$

que é a forma covariante da equação de Dirac. γ^μ não é um quadrivetor! Na escolha que fizemos de $\vec{\alpha}$ e β i.e. (15)

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \qquad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

As propriedades das matrizes γ^μ são:

(a) $\gamma^{\mu+} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$ (25)

de fato:

$\gamma^{0+} = \beta^+ = \beta = \gamma^0 \qquad \gamma^{j+} = (\beta\alpha^j)^+ = \alpha^{j+}\beta^+ = \alpha^j\beta$

mas $\gamma^0\gamma^j\gamma^0 = \beta(\beta\alpha^j)\beta = \alpha^j\beta = \gamma^{j+}$

(b) $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}$ (26)

onde $g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

Vejamos

$\gamma^0\gamma^0 + \gamma^0\gamma^0 = 2\beta^2 = 2g^{00} \qquad \mu = \nu = 0$

$\mu \neq \nu \neq 0$

$k \neq j \neq 0 \quad \gamma^j\gamma^k + \gamma^k\gamma^j = \beta\alpha^j\beta\alpha^k + \beta\alpha^k\beta\alpha^j$

$\qquad = -\beta^2\alpha^j\alpha^k - \beta^2\alpha^k\alpha^j$

$\qquad = -(\alpha^j\alpha^k + \alpha^k\alpha^j) = 0$

$\gamma^0\gamma^j + \gamma^j\gamma^0 = \beta\beta\alpha^j + \beta\alpha^j\beta = \alpha^j - \alpha^j = 0 \quad \mu = 0 \quad \nu \neq 0$

$\gamma^j\gamma^j + \gamma^j\gamma^j = 2\gamma^j\gamma^j = 2\beta\alpha^j\beta\alpha^j = -2\beta^2\alpha^j\alpha^j = -2 \quad \mu = \nu \neq 0$

(c) Costumamos definir

$\gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu$ (27) i.e. $\gamma_0 = \gamma^0 \qquad \gamma_j = -\gamma^j$

Usando a forma covariante a Lei de Conservação pode ser escrita como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{j} \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\psi^+\psi + c\,\vec{\nabla}.(\psi^+\vec{\alpha}\psi) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial(ct)}(\psi^+\gamma^0\gamma^0\psi) + \vec{\nabla}(\psi^+\gamma^0\gamma^0\vec{\alpha}\psi) = 0$$

Definindo: $\boxed{\bar{\psi} \equiv \psi^+\gamma^0}$ (28)

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0 \qquad \begin{array}{l} J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (29a) \\ \partial_\mu J^\mu = 0 \quad (29b) \end{array}$$

3.3) Matrizes γ de Dirac

As matrizes de Dirac em (3+1) dimensões são 4×4 requerendo 16 matrizes para ter uma base

Escolhemos:

$$\{\underset{1}{\mathbb{1}};\ \underset{4}{\gamma^\mu};\ \underset{1}{\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3};\ \underset{4}{\gamma^5\gamma^\mu};\ \underset{6}{\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]}\} \qquad (103)$$

que denotaremos por Γ_n

Podemos provar as seguintes propriedades:

(1) Todas as Γ_n satisfazem $\Gamma_n^{\,2} = \pm 1$ (30)

$$(\sigma^{\mu\nu})^2 = \frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)\,\frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) \qquad \text{sem soma } \mu \neq \nu \,!$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\gamma^\mu\underbrace{\gamma^\nu\gamma^\mu}_{-\gamma^\nu\gamma^\mu}\gamma^\nu - \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\nu\gamma^\mu - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\underbrace{\gamma^\mu\gamma^\nu}_{-\gamma^\nu\gamma^\mu}\gamma^\mu\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(2\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\nu\gamma^\mu + 2\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\mu\gamma^\nu\right) = \pm 1$$

(2) Para todas as Γ_n, exceto $\mathbb{1}$, existe uma matriz Γ_m tal que

$$\Gamma_n\Gamma_m = -\Gamma_m\Gamma_n \quad (31)$$

e.g. $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 0 \quad \mu \neq \nu$

$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$

(3) Dadas 2 matrizes Γ_n e Γ_m $(n \neq m)$ existe uma matriz $\Gamma_k \neq 1$ tal que

$$\Gamma_n\Gamma_m = \Gamma_k \quad (32)$$