Lista V: Espalhamento Elástico & Inelástico

① A forma mais geral da matriz densidade para os estados de spin do espalhamento neutron-proton é

$$\rho = \frac{1}{4}\left(\mathbf{1} + \sigma_\mathbf{1}\cdot\mathbf{P_1} + \sigma_\mathbf{2}\cdot\mathbf{P_2} + \sum_{i,j}\sigma_{1,i}\sigma_{2,j}\,C_{ij}\right)\,,$$

onde $\mathbf{P_1}, \mathbf{P_2}$ são a polarizações do próton e do neutron.

(a) Mostre que mesmo se o estado inicial for aleatório ($\rho_i = 1/4$), haverá correlação entre os estado de spin após o espalhamento. Calcule os coeficientes de correlação C_{ij} em termos dos elementos $\mathcal{M}(\mathbf{k_f}, \mathbf{k_i})$ nesse caso.

(b) Nessas condições, calcule a seção de choque diferencial de espalhamento elástico n-p pelo potencial

$$V = V_0(r) + \sigma_\mathbf{1}\cdot\sigma_\mathbf{2}\,V_1(r)\,,$$

em termos da amplitudes de onda $f_s(\theta, k)$ e $f_t(\theta, k)$.

(c) Calcule os coeficientes C_{ij} explicitamente em termos de $f_s(\theta, k)$ e $f_t(\theta, k)$.

(d) Considere que os espalhamento seja proton-proton e que o potencial de interação seja o mesmo e que as partículas não estejam inicialmente polarizadas. Mostre que $C_{ij} = \delta_{ij}C$ onde

$$C = \frac{|f_t(\theta) - f_t(\pi-\theta)|^2 - |f_s(\theta) + f_s(\pi-\theta)|^2}{3|f_t(\theta) - f_t(\pi-\theta)|^2 + |f_s(\theta) + f_s(\pi-\theta)|^2}\,.$$

Mostre que $1/3 \geq C \geq -1$, onde esses limites correspondem a espalhamentos apenas em estados de tripleto e singleto. Tente explicar esses limites.

② Considere o espalhamento elástico devido a interação spin-orbita descrita pelo potencial

$$V = V_0(r) + \sigma\cdot\mathbf{L}\,V_1(r)\,,$$

(a) Mostre que a solução para a equação de Schrödinger pode ser escrita como

$$|\psi\rangle = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} i^\ell \left[c_\ell^+ R_\ell^+(r) \Lambda_\ell^+ + c_\ell^- R_\ell^-(r) \Lambda_\ell^- \right] Y_{\ell 0}(\theta) |\nu_i\rangle \,,$$

onde $\Lambda_\ell^\pm$ são os projetores de $j = \ell \pm \frac{1}{2}$

$$\Lambda_\ell^+ = \frac{\ell + 1 + \sigma \cdot \mathbf{L}}{2\ell+1} \quad \Lambda_\ell^- = \frac{\ell - \sigma \cdot \mathbf{L}}{2\ell+1}$$

$c_\ell^\pm$ são constantes que devem ser fixadas pelas condições de contorno, as funções radiais são soluções de

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + k^2 - 2mV_\ell^\pm(r) \right] R_\ell^\pm(r) = 0 \,,$$

com

$$V_\ell^+(r) = V_0(r) + \ell\, V_1(r), \quad \ell = 0, 1, 2, ...$$

$$V_\ell^-(r) = V_0(r) - (\ell+1)\, V_1(r), \quad \ell = 1, 2, ...$$

(b) Sejam $\delta_\ell^\pm$ as defasagens dos estados com momento angular total $j = \ell \pm \frac{1}{2}$, isto é

$$R_\ell^\pm \sim \frac{\text{const.}}{kr} \sin(kr - \ell\frac{\pi}{2} + \delta_\ell^\pm), \quad r \to \infty$$

Mostre que as funções g e h que aparecem na matrix de espalhamento M são

$$g(k,\theta) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{4\pi}{2\ell+1} \right)^{\frac{1}{2}} [(\ell+1)a_\ell^+ + \ell a_\ell^-] Y_{\ell 0}(\theta) \,,$$

$$h(k,\theta) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{4\pi}{2\ell+1} \right)^{\frac{1}{2}} (a_\ell^+ - a_\ell^-) i \sin\theta \frac{d}{d\cos\theta} Y_{\ell 0}(\theta) \,,$$

onde $a_\ell^\pm = e^{i\delta_\ell^\pm} \sin\delta_\ell^\pm$.

(c) Mostre que a seção de choque total é

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_\ell [(\ell+1)\sin^2\delta_\ell^+ + \ell \sin^2\delta_\ell^-]$$

③ Mostre que a invariância por reversão temporal e a unitariedade implicam que $|S_{aa}| = |S_{bb}|$ no modelo de espalhamento solúvel que discutimos em aula. A primeira vista isso parece errado, pois as seções de choque elásticas $a \to a$ e $b \to b$ certamente devem ser diferentes. Resolva o problema de espalhamento para b incidente e calcule $S_{bb}(E)$ mostrando que S_{aa} e S_{bb} de fato tem o mesmo módulo à mesma energia E, mas que $|S_{aa} - 1| \neq |S_{bb} - 1|$. Finalmente, mostre que a seção de choque elástica total $b \to b$ é

$$\sigma_{\rm el,bb}(E) = \frac{\pi}{p_b^2} \frac{[\Gamma_b(E)]^2}{[E - E_0 - \Sigma_R(E)]^2 + \frac{1}{4}[\Gamma_{\rm tot}(E)]^2}\,.$$

④ Generalize o modelo que vimos em aula para o caso onde a e b tem spin s_a e s_b, respectivamente, $|0\rangle$ tem spin 0, $|1\rangle$ tem spin j, e (s_a, s_b, j) devem ser todos inteiros ou todos semi-inteiros. Sejam H_a e H_b as interações de a e b; mostre que invariância por rotação exige que H_a tenha a forma

$$H_a = \sum_{m=-j}^{j} \sum_{\lambda=-s_a}^{s_a} \int d\mathbf{k}\, [f_\lambda^*(|\mathbf{k}|) D^j_{m\lambda}(\mathbf{k})^* A^\dagger_{\mathbf{k},\lambda} \xi_m + \text{h.c.}]\,,$$

onde λ é a helicidade de a, com uma expressão similar para H_b. Escreva a equação de Schrödinger para a incidente; mostre que ela depende apenas de uma única amplitude desconhecida para os $(2l+1)$ estados intermediários, e que portanto esse problema também é solúvel como aquele que discutimos em aula. Por outro lado, mostre que mesmo quando apenas espalhamento elástico for possível, a matrix S é não trivial pois envolve acoplamentos entre os vários estados de helicidade.

⑤ Esse problema ilustra a análise padrão de espalhamento ressonante. Considere a amplitude de espalhamento elástico $a(E)$, definida abaixo, assuma que as larguras e Σ sejam independentes da energia e defina a energia de ressonância como $E_* = E_0 + \Sigma_R$,

$$a(E) \equiv e^{i\delta}\sin\delta = \frac{\frac{1}{2}\Gamma_a}{E_* - E - \frac{i}{2}\Gamma_{\text{tot}}}\,.$$

Assuma também que a ressonância ocorra sempre bem acima do limiar de espalhamento inelástico.

1. Faça um gráfico de $a(E)$ em função de E no plano complexo. Assuma que Γ_{tot} seja substancialmente menor que E_* e mostrando o que ocorre para vários valores de $\Gamma_a/\Gamma_{\text{tot}}$. Marque os pontos de $a(E)$ para intervalos constantes de E/E_* e observe como a "velocidade" ao longo dessa trajetória muda à medida que E passa pela ressonância.
2. Em geral, uma amplitude ressonante elástica não é completamente dominada pela ressonância, mas tem um fundo que varia lentamente também. Adicione uma amplitude constante $b = |b|e^{i\alpha}$ a $a(E)$, escolhida para saturar o limite de unitariedade. Faça um gráfico da seção de choque para $\alpha = 0, \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{\pi}{2}$. Note o efeito dramático que isso tem no aparecimento da ressonância, e que, em particular, uma ressonância não precisa aparecer como um pico pronunciado na seção de choque, embora sempre apareça como um ponto que se move rapidamente no plano de Argand-Gauss (mostre!).