Lista IV: Espalhamento Elástico II

① Muitos resultados experimentais são obtidos no chamado referencial de laboratório. Nesse referencial, temos inicialmente o projétil com massa m_1 e velocidade $\mathbf{v_1}$ e o alvo com massa m_2 em repouso. (a) Encontre a relação entre o ângulo de espalhamento θ_1 entre a direção inicial e final do projétil nesse referencial, e o ângulo de espalhamento θ no centro de massa do sistema para o caso de espalhamento elástico. (b) Em uma colisão inelástica, a energia interna das partículas pode mudar de forma que a energia cinética total pode não ser conservada. Suponha agora que as massas das partículas depois do espalhamento sejam m_3 e m_4. Agora a partícula de massa m_3 é detectada no referencial do centro de massa como tendo direção θ. Assumindo um sistema não relativístico, e que Q é a quantidade de energia interna convertida em energia cinética na reação, encontre a relação entre θ_1 (o ângulo de espalhamento no referencial de laboratório) e θ. Verifique que você recupera o limite de colisão elástica quanto $Q \to 0$ e $m_1 = m_3$ e $m_2 = m_4$. (c) Encontre a relação entre a seção de choque diferencial $d\sigma_{\rm lab}(\theta_1, \phi)/d\Omega_1$ e $d\sigma_{\rm cm}(\theta, \phi)/d\Omega$. Use o fato que o número de partículas espalhadas em um cone particular deve ser o mesmo nos dois referenciais.

② Calcule a amplitude de espalhamento e a seção de choque total de espalhamento elástico de uma partícula de massa m e momento $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ pelo potencial

$$V(r) = -V_0\, e^{-r/r_0}\,,$$

na aproximação de Born. Qual o comportamento dessa seção de choque no limite de altas energias? Usando a expansão em ondas parciais

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,(e^{2i\delta_l} - 1)\,P_l(\cos\theta)\,,$$

e a amplitude que você calculou, determine δ_0 e δ_1 e discuta o comportamento dessas fases com kr_0.

③ Calcule a amplitude de espalhamento e seção de choque diferencial de elétrons espalhados por um núcleo na aproximação de Born assumindo que a carga do núcleo Ze é esfericamente distribuída e tem densidade $\rho(r)$. Mostre que a amplitude de espalhamento pode ser escrita como

$$f(\theta) = f_0(\theta)F(k)\,,$$

onde $f_0(\theta)$ é a amplitude de espalhamento de Rutherford

$$f_0(\theta) = \frac{Ze^2}{4E\sin^2\frac{\theta}{2}}\,,$$

e $F(k)$ é o chamado *fator de forma*

$$F(k) = \frac{4\pi}{Ze}\int_0^\infty dr\, r^2\rho(r)\frac{\sin kr}{kr}.$$

Assuma agora que a densidade do núcleo seja aproximadamente constante. Calcule $F(k)$.

1. Comparando o seu resultado com os dados de J.B. Bellicard *et al.*, Phys. Rev. Lett. **19**, 527 (1967), estime o tamanho dos núcleos de cálcio.
2. Comparando o seu resultado com os dados de J.B. Bellicard *et al.*, Phys. Rev. Lett. **19**, 242 (1967), estime o tamanho dos núcleos de chumbo.
3. Discuta a dependência do tamanho dos núcleos com A.

Nota: embora os elétrons utilizados nesses experimentos acima sejam relativísticos, é ainda verdade que o fator de forma é o mesmo que no caso não relativístico uma vez que ignoramos o recuo do núcleo. Tome cuidado, no entanto, de usar a forma relativística ($E \approx pc$) para calcular a energia e momento do elétron e considere o fator de forma como função do momento transferido $q^2 = 2p^2(1-\cos\theta)$.

4 Considere o problema de espalhamento pelo potencial de Yukawa

$$V(r) = V_0\frac{e^{-r/a}}{r}\,.$$

1. Calcule a amplitude de espalhamento e a seção de choque total na aproximação de Born.

2. Discuta a validade da aproximação de Born para esse potencial.
3. Mostre que a seção de choque total é menor que a seção de choque geométrica ($4\pi a^2$) quando a aproximação de Born for válida, independente do momento.