Lista III : Espalhamento Elástico I

① Mostre que

$$e^{ikz} = \sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\, i^{\ell}\, j_{\ell}(kr)\, P_{\ell}(\cos\theta)\,.$$

② (a) Decomponha os vetores $|\mathbf{k}'\rangle$ e $|\mathbf{k}^{(+)}\rangle$ em ondas parciais e coloque essas decomposições na amplitude total $-4\pi^2 m\,\langle\mathbf{k}'|V|\mathbf{k}^{(+)}\rangle$. Comparando o seu resultado com a série de ondas parciais mostre que de fato

$$f_{\ell}(k) = -\frac{1}{k^2}\int_0^{\infty} dr\; j_{\ell}(kr)\; U(r)\Psi_{\ell,k}(r)\,.$$

(b) De forma semelhante, mostre que quando exprimimos a amplitude total em ondas parciais, a série de Born para essa amplitude implica na série de Born para as amplitudes de ondas parciais.

③ Uma partícula de massa μ é espalhada pelo potencial de *esfera dura*

$$V(r) = \begin{cases} \infty & \text{se} \quad \mathrm{r} < \mathrm{a} \\ 0 & \text{se} \quad \mathrm{r} \geq \mathrm{a} \end{cases}$$

1. Encontre a amplitude $f_{\ell}(k)$ para esse potencial.
2. Mostre que $f_{\ell}(k)$ à baixa energia tem a forma $-a_{\ell}k^{2\ell}$ e, em particular, que o comprimento de espalhamento de onda s, a_0 é igual ao raio da esfera a.

   Sugestão: A maneira de resolver esse problema é notar que quando $V = 0$, Ψ deve ser uma combinação linear das soluções de partícula livre e que a forma precisa dessa combinação pode ser descoberta usando as formas asintóticas, *i.e.* $\Psi_{\ell,k}(r)\,, r \to \infty$.

④ Considere o espalhamento de uma partícula de massa μ pelo potencial esfericamente simétrico

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{se} \quad \mathrm{r} < \mathrm{a} \\ 0 & \text{se} \quad \mathrm{r} \geq \mathrm{a} \end{cases}$$

onde V_0 é positivo.

(a) Calcule a amplitude de espalhamento em primeira aproximação de Born.

(b) Encontre a amplitude $f_\ell(k)$ para esse potencial.

(c) Mostre que em geral $f_\ell(k) \to -a_\ell k^{2\ell}$ com $k \to 0$ e que $f_\ell(k) \to 0$ com $k \to \infty$.

(d) Considere em detalhe o caso $\ell = 0$. Mostre que há valores de V_0 para os quais $f_0(0)$ é infinito e que esses valores correspondem a profundidades em que novos estados ligados aparecem.

(e) Em baixa energia ondas s dominam, de forma que $f(\mathbf{k} \to \mathbf{k}') \approx f_0(k)$. Compare o resultado correto em baixa energia com o resultado do item (a).

⑤ Obtenha a função de Green do operado $\nabla^2 + k^2$, isto é,

$$(\nabla^2 + k^2)G(\vec{x}, \vec{x'}) = \delta(\vec{x} - \vec{x'})\,,$$

onde k é uma constante, impondo que

$$G(\vec{x}, \vec{x'}) \to \frac{e^{-ik|\vec{x}|}}{|\vec{x}|}$$

no limite $|\vec{x}| \to \infty$.

⑥ Mostre que para o espalhamento de uma partícula sem spin por um potencial $V(\mathbf{x})$, invariante por reversão temporal

$$T|\mathbf{k}^{(\pm)}\rangle = |-\mathbf{k}^{(\mp)}\rangle\,.$$