

AULA 5

MECÂNICA QUÂNTICA II

5.0) O Grupo de Poincaré

AVULA 5

O grupo de Poincaré é o grupo fundamental das transformações de espaço-tempo em física: translações, rotações e boosts. Vamos discutir aqui suas representações irredutíveis.

5.1) Grupo de Lorentz

O espaço de Minkowski é $\mathbb{R}^4$ com uma métrica pseudo-Euclidiana de assinatura $(+ - - -)$. Em uma base ortogonal com coordenadas $(x^0=t, x^1=x, x^2=y, x^3=z)$ a métrica é diagonal

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

e a norma de um 4-vetor x é dada por

$$x \cdot x = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

O grupo que preserva essa forma quadrática, $O(1,3)$ é o chamado grupo de Lorentz $\mathcal{L} = O(1,3)$, tal que

$$\text{se } \Lambda \in O(1,3) \quad x' = \Lambda x :$$

$$\begin{aligned} x' \cdot x' &= \Lambda^\mu{}_\rho x^\rho g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma x^\sigma \\ &= g_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Lambda^\mu{}_\rho g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma} \quad \Lambda^T g \Lambda = g$$

$$\Rightarrow (\det \Lambda)^2 = 1 \quad \Rightarrow \det \Lambda = \pm 1$$

$$\Rightarrow (\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^3 (\Lambda^0{}_i)^2 \geq 1 \Rightarrow \Lambda^0{}_0 \geq 1 \text{ ou } \Lambda^0{}_0 \leq -1 \quad (4.8)$$

transformações de Lorentz que preservam a direção do tempo são chamadas de ortócronas $\Rightarrow \det(\Lambda^0) \geq 1$
 transformações que preservam a orientação são chamadas de próprias $\Rightarrow \det \Lambda = +1$

O subgrupo de todas as transformações de Lorentz que preservam orientação e a direção do tempo é chamado de grupo de Lorentz ortócrono próprio, $SO^+(1,3) \equiv L_+^\uparrow$

O grupo de Lorentz é um grupo de ³dimensão 6 não compacto não Abelian e real que não é conexo. Os quatro componentes conexos não são simplesmente conexos. $(L_+^\uparrow, L_+^\downarrow, L_-^\uparrow, L_-^\downarrow)$

Em qual estamos nos referindo aqui sempre ou quase sempre a $L_+^\uparrow$. (grupo de Lorentz ~~motivo~~)

Considerando uma transformação de Lorentz infinitesimal

$$x \rightarrow x' = x + \delta x$$

$$x'^\lambda = x^\lambda + \delta x^\lambda = x^\lambda + \omega^{\lambda\nu} x_\nu$$

$$\delta f(x) = f(x + \omega^{\lambda\nu} x_\nu) - f(x) = \left(I - \frac{i}{2} \omega^{\lambda\nu} J_{\lambda\nu} \right) f(x)$$

onde $J_{\lambda\nu} = i(x_\lambda \partial_\nu - x_\nu \partial_\lambda)$

É possível mostrar que

$$J_{ij} = \epsilon_{ijk} J_k$$

$$K_i = J_{0i}$$

onde J_k são as componentes do momento angular $\vec{J}$ e K_i são os geradores de boost.

(43)

onde

$$[J_i, J_j] = i \epsilon_{ijk} J_k \quad (3.11a)$$

$$[J_i, K_j] = i \epsilon_{ijk} K_k \quad (3.11b)$$

$$[K_i, K_j] = -i \epsilon_{ijk} J_k \quad (3.11c)$$

(3.11a) e (3.11b) dizem que $\vec{J}$ e $\vec{K}$ são operadores vetoriais (3.11c) nos diz que a composição de dois boosts produz uma rotação, o sinal - indica que as rotações geradas por boosts não são rotações em espaço compacto, mas sim rotações em espaço não compacto - hiperbolóides de Minkowski.

Podemos formar as combinações de geradores

$$M^{\hat{i}} = \frac{1}{2} (J^{\hat{i}} + i K^{\hat{i}}) \quad (3.12a)$$

$$N^{\hat{i}} = \frac{1}{2} (J^{\hat{i}} - i K^{\hat{i}}) \quad (3.12b)$$

e assim é possível mostrar que

$$[M^{\hat{i}}, M^{\hat{j}}] = i \epsilon_{ijk} M^{\hat{k}} \quad (3.13a)$$

$$[N^{\hat{i}}, N^{\hat{j}}] = i \epsilon_{ijk} N^{\hat{k}} \quad (3.13b)$$

$$[M^{\hat{i}}, N^{\hat{j}}] = 0 \quad (3.13c)$$

veremos que a álgebra (3.13) é isomorfa a $SU(2) \times SU(2)$.

5.2) Representações irredutíveis de dimensão finita

$$J_j = M_j + N_j \quad K_j = -i (M_j + N_j) \quad (3.14)$$

Como (3.13a) e (3.13b) são regras de comutação idênticas ao do momento angular podemos encontrar facilmente ~~uma~~ representações para M_j definindo j_+ e ~~uma~~ representações para N_j definindo j_- , j_+ , $j_- = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$

Antes de discutir isso melhor note que o $\pm$ em (3.14) na definição de K_j faz com ele não seja um operador Hermitiano, logo a representação de dimensão finita não será unitária. A razão está relacionada ao fato do grupo não ser compacto.

Se designarmos cada representação pelo par (j_+, j_-) essa representação terá dimensão $(2j_+ + 1) \times (2j_- + 1)$ e como $M_j^\dagger = N_j \Rightarrow$ a representação (j_+, j_-) é complexa, i.e. $(j_+, j_-)^* = (j_-, j_+)$

O grupo de movimento universal de L_+^1 é $SL(2, \mathbb{C})$ o grupo especial linear de grau 2 no corpo dos complexos. Considere as matrizes σ_μ ; $\sigma_0 = I$, σ_i , $i=1, 2, 3$ são as matrizes de Pauli

$$\sigma_\mu^2 = I \quad \text{Tr}(\sigma_\mu \sigma_\nu) = 2 \delta_{\mu\nu} \quad (3.15)$$

Qualquer vetor real $x \in \mathbb{R}^4$ pode ser associado a uma matriz Hermitiana

$$X = x^\mu \sigma_\mu \quad (3.16)$$

$$x^\mu = \frac{1}{2} \text{Tr} (X \sigma_\mu) \quad (3.17)$$

$$\det X = x^2 = (x^0)^2 - (\vec{x})^2 \quad (3.18)$$

Uma matriz $A \in SL(2, \mathbb{C})$ atua em X como

$$X \longrightarrow X' = A X A^\dagger \quad (3.19)$$

$$X'^\dagger = (A X A^\dagger)^\dagger = A X^\dagger A^\dagger = A X A^\dagger = X'$$

$$\det X' = \det X \Rightarrow x^2 = x'^2$$

$$x'^\mu = \frac{1}{2} \text{Tr} (X' \sigma_\mu)$$

A transformação (3.19) é uma transformação linear de $\mathbb{R}^4$ que preserva a norma de Minkowski x^2 e logo é uma transformação de Lorentz.

$$A \in SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \Lambda \in L_+^\uparrow$$

Como no caso de $SU(2)$ e $SO(3)$ a transformação A e $-A \in SL(2, \mathbb{C})$ levam à mesma transformação de $L_+^\uparrow$

Podemos construir as representações irredutíveis de $SL(2, \mathbb{C})$ $D(A)$ como fizemos p/ $SU(2)$, chamaremos (46)

estas representações de $(j, 0)$, $j = 0, 1/2, 1, \dots$ dim $2j+1$

Existe uma outra representação de dim $2j+1$, que não é equivalente, e que denotaremos por $(0, j)$.

Substituindo $A \rightarrow (A^+)^{-1}$. Vejamos o que isso significa.

No lugar de associar $X = x^\mu \sigma_\mu \rightarrow x$

podemos associar $\tilde{X} = x^0 \sigma_0 - \vec{x} \cdot \vec{\sigma} \rightarrow x$

como $\sigma_2 (\sigma_i)^T \sigma_2 = -\sigma_i \Rightarrow \tilde{X} = \sigma_2 X^T \sigma_2$ (3.20)

Assim:

$$X \longrightarrow X' = A X A^+$$

$$\begin{aligned} \tilde{X}' &= \sigma_2 (X')^T \sigma_2 = \sigma_2 (A X A^+)^T \sigma_2 \\ &= (\sigma_2 A^T \sigma_2)^+ \tilde{X} (\sigma_2 A^T \sigma_2) \end{aligned} \quad (3.21)$$

mas qualquer matriz $A \in SL(2, \mathbb{C})$ pode ser escrita como

$$A = a^\mu \sigma_\mu, \quad a^\mu \in \mathbb{C}^4$$

$$\det A = (a^0)^2 - \vec{a}^2 = 1 \quad (\text{esperal!})$$

$$\Rightarrow A^T = a^0 \sigma_0 - \vec{a} \cdot \vec{\sigma}$$

$$\sigma_2 A^T \sigma_2 \Rightarrow a^i \sigma_2 (\sigma_i)^T \sigma_2 = -a^i \sigma_i$$

$$a^0 \sigma_2 (\sigma_0)^T \sigma_2 = a^0 \sigma_0$$

$$\therefore \sigma_2 A^T \sigma_2 = A^{-1}$$

(47)

$$X' = A X A^+ \iff \tilde{X}' = (A^{-1})^+ \tilde{X} A^{-1} \quad (3.22)$$

As duas representações $(j, 0)$ e $(0, j)$ não são equivalentes em $SL(2, \mathbb{C})$ mas são equivalentes em $SU(2)$.
Em $SU(2)$, $A = U = (U^+)^{-1}$

Pode ser demonstrado que qualquer representação de dimensão finita de $SL(2, \mathbb{C})$ é completamente redutível e pode ser escrita como soma direta das representações irredutíveis. A representação de dimensão finita

$$(j_1, j_2) = (j_1, 0) \oplus (0, j_2) \quad (3.23)$$

$$j_1, j_2 = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$$

As representações usualmente encontradas em T.Q.C. são $(0, 0)$ - escalar, $(0, \frac{1}{2})$ e $(\frac{1}{2}, 0)$ espinorial - espinores de Weyl, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ espinor de Dirac = $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ - representação redutível, $(1, 0)$ e $(0, 1)$ $F^{\mu\nu}$ e $\tilde{F}^{\mu\nu}$ (dual)

5.3) Grupo de Poincaré



O grupo de Poincaré, ou também chamado de grupo de Lorentz inhomogêneo, é gerado por transformações de Lorentz $\Lambda \in L$ e ~~transformações~~ translações do espaço-tempo: denotadas por (a, Λ)

$$(a, \Lambda): x \longrightarrow x' = \Lambda x + a$$

infinitesimalmente

$$x'^{\lambda} = x^{\lambda} + \delta x^{\lambda} = x^{\lambda} + \alpha^{\lambda} + \omega^{\lambda\nu} x_{\nu}$$

$$\delta f(x) = \left(I - i\alpha^{\mu} P_{\mu} - \frac{i}{2} \omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu} \right) f(x)$$

$$P_{\mu} = i \partial_{\mu}$$

O grupo tem 10 dimensões e seus geradores obedecem

$$[P^0, P^j] = 0 \quad [K^i, P^j] = i P^0 \delta_{ij}$$

$$[P^0, J^i] = 0 \quad [J^i, P^j] = i \epsilon_{ijk} P^k$$

$$[K^i, P^0] = i P^i$$

(3.24)

$$[J^i, J^j] = i \epsilon_{ijk} J^k$$

$$[J^i, K^j] = i \epsilon_{ijk} K^k$$

$$[K^i, K^j] = -i \epsilon_{ijk} J^k$$

onde $\vec{J}, \vec{K}, \vec{P}$ são operadores vetoriais em $\mathbb{R}^3$.

Representações unitárias de grupos não-compactos são necessariamente de dimensão infinita.

Considere o estado de partícula única representado por um autoestado $|p\rangle$ do operador P_{μ} com autovalor p_{μ}

$$P_{\mu} |p\rangle = p_{\mu} |p\rangle \quad (3.25)$$

considere também o tensor de Pauli-Lubanski

$$W^{\lambda} = \frac{1}{2} \epsilon^{\lambda\mu\nu\rho} J_{\mu\nu} P_{\rho} \quad (3.26)$$

$\epsilon^{0123} = +1$, tensor antisimétrico

Pode-se facilmente verificar que

$$[W^\lambda, P^\nu] = 0$$

$$[W^\mu, W^\nu] = -i \epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} P_\sigma \quad (3.27)$$

$$[J_{\mu\nu}, W_\lambda] = i (g_{\mu\lambda} W_\nu - g_{\nu\lambda} W_\mu)$$

W^λ é um quadivetor de Lorentz.

Note que $W \cdot P = 0$ por conta da antisimetria de ϵ .

Podemos mostrar que (Verifique!):

$$P^2 = P_\mu P^\mu \quad \text{e} \quad W^2 = W_\mu W^\mu \quad \text{comutam com todos}$$

os geradores do grupo, eles são os operadores de Casimir da álgebra. De acordo com o Lema de Schur os operadores de Casimir em qualquer representação irredutível são proporcionais à identidade e podemos então usá-los para identificar as representações irredutíveis pelos seus autovalores.

Para entender o significado de W^2 , consideremos uma partícula massiva em seu referencial de repouso: $P^\mu = (m, 0)$

$$W^\mu = \cancel{\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} J_{\sigma\tau}} \quad \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\lambda\nu\sigma} J_{\lambda\nu} P_\sigma$$

$$W_i = -\frac{1}{2} m \epsilon_{ijk0} J^{jk} = -m J_i$$

$$W_0 = 0$$

$\Rightarrow$ no referencial de repouso de uma partícula (50)

massiva o tensor de Pauli-Lubanski é proporcional ao quadrado de rotações. O seu quadrado é o operador de Casimir

$$W_i^2 = m^2 s(s+1)$$

onde s é o spin da partícula. No referencial de repouso de uma partícula de massa não nula, temos $2s+1$ componentes para uma partícula de spin s . $|ms\rangle, P_\mu^2 > 0$

No caso de uma partícula de massa nula $P_\mu P^\mu = P^2 = 0$

$$W^2 |p\rangle = W_\mu P^\mu |p\rangle = P_\mu P^\mu |p\rangle = 0$$

e a única forma de satisfazer estas três condições precisamos que W_μ e P_μ sejam proporcionais um ao outro, isto é,

$$W_\mu |p\rangle = h P_\mu |p\rangle = 0, |p\rangle \text{ é um estado de massa nula.}$$

Usando a definição de W_μ para uma partícula de massa nula $P^\mu = (P, \vec{P})$ obtemos que

$$h = \frac{\vec{J} \cdot \vec{P}}{|\vec{P}|}$$

é a helicidade. Sob paridade $h \rightarrow -h \Rightarrow$ um estado de massa zero tem dois estados de helicidade $h = \pm s$:
 $|h\rangle, h = \pm s, P_\mu^2 = 0$

Imaginemos agora que inicialmente uma partícula de massa m esteja em seu referencial de repouso

$$|\vec{P}=0; s s_z\rangle : \text{multipletos com } (2s+1) \text{ estados} \quad (51)$$

que se transformam uns nos outros sob rotações. Os boosts desses estados podem ser definidos por

$$|\vec{p}; s s_z\rangle = \Lambda(\vec{p}) |\vec{0}; s s_z\rangle$$

onde $\Lambda(\vec{p})$ é a transformação unitária que implementa o boost. Boost e rotações não comutam, por essa razão é mais conveniente usar estados de helicidade bem definida, mesmo para partículas com massa não nula.

$$|p, \theta, \phi; \lambda\rangle = e^{-i\phi J_z} e^{-i\theta J_y} e^{-i\phi J_z} \Lambda(p_z) |\vec{0}; s s_z = \lambda\rangle \quad (3.28)$$

$$|p, \theta, \phi; \lambda\rangle = |p \hat{n}; \lambda\rangle$$

A helicidade é invariante por rotações e por boosts ao longo da direção do movimento. Os estados (3.28) formam uma representação unitária do grupo de Poincaré

Vea: Steve Weinberg
"The Quantum Theory of Fields", vol I. cap 2. para mais detalhes.