Lista I : Simetrias

① Vimos em aula que o operador de reversão temporal $I_t = U\,K$, onde U é um operador unitário que depende de base. Em geral, se a base mudar por uma transformação unitária W, o novo operador unitário é $\tilde{U}$. Mostre que:

(a) $\tilde{U} = W^T U W$.

(b) Mostre que I_t^2 não depende da representação.

② Usando a regra de transformação

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 a - u_2 b^* \\ u_1 b + u_2 a^* \end{pmatrix},$$

para uma rotação infinitesimal de $\delta\varphi$ em torno do eixo z, e escrevendo a transformação como $(1 - i\delta\varphi J_z)$, mostre que

$$Jz = \frac{1}{2}\left(u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} - u_2 \frac{\partial}{\partial u_2}\right), \quad J_+ = u_1 \frac{\partial}{\partial u_2} \quad J_- = u_2 \frac{\partial}{\partial u_1}.$$

Usando $\Phi_{jm} \propto u_1^p u_2^q$ e os operadores acima, verifique que $2j = p + q$ e $2m = p - q$, o que justifica a escolha que fizemos em aula. Finalmente, mostre que

$$\langle jm|(J_+)^{m-m'}|jm'\rangle = \sqrt{\frac{(j+m)!(j-m')!}{(j+m')!(j-m)!}}.$$

③ Mostre que se o estado inicial no processo $a \to b + c$ é uma mistura aleatória de estados com todos os valores de M, a distribuição angular é isotrópica desde que o coeficiente não especificado na equação

$$A(M \to f) \propto \langle s_a M | p\vec{n}\,\lambda_b \lambda_c\rangle \propto D^{s_a}_{M\Lambda}(\vec{n}) \qquad \Lambda = \lambda_b - \lambda_c$$

seja independente de M. Mostre também que, se por outro lado, M for especificado, e as helicidades de b e c não forem medidas, a distribuição angular é, em geral, não isotrópica, independente do fato de haver ou não invariância por reflexão.

④ Para chegar à equação de Schrödinger para um rotor rígido simétrico, deduza as seguintes relações:

$$\frac{\partial D(R)}{\partial \alpha} = -iJ_z D(R) \qquad \frac{\partial D(R)}{\partial \beta} = -iJ_{y'} D(R) \qquad \frac{\partial D(R)}{\partial \gamma} = -iJ_\xi D(R)$$

$$J_\xi = J_z \cos\beta + \frac{1}{2}(e^{-i\alpha} J_+ + e^{i\alpha} J_-)\sin\beta \quad J_{y'} = \frac{1}{2} i \left(e^{i\alpha} J_- - e^{-i\alpha} J_+\right)$$

$$[J_\xi, J_z] = -iJ_{y'} \sin\beta$$

onde usamos da notação $D(R) = D_\xi(\gamma) D_{y'}(\beta) D_z(\alpha)$.

Finalmente mostre que

$$\vec{J}^2 = \mathrm{cosec}^2\beta \left(J_z^2 + J_\xi^2 - 2\cos\beta\, J_\xi J_z\right) + J_{y'}^2 - iJ_{y'} \cot\beta\,,$$

e use isso para derivar

$$\left\{ \frac{d^2}{d\beta^2} + \cot\beta \frac{d}{d\beta} - \frac{M^2 + K^2 - 2MK\cos\beta}{\sin^2\beta} + J(J+1) \right\} u_{JMK}(\beta) = 0\,.$$

⑤ Dado um vetor $V_i, i = 1, ..., n$, definimos n matrizes gama tais que

$$V = V_i \gamma_i\,.$$

Admitindo que $V^2 = (V_i V_i)\mathbb{1}$, quais as condições que as matrizes γ devem satisfazer? Essas condições definem uma álgebra de Clifford.

(a) Assumindo que uma rotação pode ser descrita por

$$V \to \Omega^\dagger V \Omega\,,$$

a condição $V^2 = (V_i V_i)\mathbb{1}$ ainda é verdadeira? Essa transformação define a representação spinorial de $SO(N)$;

(b) Escrevendo agora

$$\Omega = \mathbb{1} + \frac{i}{2}\omega_{ik} J^S_{ik}\,,$$

Onde J^S_{ik} são os geradores da representação spinorial, mostre que se identificarmos

$$J^S_{ik} = \frac{i}{4}[\gamma_i, \gamma_k]\,,$$

obtemos a álgebra correta de $SO(N)$.

(c) Mostre que no caso de $SO(3)$ temos

$$J^S_i = \frac{\sigma_i}{2}\,;$$

(d) Usando produtos tensoriais entre σ e $\mathbb{1}$, construa as matrizes γ no caso de $SO(4)$.