Mecânica Quântica I - 4300403

$9^{\underline{a}}$ lista

1) **Espalhamento quântico por uma esfera compacta.** Suponha que

$$V(r) = \begin{cases} \infty & para \quad r \leq a \\ 0 & se \quad r > a \end{cases}.$$

Nesse caso a condição de contorno é dada por: $\psi(a,\theta) = 0$. Sabendo que

$$\psi(r,\theta) = A\left(e^{ikz} + \frac{e^{ikr}}{kr}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(\cos\theta)e^{i\delta_l}\sin\delta_l\right),$$

e que

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l(2l+1)j_l(kr)P_l(\cos\theta),$$

determine $\sin\delta_l$. Com esse resultado mostre que no limite de baixas energias obtem-se $\sigma \sim 4\pi a^2$, que é quatro vezes maior que o resultado clássico. Como voce interpreta esse resultado?

2) Mostre que

$$G(\vec{r}) = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r},$$

satisfaz a equação

$$(\nabla^2 + k^2)G(\vec{r}) = \delta^3(\vec{r}).$$

Dica: lembre que $\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta^3(\vec{r})$.

3) Mostre que no caso do **espalhamento quântico de baixa energia por uma esfera maleável**:

$$V(r) = \begin{cases} V_0 & para \quad r \leq a \\ 0 & se \quad r > a \end{cases},$$

a seção de choque total, na aproximação de Born, é dada por:

$$\sigma = 4\pi\left(\frac{2mV_0a^3}{3\hbar^2}\right)^2.$$

4) Calcule a amplitude de espalhamento da esfera maleável na aproximação de Born. Demonstre que no limite de baixas energias voce obtem o resultado obtido no exercício 3.

5) **Espalhamento pelo potencial de Yukawa**. A interação entre prótons e neutrons no núcleo pode ser parametrizada pelo potencial de Yukawa:

$$V(r) = \beta\frac{e^{-\mu r}}{r}$$

onde μ representa a massa da partícula trocada.

a) Mostre que a amplitude de espalhamento para o potencial de Yukawa na aproximação de Born é dada por:

$$f(\theta) \simeq -\frac{2m\beta}{\hbar^2(\mu^2+q^2)},$$

onde $q = |\vec{k} - \vec{k'}| = 2k\sin(\theta/2)$.
b) Mostre que usando $\mu = 0$ e $\beta = -q_1q_2/(4\pi\epsilon_0)$, ou seja, para o potencial coulombiano, voce obtem a fórmula de Rutherford:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left|\frac{q_1q_2}{16\pi\epsilon_0 E\sin^2(\theta/2)}\right|^2.$$

onde $E = \hbar^2k^2/2m$.

6) Mostre que a seção de choque total para o espalhamento por um potencial de Yukawa na aproximação de Born é dada por:

$$\sigma = \pi\left(\frac{4m\beta}{\mu\hbar}\right)^2\frac{1}{(\mu\hbar)^2+8mE}.$$

onde $E = \hbar^2k^2/2m$.

7) Considere o potencial delta $V(r) = \alpha\delta(r-a)$.
a) Mostre que na aproximação de Born obtemos

$$f(\theta) \simeq -\frac{2m\alpha}{\hbar^2 q}a\sin(qa), \quad q = 2k\sin(\theta/2).$$

b) Mostre que no limite de baixas energias a seção de choque total para esse potencial é dada por

$$\sigma = \pi\left(\frac{4m\alpha a^2}{\hbar^2}\right)^2.$$

Calcule isso através do resultado do ítem a) e também por integração direta da expressão para a amplitude de espalhamento, na aproximação de Born, para baixas energias:

$$f(\theta,\varphi) \simeq -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int V(\vec{r})d^3r.$$

8) Mostre que a seção de choque total para o espalhamento por um potencial gaussiano, $V(r) = Ae^{-\mu r^2}$, na aproximação de Born, é dada por

$$\sigma = \frac{\pi^2m^2A^2}{2\hbar^4\mu^2k^2}\left(1-e^{-2k^2/\mu}\right).$$

9) Partindo da equação para a expansão da amplitude de espalhamento em ondas parciais

$$f(\theta) = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)e^{i\delta_l}\sin(\delta_l)P_l(\cos\theta),$$

que fornece

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sin^2(\delta_l),$$

prove o **teorema ótico**:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k}Im[f(0)].$$