

Recordação de Alguns Temas Importantes sobre Equações Diferenciais de Segunda Ordem

[Carmen L.R. Braga; Notas de Física Matemática; Caps. 2, 3, 4]

[G.B. Arfken and H.J. Weber; Mathematical Methods for Physicists; Chap 9, 10, 12]

[P.M. Morse and H. Feshbach; Methods of Theoretical Physics, Part I; § 6.3]

Problema de Sturm-Liouville

Solução da Equação de Helmholtz sem fontes, $\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$, pelo método de separação de variáveis, em distintos sistemas de coordenadas, leva a equações diferenciais do tipo

$$\frac{d}{dz} \left[p(z) \frac{d\psi}{dz} \right] + [q(z) + \lambda r(z)] \psi(z) = 0; \quad a \leq z \leq b,$$

satisfazendo condições de contorno nos limites do intervalo. $p(z) > 0; r(z) > 0$

Singularidades: pontos onde $p(z = z_0) = 0$; z_0 fora do intervalo aberto (a, b)

singularidade regular: $p(z) \sim (z - z_0)$; singularidade irregular: $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)p(z) \rightarrow \infty$

Condições de contorno: $c_1 \psi(a) + c_2 \psi'(a) = 0$; $d_1 \psi(b) + d_2 \psi'(b) = 0$

Soluções independentes

Condição: $a_1\psi_1(z) + a_2\psi_2(z) = 0 \implies a_1 = a_2 = 0$

$$\rightarrow a_1 \frac{d\psi_1}{dz} + a_2 \frac{d\psi_2}{dz} = 0$$

Portanto

$$\begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \frac{d\psi_1}{dz} & \frac{d\psi_2}{dz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = 0 \implies \begin{cases} W = 0 \rightarrow \text{soluções dependentes} \\ W \neq 0 \rightarrow \text{soluções independentes} \end{cases}$$

Wronskiano:

$$W(z) = \psi_1 \frac{d\psi_2}{dz} - \psi_2 \frac{d\psi_1}{dz}$$

Condições de contorno:

$$c_1\psi_1(a) + c_2\psi_1'(a) = 0; c_1\psi_2(a) + c_2\psi_2'(a) = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_1' \\ \psi_2 & \psi_2' \end{bmatrix}_a = 0$$

O mesmo em $z = b$.

Ortogonalidade das auto funções

Duas soluções

$$\frac{d}{dz} \left[p(z) \frac{d\psi_j}{dz} \right] + [q(z) + \lambda_j r(z)] \psi_j = 0; j = 1, 2$$

$$c_1 \psi_j(a) + c_2 \psi_j'(a) = 0; \quad d_1 \psi_j(b) + d_2 \psi_j'(b) = 0$$

Multiplicamos equação para ψ_2 por ψ_1 e a equação para ψ_1 por ψ_2 e subtraímos uma da outra:

$$\psi_1 \frac{d}{dz} \left[p \frac{d\psi_2}{dz} \right] - \psi_2 \left[p \frac{d\psi_1}{dz} \right] + (\lambda_2 - \lambda_1) r \psi_1 \psi_2 = 0$$

$$\therefore \frac{d}{dz} \left[\psi_1 p \frac{d\psi_2}{dz} - \psi_2 p \frac{d\psi_1}{dz} \right] = \frac{d}{dz} [p(z) W(z)] = (\lambda_1 - \lambda_2) r \psi_1 \psi_2$$

Integrando de $z = a$ a $z = b$ e lembrando que o Wronskiano (ou $p(z)$, em alguns casos) se anula nos extremos

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b r(z) \psi_1(z) \psi_2(z) dz = 0 \rightarrow \int_a^b r(z) \psi_1(z) \psi_2(z) dz = 0; \lambda_1 \neq \lambda_2$$

Comportamento dos zeros das soluções

(equações de interesse, $p(z) \geq 0$; $r(z) \geq 0$ em todo o intervalo)

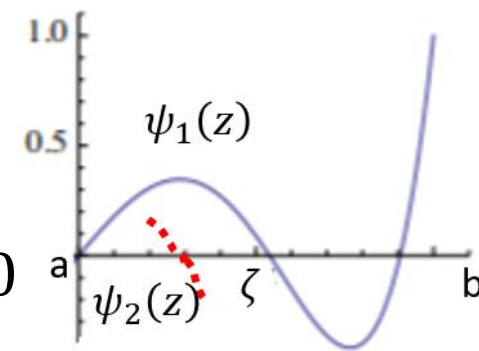
Solução com uma oscilação, $\psi_1(z) \leftrightarrow \lambda_1$ e outra $\psi_2(z) \leftrightarrow \lambda_2$; $\lambda_2 > \lambda_1$

Integremos a equação anterior desde $z = a$ até $z = \zeta$, o primeiro zero de ψ_1

$$p(\zeta)W(\zeta) - p(a)W(a) = (\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^\zeta r(z)\psi_1(z)\psi_2(z)dz$$

Mas, $p(a)W(a) = 0$ e $\psi_1(\zeta) = 0 \rightarrow W(\zeta) = -\psi_2(\zeta) \frac{d\psi_1}{dz} \Big|_\zeta$

$$\therefore \left[p\psi_2 \frac{d\psi_1}{dz} \right]_\zeta = (\lambda_2 - \lambda_1) \int_a^\zeta r \psi_1 \psi_2 dz; p(\zeta) > 0; \frac{d\psi_1}{dz} \Big|_\zeta < 0$$



Se

$\psi_2(z) > 0$ em $(a, \zeta) \Rightarrow$ lado esquerdo (-); lado direito (+) $\rightarrow$ incompatibilidade

Conclusão: $\psi_2(z)$ tem que passar por zero antes de $z = \zeta \rightarrow$ oscila mais que $\psi_1(z)$

Equação de Legendre

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \lambda y = 0 \rightarrow \frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \lambda y = 0; -1 \leq x \leq 1$$

Condições de contorno: soluções regulares em $|x| = 1$.

$$p(x) = 1 - x^2; q(x) = 0; r(x) = 1$$

Solução por série de potências (Método de Frobenius)

$$y(x) = \sum_{n=0} a_n x^n; \frac{dy}{dx} = \sum_{n=0} a_n n x^{n-1}; \frac{d^2 y}{dx^2} = \sum_{n=0} a_n n(n-1) x^{n-2}$$

Substituindo na equação original

$$\sum_{n=0} a_n n(n-1) x^n - \sum_{n=0} a_n [n(n+1) - \lambda] x^{n+2} = 0$$

Igualando potencias iguais de $x \rightarrow a_{n+2} = \frac{n(n+1)-\lambda}{(n+2)(n+1)} a_n$

Regularidade em $|x| = 1$

$$R_n = \frac{a_{n+2}x^2}{a_n} = \frac{n(n+1) - \lambda}{(n+2)(n+1)} x^2 \sim x^2$$

Série converge para $|x| < 1$

diverge para $|x| = 1$ a não ser que $\lambda = \ell(\ell + 1) \rightarrow$ série termina quando $n = \ell$
 $\rightarrow$ polinômio de grau ℓ

Por convenção, polinômios são especificados de forma que $P_\ell(x = 1) = 1$.

ℓ par $\rightarrow a_0 = 1; a_1 = 0; \ell$ ímpar $\rightarrow a_0 = 0; a_1 = 1$

$$P_0(x) = 1,$$

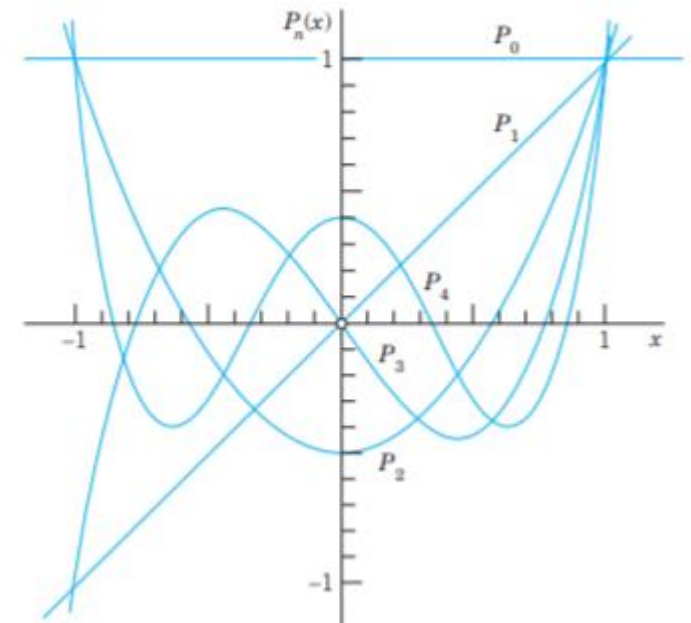
$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$



Ortogonalidade

Consideremos dois polinômios de graus diferentes, $\psi_1 = P_{\ell_1}(x)$; $\psi_2 = P_{\ell_2}(x)$.

Equação de Legendre $\rightarrow r(x) = 1$; $\lambda = \ell(\ell + 1)$; $a = -1$; $b = 1$; portanto

$$[\ell_1(\ell_1 + 1) - \ell_2(\ell_2 + 1)] \int_{-1}^1 P_{\ell_1}(x) P_{\ell_2}(x) dx = 0$$

$$\ell_1 \neq \ell_2 \rightarrow \int_{-1}^1 P_{\ell_1}(x) P_{\ell_2}(x) dx = 0$$

Normalização $\ell_1 = \ell_2 = \ell$

$$\text{Função Geratriz: } \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{\ell \geq 0} t^\ell P_\ell(x)$$

Verificação: série de Taylor do lado esquerdo

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = 1 + xt + \frac{3x^2-1}{2}t^2 + \frac{5x^3-x}{2}t^3 + \frac{35x^4-30x^2+3}{8}t^4 + \dots$$

Tomando o quadrado da função geratriz

$$\frac{1}{1 - 2xt + t^2} = \left(\sum_{\ell} t^{\ell} P_{\ell}(x) \right) \left(\sum_n t^n P_n(x) \right) = \sum_{\ell, n} t^{\ell+n} P_{\ell}(x) P_n(x)$$

$$\therefore \int_{-1}^1 \frac{dx}{1 - 2xt + t^2} = \frac{\ln(1+t) - \ln(1-t)}{t} = \sum_{n \geq 0} t^{2n} \int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx$$

$$\therefore 2 \left(1 + \frac{1}{3} t^2 + \frac{1}{5} t^4 + \frac{1}{7} t^6 + \dots \right) = \sum_{n \geq 0} t^{2n} \int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}}$$

Relações de Recorrência: $\frac{d}{dt} [\text{função geratriz}] \rightarrow$

$$\frac{x - t}{[1 - 2xt + t^2]^{3/2}} = \sum_n n P_n(x) t^{n-1}$$

$$(1 - 2xt + t^2) \sum_n nP_n t^{n-1} + (t - x) \sum_n P_n(x) t^n = 0$$

Coeficientes de potências iguais de t devem anular-se

$$\sum_m mP_m(x)t^{m-1} - \sum_n (2n+1)xP_n(x)t^n + \sum_\ell (\ell+1)P_\ell(x)t^{\ell+1} = 0$$

Para coloca todos os termos com a mesma potência, fazemos $m = n + 1$; $\ell = n - 1$

$$\Rightarrow (2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x)$$

Recomendação

Estudar no livro do Arfken as funções de Legendre de segunda espécie, $Q_n(x)$, que divergem em $|x| = 1$. Em particular, mostrar, por substituição direta, que uma segunda solução da Equação de Legendre para $\ell = 0$ é $Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$.