PGF 5003 -2020

Série de Exercícios 1

1. Demonstre que o vetor unitário perpendicular à superfície $\phi(\vec{r}) = 0$ é dado por

$$\hat{n} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$$

2. Sabendo que $\vec{r}$ é o vetor posição em coordenadas esféricas, mostre que

$$\nabla \cdot \vec{r} = 3;\ \ \nabla \times \vec{r} = 0;\ \ \nabla^2\vec{r} = 0;\ \ \nabla \times \vec{r} = 0$$

utilizando o operador ∇ em coordenadas esféricas.

3. Se uma função vetorial $\vec{F}(r)$ for função somente de $r = |\vec{r}|$, mostre que

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{d\vec{F}}{dr};\ \ \ \nabla\left|\vec{F}(r)\right| = \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{dF}{dr}$$

Faça os cálculos primeiro em coordenadas cartesianas e depois os repita em coordenadas esféricas.

4. Sejam $\hat{e}_r;\ \hat{e}_\theta;\ \ \hat{e}_\varphi$ os versores em coordenadas esféricas (r, θ, φ). Mostre que

$$\frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \varphi} = \sin\theta\, \hat{e}_\varphi;\ \frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \varphi} = \cos\theta\, \hat{e}_\varphi;\ \frac{\partial \hat{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\sin\theta\, \hat{e}_r - \cos\theta\, \hat{e}_\theta$$

5. Mostre que, em coordenadas esféricas,

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, F_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}$$

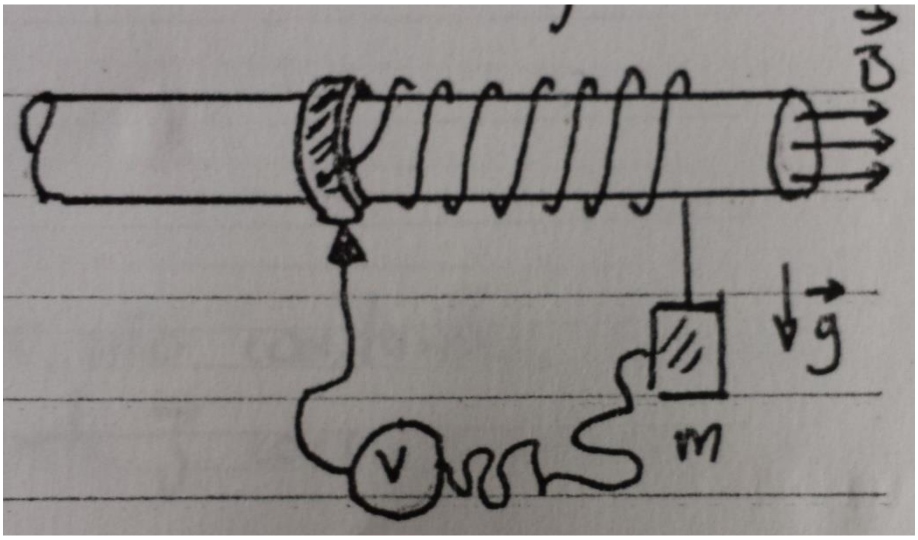
6. Dada uma distribuição contínua de carga, $\rho(\vec{r})$, e usando $\vec{E} = -\nabla\phi(\vec{r})$, válido para campos eletrostáticos, temos $\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon_0$. Por outro lado, para uma carga puntiforme localizada na posição $\vec{r}'$, o potencial é dado por

$$\psi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|}\ \rightarrow\ \nabla^2\psi = -\frac{q}{\epsilon_0}\delta(\vec{r} - \vec{r}'),$$

onde usamos $\nabla(1/|\vec{r}| - \vec{r}') = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')$. Considerando que $\phi(\vec{r})$ é conhecido, utilize a Segunda Identidade de Green para derivar uma expressão para $\phi(\vec{r})$,

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + \oint \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\nabla\phi - \phi\nabla\left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\right)\right] \cdot d\vec{S}'$$

7. Numa barra cilíndrica imantada, com campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0\hat{e}_z$, está inserido um anel condutor. No anel é conectado um fio de comprimento ℓ, que é enrolado na barra e tendo preso, na sua outra extremidade, um corpo de massa m, também condutor. Um outro fio é conectado ao corpo e a um dos bornes de um voltímetro. O outro borne do voltímetro está conectado ao anel condutor através de uma bucha de grafite, que é um material condutor, como indicado na figura. Com a bucha, o borne permanece eletricamente conectado ao anel, enquanto este gira e se desloca na barra. Sabendo que o diâmetro da seção reta uniforme da barra é D, determine a expressão da força electromotriz lida pelo voltímetro, em função do tempo, quando o corpo de massa m estiver caindo em queda livre.



8. Faça os problemas 5, 6 e 7 do Cap. 9 do Livro Electricity and Magnetism, Panofsky and Phillips.