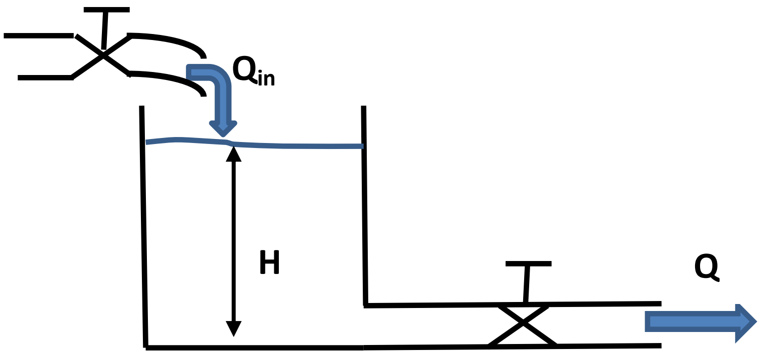
MODELAGEM DE SISTEMAS HIDRÁULICOS

Escoamento em Tanques e Tubulações

Exemplo:



Nos textos relacionados a sistemas dinâmicos e à modelagem linear de escoamentos em tanques e tubulações, são apresentadas formulações que, aparentemente, utilizam uma analogia entre sistemas hidráulicos e elétricos. Basicamente, o modelo linear entre vazão e altura manométrica de um sistema como o da figura acima, é dada por uma relação de proporcionalidade entre ambos:

$$H = RQ \qquad (1)$$

O nível de água "H" faz o papel da tensão e a vazão, "Q", o papel de corrente, na analogia. O parâmetro "R" faz o papel da "resistência".

Tal relação é utilizada para representar as variações dinâmicas em torno de uma condição de equilíbrio:

$$\bar{H} + h = R(\bar{Q} + q) \Rightarrow h = Rq \qquad (2)$$

Note que a variável Q_{in} *não comparece na relação, sendo reservada, somente para a equação de continuidade que relaciona a variação do nível d´água no tanque com a vazão líquida no mesmo. As equações para o regime permanente e perturbações em torno dessa condição ficam:*

$$\bar{Q}_{in} - \bar{Q} = 0$$

$$q_{in} - q = C\dot{h} \qquad (3)$$

, onde C é um parâmetro, que depende da geometria do tanque, conhecido como "capacitância", e relaciona a variação de volume do tanque com a variação do nível d´água.

No livro texto (Ogata), a relação linear entre vazão e o nível d´água no tanque, é derivada através da linearização de uma relação quadrática entre essas variáveis, atribuídas a um modelo turbulento para o escoamento:

$$H = \frac{1}{K}Q^2 \qquad (4)$$

A partir daí, pode-se derivar a relação linear entre as perturbações dessas variáveis em relação à condição de equilíbrio:

$$\overline{H} + h = \frac{1}{K}(\overline{Q} + q)^2 = \frac{1}{K}(\overline{Q}^2 + 2\overline{Q}q + q^2) \qquad (5)$$

Usando a equação (4) e negligenciando o termo de segunda ordem da perturbação da vazão, vem:

$$h = \frac{1}{K} 2\overline{Q}q \qquad (6)$$

, de onde vem a expressão para o parâmetro de “ resistência” hidráulica:

$$R = \frac{1}{K} 2\overline{Q} \qquad (7)$$

Ogata propõe uma maneira pragmática de se estimar “R” através do experimento que levanta um gráfico para vários pares de H e Q. Tomando-se a tangente à curva nos valores de regime selecionados ($\overline{H},\overline{Q}$ *), tem-se “R” dado pela inclinação dessa reta.*

Como tal modelagem se relaciona com nosso conhecimento de mecânica de fluidos?

Num Volume de Controle:

A-Balanço de Energia no Fluido

Para um processo isotérmico, sem perdas e sem a aplicação de trabalho externo, em regime permanente, temos:1

Energia de Pressão + Energia Cinética + Energia Potencial = Constante

Ou, seja, por unidade de peso do fluido, temos:

$$\left(\frac{\overline{p}}{\rho g} + \frac{\overline{V}^2}{2g} + \overline{H}\right)_{Entrada\,\text{do Volume de Controle}} = \left(\frac{\overline{p}}{\rho g} + \frac{\overline{V}^2}{2g} + \overline{H}\right)_{Saída\,\text{do Volume de Controle}}$$

Para um escoamento real, a perda por unidade de peso, ou seja, a perda de carga é acrescentada na relação como segue:

$$\left(\frac{\overline{p}}{\rho g} + \frac{\overline{V}^2}{2g} + \overline{H}\right)_{Entrada} - \overline{H}_L = \left(\frac{\overline{p}}{\rho g} + \frac{\overline{V}^2}{2g} + \overline{H}\right)_{Saída}$$

A perda de carga é proporcional à velocidade do fluido, ou seja:

$$H_L = \alpha \frac{V^2}{2g}$$

Expressando em termos da vazão, temos:

$$\left(\frac{\overline{p}}{\rho g} + k_1 \frac{\overline{Q}^2}{2g} + \overline{H}\right)_{Entrada} - k_L \frac{\overline{Q}^2}{2g} = \left(\frac{\overline{p}}{\rho g} + k_2 \frac{\overline{Q}^2}{2g} + \overline{H}\right)_{Saída}$$

, onde k_1 *e* k_2 *levam em conta a geometria da seção transversal dos condutos na entrada e saída do volume de controle, respectivamente, e* k_L, *além da geometria do conduto, embute o coeficiente α. Para um tubo de seção circular e diâmetro “D”, para o cálculo de* k_1 *e* k_2, *tem-se:*

$$k = \left(\frac{4}{\pi D^2}\right)^2$$

Além disso, em regime permanente, a condição de continuidade fornece:

$$\overline{Q}_{Entrada} - \overline{Q}_{Saída} = 0$$

Considerando pequenas perturbações em torno da condição de regime permanente, vem:

$$\frac{\overline{p}+\Delta p}{\rho g} + k_1(\overline{Q}+q)^2 + (\overline{H}+h) - k_L(\overline{Q}+q)^2 =$$
$$= \frac{\overline{p}+\Delta p}{\rho g} + \frac{k_1}{2g}(\overline{Q}^2 + 2\overline{Q}q + q^2) + (\overline{H}+h) - k_L(\overline{Q}^2 + 2\overline{Q}q + q^2) \cong$$
$$\cong \frac{\overline{p}+\Delta p}{\rho g} + \frac{k_1}{2g}(\overline{Q}^2 + 2\overline{Q}q) + (\overline{H}+h) - k_L(\overline{Q}^2 + 2\overline{Q}q)$$

As somas dos termos em regime permanente da entrada e saída são constantes e idênticas, podendo ser canceladas.

Restam as parcelas de interesse para a análise da dinâmica, formada pelos termos de perturbação:

$$(\Delta p + \frac{k_1}{2g}2\overline{Q}q + h)_{Entrada} - k_L 2\overline{Q}q = (\Delta p + \frac{k_2}{2g}2\overline{Q}q + h)_{Saída}$$

Portanto,

$$(\Delta p + k_E q + h)_{Entrada} - K_L q = (\Delta p + k_S q + h)_{Saída}$$

, onde

$$k_E = \frac{k_1}{g}\overline{Q}_{Entrada}$$
$$k_S = \frac{k_2}{g}\overline{Q}_{Saída}$$
$$K_L = k_L 2\overline{Q}$$

Para o problema em questão, a vazão presente na definição de K_L e a correspondente perturbação "q", dizem respeito à saída da tubulação. Além disso, "h" na saída é nula, e os termos de pressão se cancelam, pois, tanto o tanque como a saída da tubulação estão à pressão atmosférica. Finalmente, a vazão na entrada do volume de controle é Q_{in} e sua perturbação, em relação ao valor de regime permanente, é q_{in}..

Temos, portanto:

$$k_E q_{in} + h - K_L q_{Saída} = k_S q_{Saída}$$

Em geral, para esse tipo de problema, despreza-se os efeitos da vazão na entrada do tanque. Analisando-se a ordem de grandeza comparativa entre as energias cinética e potencial do tanque, pode-se concluir que tal aproximação é justificável.

<u>Análise de Magnitude</u>

1) **Influência de Q_{in}, relacionada à energia cinética da entrada**

Tomemos:

Q_{in} = 1m^3/s

D= diâmetro do tanque = 1m

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{[4.Q_{in} / \pi D^2]^2}{2g} = \frac{[4.1/\pi.1]^2}{20} = 0{,}0811m$$

Na maior parte dos problemas tratados, a altura de carga, que expressa a energia potencial devida ao nível d´água no tanque, é bem maior do que esse valor. A variação de controle, q_{in}, que multiplicaria o valor de regime permanente de Q_{in} no processo de linearização, resulta num termo ainda menor.

<u>Conclusão:</u> Provavelmente, desprezar o termo de energia cinética devido a Q_{in}, é uma alternativa satisfatória.

Já o termo de energia cinética do fluido, na saída da tubulação, pode não ser desprezível.

2) **Influência de $Q_{saída}$ na energia cinética da saída.**

Q_1= 0,5m^3/s

D = diâmetro da tubulação= 0,1m

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{[4.Q_{in} / \pi D^2]^2}{2g} = \frac{[4.0{,}5/\pi.0{,}01]^2}{20} = 202{,}64m$$

<u>Conclusão:</u> Deve-se avaliar com cuidado a participação de Q_1, antes de desprezá-lo, se for o caso. Provavelmente, na análise linear, deve-se incorporar sua contribuição em "R".

Chega-se, assim, à expressão simplificada da relação entre altura e vazão, coincidente com aquela apresentada na literatura ($k_E q_{in} \cong 0$):

$$h = Rq$$

Onde,

$$R = K_L + k_S$$
$$q = q_{Saída}$$

Note que, assim como em outros processos de modelagem de sistemas hidráulicos e hidrodinâmicos, parte-se da modelagem de um sistema dinâmico a partir de uma relação não linear, obtida para um regime permanente.