

BREVE INTRODUÇÃO A FILTROS ATIVOS

1. Introdução

Filtros são dispositivos eletrônicos cuja função é atuar sobre um sinal de tensão de modo a privilegiar componentes em algumas frequências e eliminar componentes em outras. Os quatro tipos principais de filtro, idealmente, funcionam como o ilustrado na figura 1. Nela, tem-se o filtro passa baixas, o filtro passa altas e o filtro passa faixa e o filtro de rejeição de faixa.

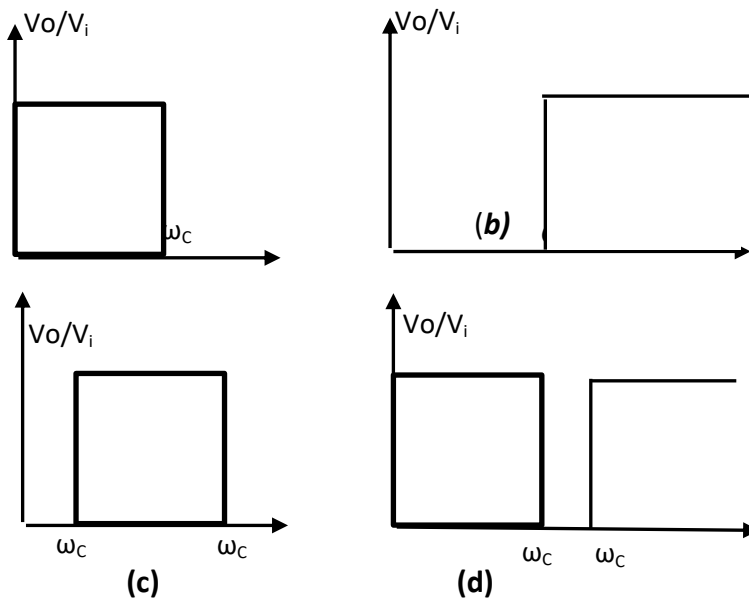


Figura 1. Representação ideal de tipos de filtros: (a)-filtro passa baixa; (b) filtro passa alta; (c) filtro passa faixa; (d) filtro rejeita faixa. A

Filtros ativos têm, como elemento central, o amplificador operacional, que é combinado com elementos resistivos e capacitivos. É possível a implementação de filtros somente com elementos passivos, porém, com o amp-op, economiza-se no custo e tamanho dos componentes passivos, além do comportamento do filtro ser independente do circuito eletrônico acoplado à saída do filtro. Finalmente, o uso do amp-op possibilita uma amplificação do sinal na saída.

2. Implementação dos Filtros

Na combinação dos elementos eletrônicos mencionados, obtém-se filtros reais que aproximam o comportamento ideal representado na figura 1. Tornando a implementação mais complexa (inserindo-se mais componentes) pode-se aperfeiçoar a implementação rumo ao comportamento ideal. No que segue, apresenta-se a implementação básica para cada tipo de filtro.

2.1 Filtro Passa Baixa

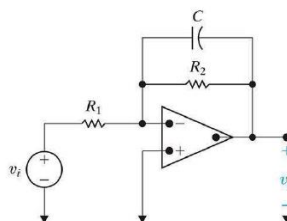


Figura 2. Filtro Passa Baixa. Fonte: [1]

$$G_{PB}(s) = \frac{V_o}{V_i}(s) = -\frac{Z_2}{Z_1}(s)$$

$$Z_2(s) = \frac{\frac{R_2}{Cs}}{R_2 + \frac{1}{Cs}} = \frac{R_2}{R_2Cs + 1}; Z_1(s) = R_1$$

Portanto,

$$G_{PB}(s) = -\frac{R_2/R_1}{R_2Cs + 1} = -K \frac{1}{Ts + 1} = -K \frac{\omega_{cB}}{s + \omega_{cB}}$$

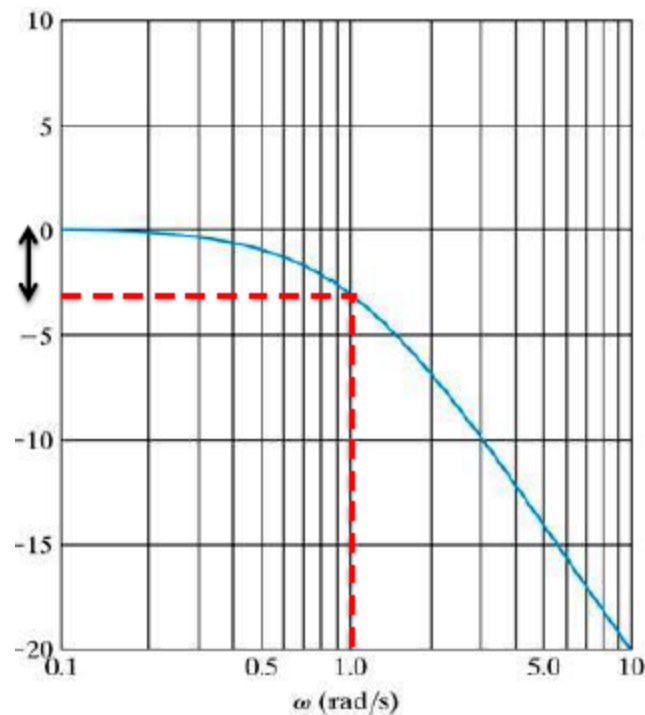
, onde

$$K = \frac{R_2}{R_1}; T = R_2C; \omega_{cB} = \frac{1}{T} = \frac{1}{R_2C}$$

Exemplo:

$$R_1 = R_2 = 1\Omega, C = 1F$$

O ganho, constante de tempo e frequência de corte passam a ser, respectivamente, $K = 1$, $T = 1s$, $\omega_{cB} = 1\text{rad/s}$. A magnitude em função da frequência é dada pelo diagrama de Bode abaixo.



Para frequências próximas de zero, a magnitude é dada por

$$|G(0)| = 20\log K = 20\log 1 = 0$$

A magnitude na frequência de corte, como se espera, é

$$|G(j\omega)| = 20\log \sqrt{\frac{1}{1+1}} = -3\text{dB}$$

Para frequências maiores, o valor da magnitude da função de transferência tende a zero, pois:

$$|G(j\omega)| = 20\log \left| \frac{1}{1+j\omega} \right| = 20\log \sqrt{\frac{1}{1+\omega^2}}$$

2.2 Filtro Passa Alta

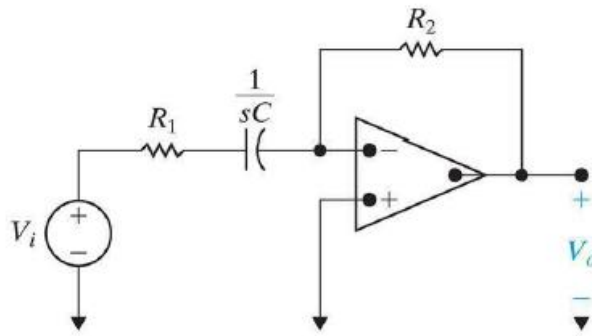


Figura 3. Filtro Passa Baixa. Fonte: [1]

$$G_{PA}(s) = \frac{V_o}{V_i}(s) = -\frac{Z_2}{Z_1}(s)$$

$$Z_1(s) = R_1 + \frac{1}{Cs}; \quad Z_2(s) = R_2$$

Portanto,

$$G_{PA}(s) = -\frac{R_2Cs}{R_1Cs + 1} = -K \frac{s}{s + \omega_{cA}}$$

, onde

$$K = \frac{R_2}{R_1}; \quad \omega_{cA} = \frac{1}{R_1C}$$

Exemplo:

$R_1=20\text{k}\Omega$, $R_2=200\text{ k}\Omega$, $C=0,1\mu\text{F}$

O ganho e a frequência de corte passam a ser, respectivamente, $K = 10$, $\omega_{cA} = 500\text{rad/s}$. A magnitude em função da frequência é dada pelo diagrama de Bode a seguir (Fig. 4).

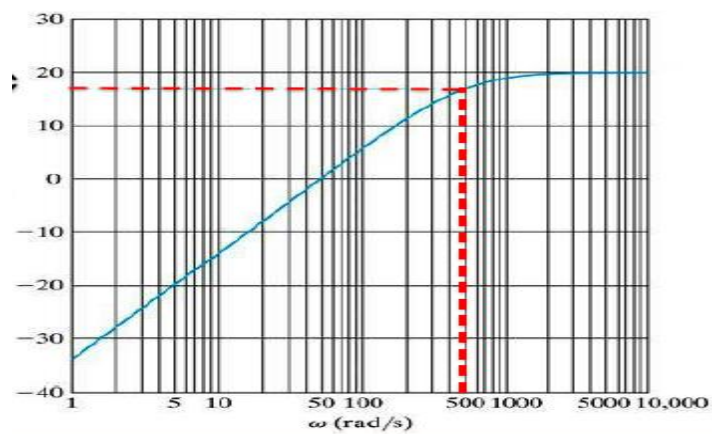


Figura 4. Filtro Passa Altas. Fonte: [1]

Observação: Para anular o processo de inversão, considere a saída V_o alimentando o circuito do amplificador inversor com ganho unitário ($R_2=R_1$).

2.3 Filtro Passa Faixa

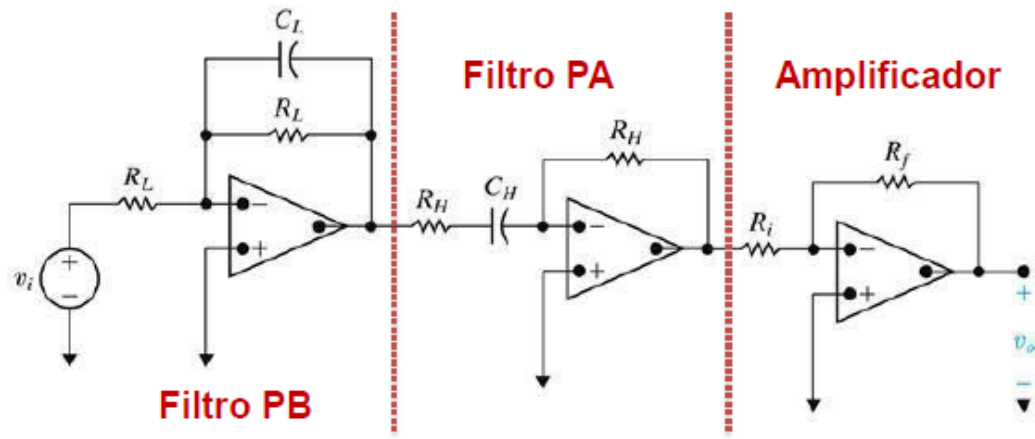


Figura 5. Filtro Passa Faixa. Fonte: [1].

$$G_{PF} = -\frac{\omega_{c2}}{s + \omega_{c2}} \cdot -\frac{s}{s + \omega_{c1}} \cdot -\frac{R_f}{R_i} =$$

$$= -\frac{K\omega_{c2}s}{(s + \omega_{c1})(s + \omega_{c2})}$$

Destaca-se, a seguir, a frequência central:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{c1}\omega_{c2}}$$

Para este valor, o módulo da função de transferência atinge seu valor máximo. Seu cálculo é dado por:

Esta é a chamada “ganho na faixa de passagem”, e deve ser considerado no projeto do filtro.

Considerando-se as 2 frequências bem distantes, ou seja

$$\omega_{c2} \gg \omega_{c1}$$

, pode-se projetar independentemente cada estágio do filtro, pois, neste caso,

$$|G(j\omega_0)| = K \frac{\omega_{c2}}{\omega_{c1} + \omega_{c2}} \cong K \frac{\omega_{c2}}{\omega_{c2}} = K$$

Portanto, define-se os valores dos componentes do filtro a partir dos parâmetros desejados para as frequências de corte e ganho na faixa de passagem, como segue:

$$\omega_{c1} = \frac{1}{R_H C_H}; \omega_{c2} = \frac{1}{R_L C_L}; K = \frac{R_f}{R_i}$$

2.4 Filtro Rejeita Faixa

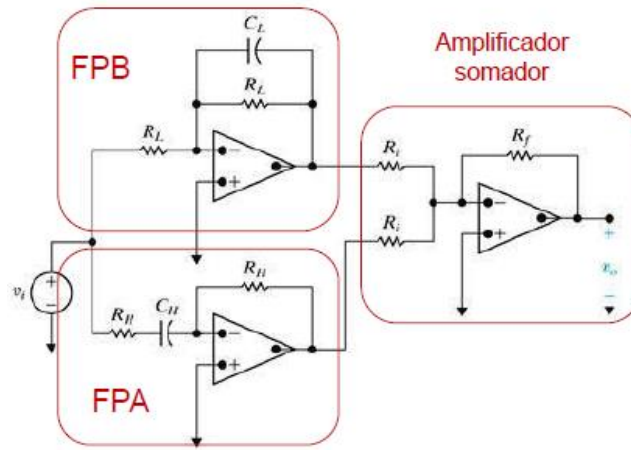


Figura 6. Filtro Rejeita Faixa. Fonte: [1]

$$G_{PF} = \left(-\frac{\omega_{CB}}{s + \omega_{CB}} - \frac{s}{s + \omega_{CA}} \right) \cdot \left(-\frac{R_f}{R_i} \right)$$

Da mesma forma que no filtro passa faixa, impomos aqui

$$\omega_{CA} \gg \omega_{CB}$$

2.5 Filtro Notch

Um filtro de rejeição para uma frequência específica, que, portanto, portanto pode possuir um comportamento mais abrupto próximo à mesma, é o filtro notch. Uma implementação do mesmo se baseia no circuito “duplo T”.

A solução para a função de transferência do circuito é dada abaixo, onde o ramo superior, das resistências, responde pela componente passa-baixas do circuito (o capacitor com $2C$ descarrega as componentes de alta frequência), enquanto o ramo inferior, responde pela componente passa-altas (o resistor com $R/2$ descarrega as componentes de baixa frequência). Aplica-se a tensão “ V_A ” na entrada, e o terminal de saída está aberto (corrente é nula aí), ou, podemos conectar o terminal de saída ao terminal positivo de um circuito de desacoplamento ou “buffer”, o que não altera a condição de corrente nula no último nó à direita no circuito.

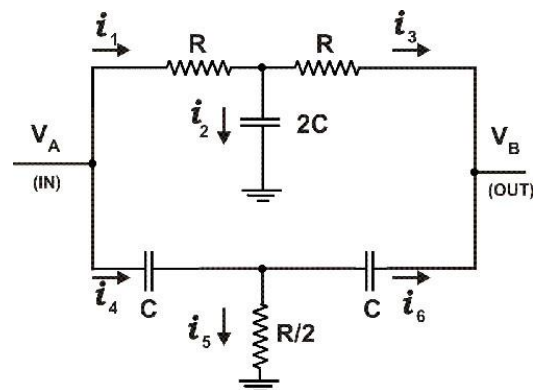


Figura 7. Circuito “Duplo T”. Fonte[2]

A seguir, vamos calcular a função de transferência do circuito. As equações de malha ficam:

$$V_A(s) - I_1(s)R - I_2(s)Z_C(s)/2 = 0 \quad (1)$$

$$V_A(s) - I_4(s)Z_C(s) - I_5(s)R/2 = 0 \quad (2)$$

$$V_B(s) + I_3(s)R - I_2(s)Z_C(s)/2 = 0 \quad (3)$$

$$V_B(s) + I_6(s)Z_C(s) - I_5(s)R/2 = 0 \quad (4)$$

, onde $Z_C(s)=1/Cs$, que é a impedância complexa do capacitor.

As equações dos nós são:

$$I_1(s) = I_2(s) + I_3(s) \quad (5)$$

$$I_4(s) = I_5(s) + I_6(s) \quad (6)$$

$$I_3(s) = -I_6(s) \quad (7)$$

Aplicando-se (5), (6) e (7) nas equações de malha, vem

$$V_A(s) = (I_2(s) + I_3(s))R + I_2(s)Z_C(s)/2 \quad (8)$$

$$V_A(s) = (I_5(s) - I_3(s))Z_C(s) + I_5(s)R/2 \quad (9)$$

$$V_B(s) = -I_3(s)R + I_2(s)Z_C(s)/2 \quad (10)$$

$$V_B(s) = I_3(s)Z_C(s) + I_5(s)R/2 \quad (11)$$

Somando (8) e (10) e igualando o resultado à soma de (9) e (11) vem:

$$V_A(s) + V_B(s) = I_2(s)R + I_2(s)Z_C(s) = I_5(s)Z_C(s) + I_5(s)R \quad (12)$$

De (12), concluímos que:

$$I_2(s) = I_5(s) \quad (13)$$

Usando esse importante resultado nas expressões (10) e (11), vem:

$$I_3(s) = \frac{I_2(s)}{2} \frac{(Z_C(s) - R)}{(Z_C(s) + R)} \quad (14)$$

Substituindo tal valor nas equações (8) a (11), vem:

$$V_A(s) = \frac{I_2(s)(R^2 + 4RZ_C(s) + Z_C^2(s))}{2(Z_C(s) + R)} \quad (15)$$

$$V_B(s) = \frac{I_2(s)(R^2 + Z_C^2(s))}{2(Z_C(s) + R)} \quad (16)$$

De (14) e (15), chegamos à função de transferência procurada:

$$\frac{V_B(s)}{V_A(s)} = \frac{(Z_C^2(s) + R^2)}{(R^2 + 4RZ_C(s) + Z_C^2(s))} = \frac{(1 + R^2C^2s^2)}{(R^2C^2s^2 + 4RCs + 1)} \quad (17)$$

Portanto,

$$\frac{V_A(s)}{V_B(s)} = \frac{(s^2 + \omega_n^2)}{(s^2 + 4\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (18)$$

, onde, $\omega_n = 1/RC$. A figura 8 apresenta o diagrama de bode de um exemplo de filtro notch, para frequência ω_n igual a 100rad/s.

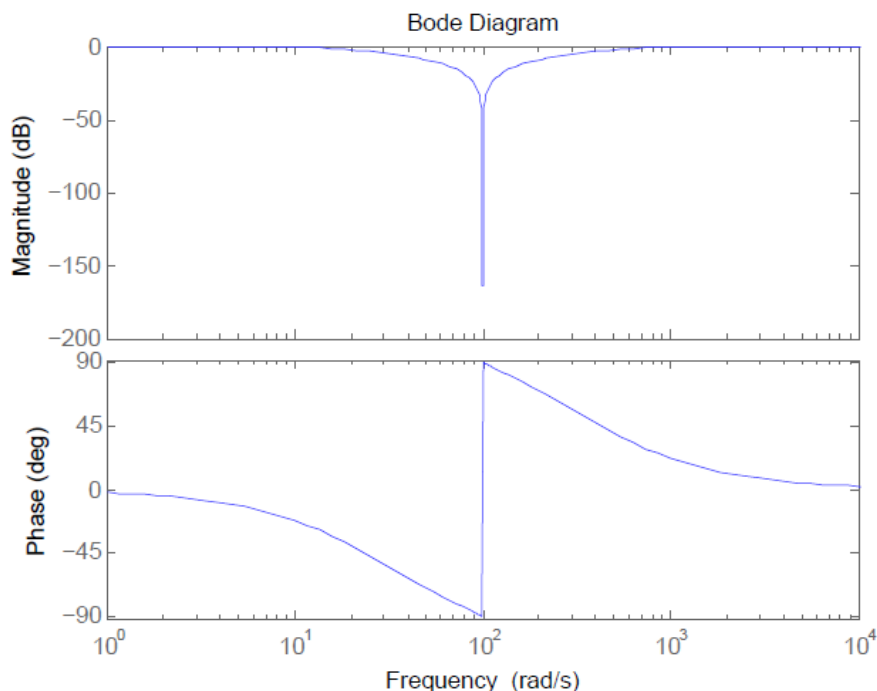


Figura 8. Exemplo da resposta em frequência de um filtro Notch.

Pode-se deixar a queda de ganho, próximo à frequência de rejeição, bem mais abrupta com a combinação de um buffer e um circuito não inversor ligados aos terminais do circuito mostrado na figura 9, para $R1=R2=R$, $R3=R/2$, e $C1=C2=C$ e $C3= 2C$.

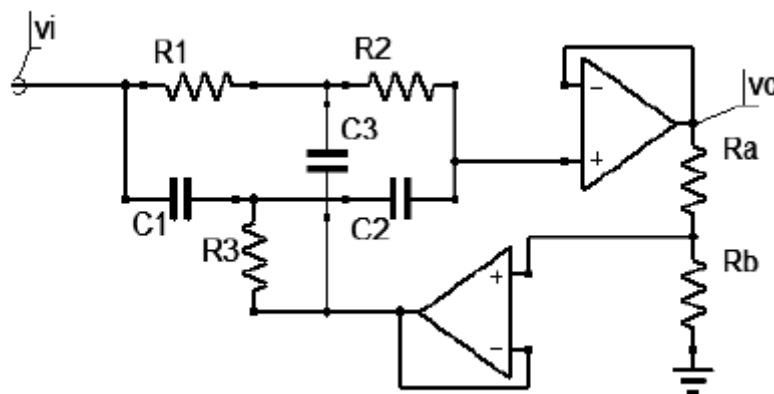


Figura 9. Filtro Notch com Fator de Qualidade Ajustável. Fonte: [4]

A função de transferência muda para:

$$\frac{V_A}{V_B}(s) = \frac{(s^2 + \omega_n^2)}{(s^2 + 4 \frac{Ra}{Rb + Ra} \omega_n s + \omega_n^2)}$$

Com o ajuste de R e C pode-se definir a frequência central de rejeição, enquanto que, variando-se Ra e Rb, varia-se a largura de banda do filtro, deixando a resposta em frequência com uma queda mais ou menos abrupta, respectivamente, em torno da frequência central de rejeição.

Define-se como fator de qualidade do filtro a razão entre a frequência central e a largura de banda do filtro:

$$Q = \frac{\omega_n}{BW}$$

, onde BW é a largura de banda do filtro.

Para uma dada frequência central de rejeição, pode-se aumentar o fator de qualidade variando-se R_a e R_b .

A figura 10, ilustra o comportamento do filtro para diversos valores de Q , onde as respostas mais abruptas correspondem a maiores valores de Q .

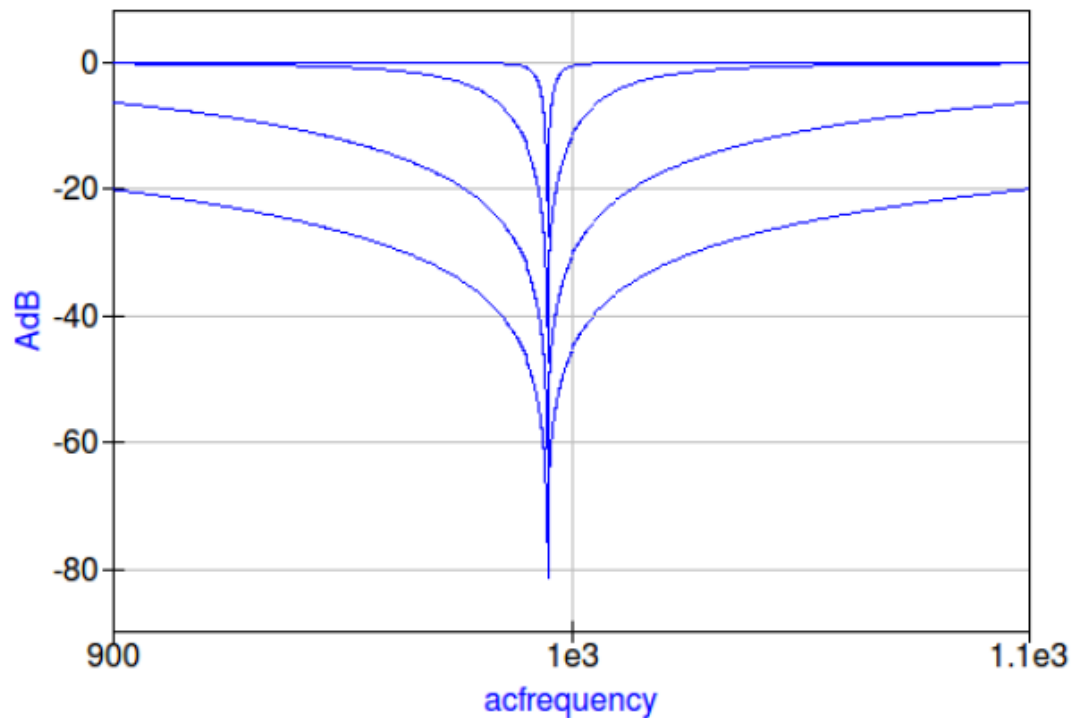


Figura 10. Resposta em frequência para vários valores de “ Q ” (as curvas superiores correspondem a maiores valores de Q). Fonte: [4]

3. Filtros de Ordem Superior

Para se obter filtros mais aproximados à situação ideal, ou seja, com mudança brusca em seus ganhos ao redor das frequências de corte, uma alternativa é a utilização de filtros de ordem superior adicionados em cascata (a saída de um corresponde à entrada do outro). Quanto mais filtros em série forem adicionados, mais abrupta é a transição próxima a frequências de corte e maior o número de pólos do mesmo. A ordem do filtro corresponde ao número de pólos.

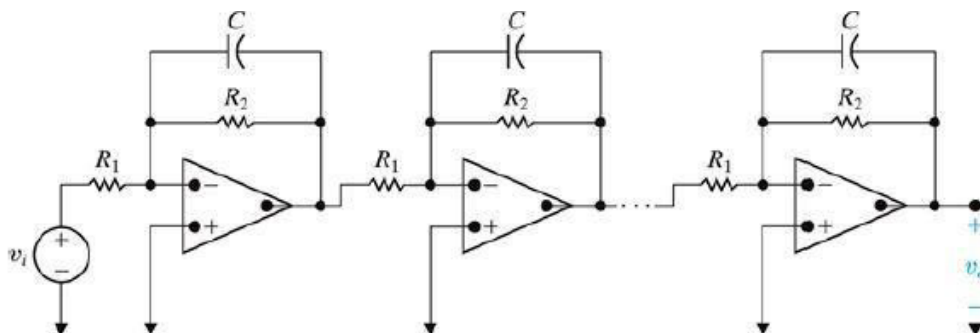


Figura 11. Filtro de Ordem “ n ”. Fonte: [1]

$$G(s) = \frac{(-K)^n \omega_{cB}^n}{(s + \omega_{cB})^n} \quad (19)$$

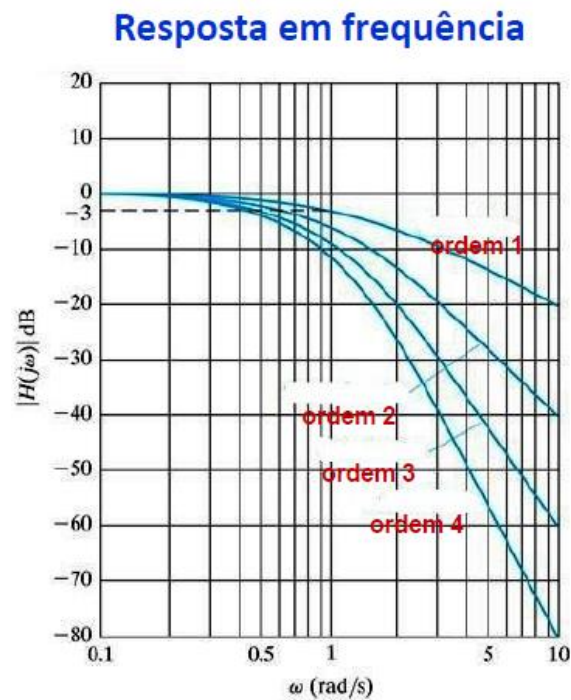


Figura 12. Diagrama de Bode para Filtros Passa Baixa de várias ordens. Fonte: [1].

Referências

- [1] "Circuitos Elétricos I: *Filtros Ativos*". José Azcue.
http://professor.ufabc.edu.br/~jose.azcue/Circuitos%20Eletricos%202/Aula_10_CELI_1Q2019.pdf.
- [2] "Experiment of the Month: Twin Tee Filter Complex Transfer Function". Millerville University.
<https://www.millersville.edu/physics/experiments/111/index.php>.
- [3] "Amplificadores Operacionais". A.C. Seabra. Ed. Érica. 1996.
- [4] "Capítulo 5- Filtros Ativos". <http://www.eletrica.ufpr.br/marlio/te054/capitulo5.pdf>