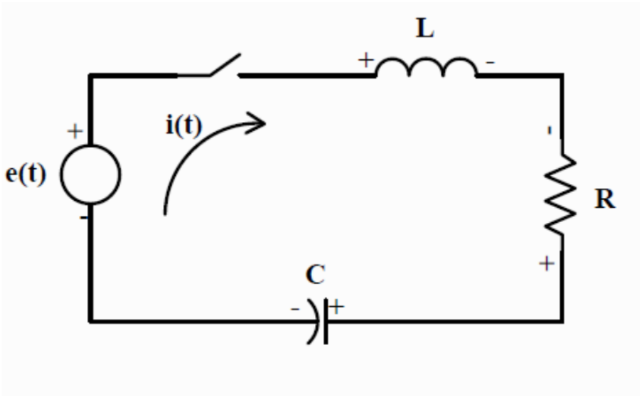
MODELAGEM DE SISTEMAS ELÉTRICOS

Exemplo:

Circuito RLC



<u>Problema</u>: Dado o sinal de entrada, v(t), e o sinal de saída $v_C(t)$, tensão no capacitor, construa a modelagem desse circuito no espaço de estados.

Solução:

1) **Aplicação das Leis de Kirchoff**

a) **Lei dos nós**

$$\sum i(t)_{nó} = 0$$

b) **Lei das malhas:**

$$\sum v(t)_{malha} = 0$$

A soma dos elevadores de tensão é igual à soma das quedas de tensão. Escolhe-se um sentido para se percorrer a malha, a partir da fonte de tensão, que fica num dos lados da equação. Exemplo:

$$e(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_C(t)$$

$e(t)$: produzido pela fonte de tensão

$v_R(t)$: queda no resistor

$v_L(t)$: queda no indutor

$v_C(t)$: queda no capacitor

Usando a 1A. lei de Kirchhoff e as expressões de queda de tensão em cada elemento, tem-se:

$$v(t) = v_C(t) + v_R(t) + v_L(t) \qquad (1)$$
$$C\dot{v}_c(t) = i(t) \qquad (2)$$
$$v_L(t) = L\frac{di}{dt} \qquad (3)$$
$$v_R(t) = Ri(t) \qquad (4)$$

Aplicando (2), (3) e (4) em (1), vem:

$$v(t) = v_C(t) + RC\dot{v}_C(t) + LC\ddot{v}_C(t) \qquad (5)$$

Sejam,

$$x_1 = v_C \qquad (6)$$
$$x_2 = \dot{v}_C \qquad (7)$$
$$u = v \qquad (8)$$

As relações (5), (6) e (7) podem ser colocadas na forma matricial das equações de estado, como segue:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} u(t)$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Para a expressão de variáveis elétricas de circuitos, de maneira geral, utilizam-se as leis de Kirchhoff (lei das malhas e lei dos nós) para a sua resolução. As equações resultantes são manipuladas algebricamente, para a obtenção da representação pela equação de estados, conforme realizado no exemplo.

ELEMENTOS ELÉTRICOS E SUA ANALOGIA MECÂNICA

Sejam

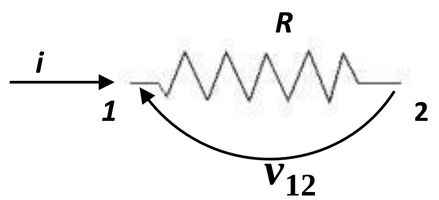
v: tensão entre os terminais do componente; i: corrente atravessa o componente; q: carga elétrica no componente

m: massa ;V: velocidade; x: deslocamento; b: constante de amortecimento; F: Força; M: torque; k: constante elástica

Relações matemáticas:

1) *Lei do resistor:*

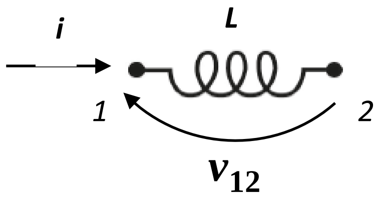
$$v_R(t) = v_{12} = v_1 - v_2 = Ri(t)$$



Analogia Mecânica:

$$v_R = Ri \Leftrightarrow F = bv$$

2) *Indutância:*

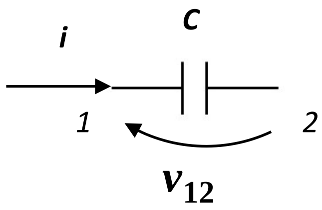


$$v_L(t) = v_{12} = v_1 - v_2 = L\frac{di(t)}{dt}$$

Analogia Mecânica:

$$v_L = L\frac{di}{dt} \Leftrightarrow F = m\frac{di}{dt}$$

3) *Capicitância:*



$$v_C(t) = v_{12} = v_1 - v_2 = \frac{1}{C}q \Rightarrow \dot{v}_C = \frac{1}{C}i$$

Analogia Mecânica:

$$v_C = \frac{1}{C}q \Leftrightarrow x = \frac{F}{k}$$

Essas analogias nas leis indicam as analogias dos parâmetros, conforme a tabela abaixo:

Elemento Mecânico	***Elemento Elétrico***
Força, Torque	*Tensão*
Massa, Momento de Inércia	*Indutância*
Coeficiente de atrito dinâmico	*Resistência*
Coeficiente de mola	*Recíproco da Capacitância*
Deslocamento (linear, angular)	*Carga*
Velocidade	*Corrente*

Esse não é o único conjunto de analogias possíveis entre os sistemas elétricos e mecânicos possíveis Um outro conjunto pode ser obtido com a introdução de leis relativas ao fluxo magnético. Acrescentamos a relação:

$$LI = N\phi$$

, onde, "N" é o número de espiras numa bobina e Φ, o fluxo magnético que atravessa o elemento.

Verifique as analogias dadas pela tabela abaixo:

Elemento Mecânico	***Elemento Elétrico***
Força, Torque	*Corrente*
Massa, Momento de Inércia	*Capacitância*
Coeficiente de atrito dinâmico	*Recíproco da Resistência*
Coeficiente de mola	*Recíproco da Indutância*
Deslocamento (linear, angular)	*Fluxo Magnético*
Velocidade	*Tensão*

ELEMENTOS ELETRÔNICOS

1-Método das impedâncias Generalizadas:

Utilizamos impedâncias, Z(s), que podem ser complexas, para representar as relações entre tensão e corrente nos elementos passivos (R,L,C):

$$Z_R(s) = R, \text{ para a resistência}$$
$$Z_C(s) = \frac{1}{Cs}, \text{ para a capacitância}$$
$$Z_L(s) = Ls, \text{ para a indutância}$$

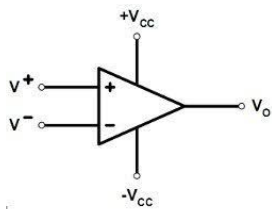
, onde, "s" é a variável de Laplace, que pode ser interpretada como o operador de diferenciação, resultando nas relações de tensão e corrente apresentadas, anteriormente, para os elementos de indutância e capacitância anteriores:

$$v_R(s) = Z_R(s)I(s)$$
$$v_C(s) = Z_C(s)I(s)$$
$$v_L(s) = Z_L(s)I(s)$$

Os circuitos elétricos e eletrônicos podem ser resolvidos substituindo-se os parâmetros de resistência, capacitância e indutância pelas respectivas impedâncias complexas acima. Note que estamos admitindo condições iniciais nulas.

2- Amplificador Operacional

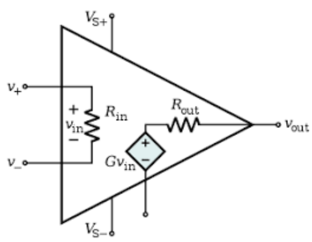
2.1 Amplificador Ideal



Relações Matemáticas:

1. $v_0 = A(v_+ - v_-)$
2. $i_+ = i_- = 0, R_i \to \infty$ (*resistência na entrada do amp − op*)
3. $R_0 = 0$ (resistência na saída do amp - op) $\Rightarrow v_0 = A(v_+ - v_-)$, independente da corrente drenada na saída
4. "A" é uma constante muito grande

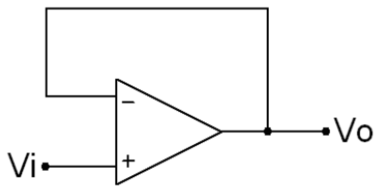
2.2 Amplificador Real

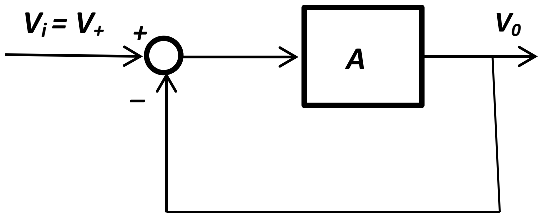


Quanto menor for a resistência interna ***Ri***, maior a corrente drenada na entrada do amp-op, o que modificaria o ganho previsto no circuito com o amp-op ideal.

Quanto maior for ***Rout***, e menor a impedância da carga conectada à saída do amp-op, maior a redução de tensão em relação àquela fornecida pelo amp-op ideal.

2.3 Circuito Seguidor. Podemos representá-lo por um sistema em malha fechada conforme o diagrama de blocos abaixo.



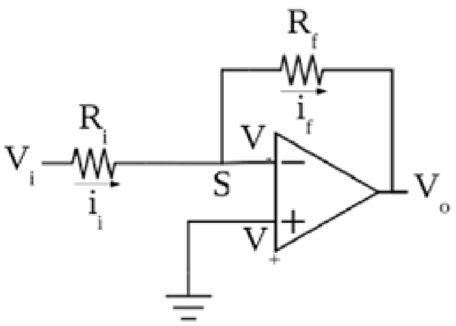


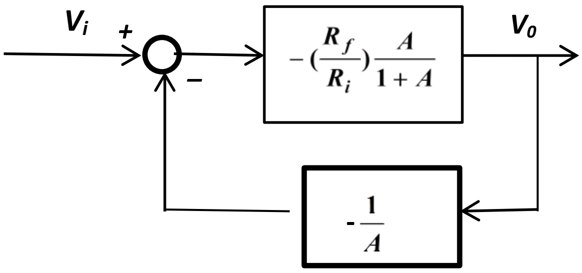
Resolvendo o diagrama, vem:

$\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{A}{1+A}$, o que, admitindo A>>1, pode ser simplificado para:-hj

$$\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = 1$$

2.4 Amplificador Inversor

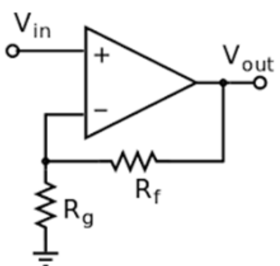




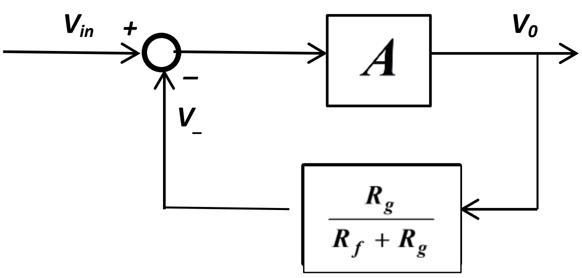
$$\frac{V_i - V_-}{R_i} = \frac{V_- - V_0}{R_f} \text{ (Lei de Ohm)}$$
$$V_0 = A(V_+ - V_-) = -AV_- \text{ (Lei do amp-op ideal)}$$

Para A>>1, a função de transferência em malha fechada fica: $$\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = -\frac{R_f}{R_i}$$

2.5 Amplificador Nã o Inversor

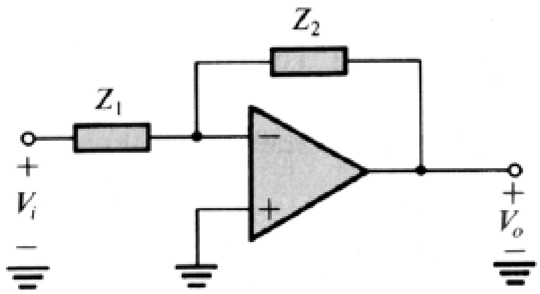


$$\frac{V_{out}}{R_f + R_g} = \frac{V_-}{R_g} \qquad (1)$$
$$V_{out} = A(V_{in} - V_-) \qquad (2)$$

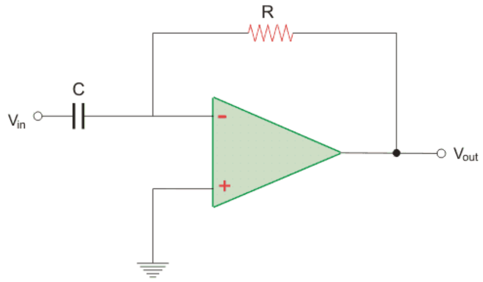


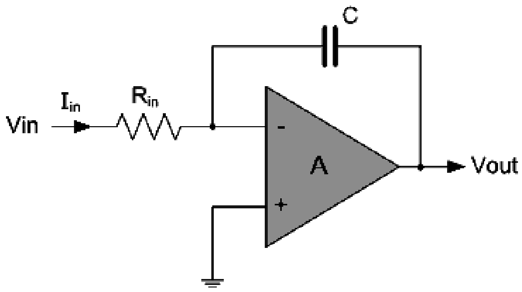
Para A>>1, a função de transferência em malha fechada fica: $$\frac{V_o(s)}{V_{in}(s)} = 1 + \frac{R_g}{R_f}$$

Aplicação do Método de Impedâncias Generalizadas:



$$\frac{V_o}{V_i} = -\frac{Z_2}{Z_1}$$





(a) Circuito Diferenciador ***(b) Circuito Integrador***

Para o circuito Diferenciador, temos:

$$Z_1(s) = \frac{1}{Cs}$$
$$Z_2(s) = R$$

Aplicando o método das impedâncias generalizadas, temos:

$$\frac{Vout(s)}{V_{in}(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} = -RCs$$

Analogamente, para o integrador, temos:

$$\frac{Vout(s)}{V_{in}(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} = -\frac{1}{RCs}$$